Kleyers Encyklopädie.

Lehrbuch
der
ebenen Elementar-Geometrie
(Planimetrie)
Vierter Teil
von

Prof. Dr. J. Sachs

Ma.
o.
150m
3

Kleyers

Encyklopädie

der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Raumgrössenlehre I.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Lehrbuch

der

ebenen Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

Vierter Teil:

Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 529 Erklärungen und 230 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. J. Sachs.

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Lehrbuch

der

ebenen Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

Vierter Teil:

Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 528 Erklärungen und 230 in den Text gedruckten Figuren.

BAMBERG

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. J. Sachs.

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Vorwort zum vierten Teile.

Gleichwie der dritte Teil dieses Lehrbuches, verfolgt auch der vorliegende vierte Teil den Zweck, dem Lernenden die unbedingte Allgemeingültigkeit aller mathematischen Errungenschaften vor Augen zu führen. Es ist daher besonders in den Erklärungen jeweils der Weg gewiesen, wie sich einerseits die gewonnenen Ergebnisse auf andere Fälle ausdehnen lassen, und wie sie anderseits an andere Fälle anschliessen oder schon bekanntes in sich enthalten. Dabei durfte auch manche Andeutung auf solche Ergebnisse mit einlaufen, die auf Grund der hier gewonnenen Kenntnisse erst in späteren Teilen dieses Lehrbuches mittelst höherer Hilfsmittel oder in andern Büchern dieser Encyklopädie zu erreichen sind. Denn eben diese ins einzelne gehende Verzahnung aller mathematischen Schlüsse ist ein Hauptteil des Genusses, welches gerade das Studium dieses Faches für den Lernenden zu einem so erfreulichen macht, indem es ihm auf seinem Erkenntniswege mehr als irgend ein anderes Fach ermöglicht, „den Stolz des Entdeckers nachzufühlen“.

Es entspricht diesen Grundsätzen, dass der Lernende häufig aus eigenem Antriebe die Gelegenheit wahrnehmen wird, Erweiterungen an gefundenen Sätzen anzubringen, analoge Sätze selbständig aufzustellen, auch etwa geometrische Ortssätze zusammenzustellen aus solchen Sätzen, bei denen der erste Beweis für den Ortssatz vorliegt, der zweite leicht erbracht werden kann (z. B. bei den Antworten der Fragen 128 bis 133 und an anderen Orten).

Weiterer Ansporn zu selbständiger Thätigkeit bilden die Zeichnungen von Figuren zu solchen Fällen, deren Wiedergabe im Buche der Raumersparnis wegen gar nicht oder nur teilweise stattgefunden. So wird vieles vom spitzwinkligen Dreieck gezeichnet und bewiesen, was vom stumpfwinkligen mit geringer Aenderung ebenfalls gilt; mancher Beweis über das allgemeine Dreieck, Viereck u. s. w. nimmt sich bei den „besonderen“ Dreiecken und Vierecken wieder ganz anders aus. Und der Entwurf einer Zeichnung zu diesen Fällen bietet vortreffliche Einübung des Bekannten und neue Anregung.

Ferner ist im vorliegenden Teile erstmals Gebrauch davon gemacht, dass im Texte gewisse Punkte einer Figur beschrieben und mit Buchstaben bezeichnet sind, die in der beigegebenen Figur zur Vermeidung von Ueberfüllung weg-

gelassen wurden. Es bietet dies den mehrfachen Vorteil, dass die Darstellung vereinfacht, die Vorstellungskraft geübt und die Selbstthätigkeit im Zeichnen angeregt wird.

Ueber die Auswahl der Aufgaben gilt dasselbe, was im Vorwort zum dritten Teile bemerkt wurde. Da diese Encyklopädie selbständige Aufgabenwerke enthält, so wäre es Wiederholung gewesen, wenn alle wünschenswerten Aufgaben nochmals hier Aufnahme gefunden hätten. Es wurde daher möglichst Rücksicht darauf genommen, entweder ganz neue Aufgaben zu bringen — besonders mit Beziehungen aufs praktische Vorkommen — oder durch Hervorhebung neuer Gesichtspunkte bei Behandlung schon bekannter Aufgaben die Selbständigkeit zu bewahren.

November 1891.

Prof. Dr. J. Sachs.

Inhaltsverzeichnis.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Vierter Teil.

Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Seite

A. Ueber den Kreis . 1

1) **Ueber einen Kreis und einen Punkt** 1

2) **Ueber einen Kreis und eine gerade Linie** 8

a) Ueber den Kreis und eine denselben schneidende Gerade 9

b) Ueber den Kreis und eine denselben berührende Gerade 21

3) **Ueber einen Kreis und einen Winkel** 31

a) Ueber den Peripheriewinkel 31

b) Ueber den Sehnen- und Sekantenwinkel 44

4) **Ueber einen Kreis in Verbindung mit einem Dreieck** 47

a) Ueber das einem Kreis eingeschriebene Dreieck oder über den einem Dreieck umgeschriebenen Kreis . 47

b) Ueber das einem Kreis um- oder angeschriebene Dreieck oder über den einem Dreieck um- oder angeschriebenen Kreis 57

5) **Ueber einen Kreis in Verbindung mit einem Viereck** 74

a) Ueber das einem Kreis eingeschriebene Viereck oder das Sehnenviereck . . 74

b) Ueber das einem Kreis um- oder angeschriebene Viereck oder das Tangentenvierseit . 82

c) Ueber das einem Kreis ein- und umgeschriebene Viereck oder das Kreisviereck 93

6) **Ueber einen Kreis in Verbindung mit einem Vieleck im allgemeinen** . . 95

a) Ueber das Sehnenvieleck und das Tangentenvielseit 95

b) Ueber die regelmässigen Vielecke 100

7) **Ueber den Kreis in Verbindung mit einem zweiten Kreis** 114

a) Ueber die Beziehungen zweier Kreise im allgemeinen 114

b) Ueber die einzelnen Lagenbeziehungen zweier Kreise 120

8) **Ueber einen Kreis in Verbindung mit zwei anderen Kreisen** 138

B. Ueber die geometrischen Oerter 144

a) Ueber geometrische Ortssätze im allgemeinen 144

b) Geometrische Ortssätze über den Abstand eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden und Kreisen 145

c) Geometrische Ortssätze über die Kreislinie im besondern 163

C. Ueber die merkwürdigen Punkte des Dreiecks 169

1) **Ueber das Zentrum der Ecken eines Dreiecks** 169

2) **Ueber die Zentra der Seiten eines Dreiecks** 170

3) **Ueber den Höhenpunkt eines Dreiecks, sowie den Kreis der neun Punkte** 171

4) **Ueber den Schwerpunkt eines Dreiecks** 186

Aufgaben-Sammlung.

Seite
1) **Aufgaben über die Abstände von Kreispunkten unter sich und von einer Geraden** . . . 191
a) Gelöste Aufgaben . . . 191
b) Ungelöste Aufgaben . . . 193
2) **Aufgaben über Sehnen eines Kreises** . . . 193
a) Gelöste Aufgaben . . . 193
b) Ungelöste Aufgaben . . . 197
3) **Aufgaben über Tangenten eines Kreises** . . . 199
a) Gelöste Aufgaben . . . 199
b) Ungelöste Aufgaben . . . 206
4) **Aufgaben über Peripheriewinkel eines Kreises** . . . 208
a) Gelöste Aufgaben . . . 208
b) Ungelöste Aufgaben . . . 211
5) **Aufgaben über die Winkel von Sehnen, Sekanten und Tangenten eines Kreises** . . . 213
a) Gelöste Aufgaben . . . 213
b) Ungelöste Aufgaben . . . 216
6) **Aufgaben über das einem Kreise eingeschriebene Dreieck** . . . 217
a) Gelöste Aufgaben . . . 217
b) Ungelöste Aufgaben . . . 224
7) **Aufgaben über das einem Kreise um- und angeschriebene Dreieck** . . . 225
a) Gelöste Aufgaben . . . 225
b) Ungelöste Aufgaben . . . 229
8) **Aufgaben über das Sehnen-, Tangenten- und Kreisviereck** . . . 230
a) Gelöste Aufgaben . . . 230
b) Ungelöste Aufgaben . . . 235
9) **Aufgaben über allgemeine Sehnen- und Tangentenvielecke und regelmässige Polygone** . . . 235
a) Gelöste Aufgaben . . . 235
b) Ungelöste Aufgaben . . . 240
10) **Aufgaben über zwei Kreise** . . . 241
a) Gelöste Aufgaben . . . 241
b) Ungelöste Aufgaben . . . 244
11) **Aufgaben über drei Kreise** . . . 245
a) Gelöste Aufgaben . . . 245
b) Ungelöste Aufgaben . . . 247
12) **Aufgaben über die geometrischen Oerter** . . . 248
a) Gelöste Aufgaben . . . 248
b) Ungelöste Aufgaben . . . 253
13) **Aufgaben über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks** . . . 255
a) Gelöste Aufgaben . . . 255
b) Ungelöste Aufgaben . . . 260
Ergebnisse der ungelösten Aufgaben . . . 261
Berichtigungen . . . 264

Ebene Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

4. Teil.

Die Lehre vom Kreis.

Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

A. Ueber den Kreis.

1) Ueber einen Kreis und einen Punkt.

Anmerkung 1. Als Einleitung zum folgenden Abschnitte wiederhole man dasjenige, was im Abschnitt E des I. Teiles dieses Lehrbuches insbesondere über die Definition und Entstehungsweise der Kreislinie ausgeführt wurde, sowie auch den Abschnitt A 6 des II. Teiles über die Arten der Winkel beim Kreise.

Anmerkung 2. Von den im zunächst vorhergehenden III. Teile dieses Lehrbuches enthaltenen Ausführungen sind hier in Erinnerung zu bringen die im Satz 60 daselbst niedergelegte Beziehung des rechtwinkligen Dreiecks zum Halbkreise und deren Anwendungen.

Frage 1. Was für Punkte sind bei jedem Kreise in erster Reihe zu betrachten?

Erkl. 1. Die auf der Kreisperipherie liegenden Punkte werden auch Peripheriepunkte oder Kreispunkte genannt.

Antwort. Bei einem Kreise sind zunächst zu betrachten:

1) die Punkte seiner Peripherie oder die auf der Kreislinie selbst liegenden Punkte;

2) der Mittelpunkt des Kreises.

Frage 2. Welche Beziehung kann bestehen zwischen den Punkten der Kreisperipherie untereinander?

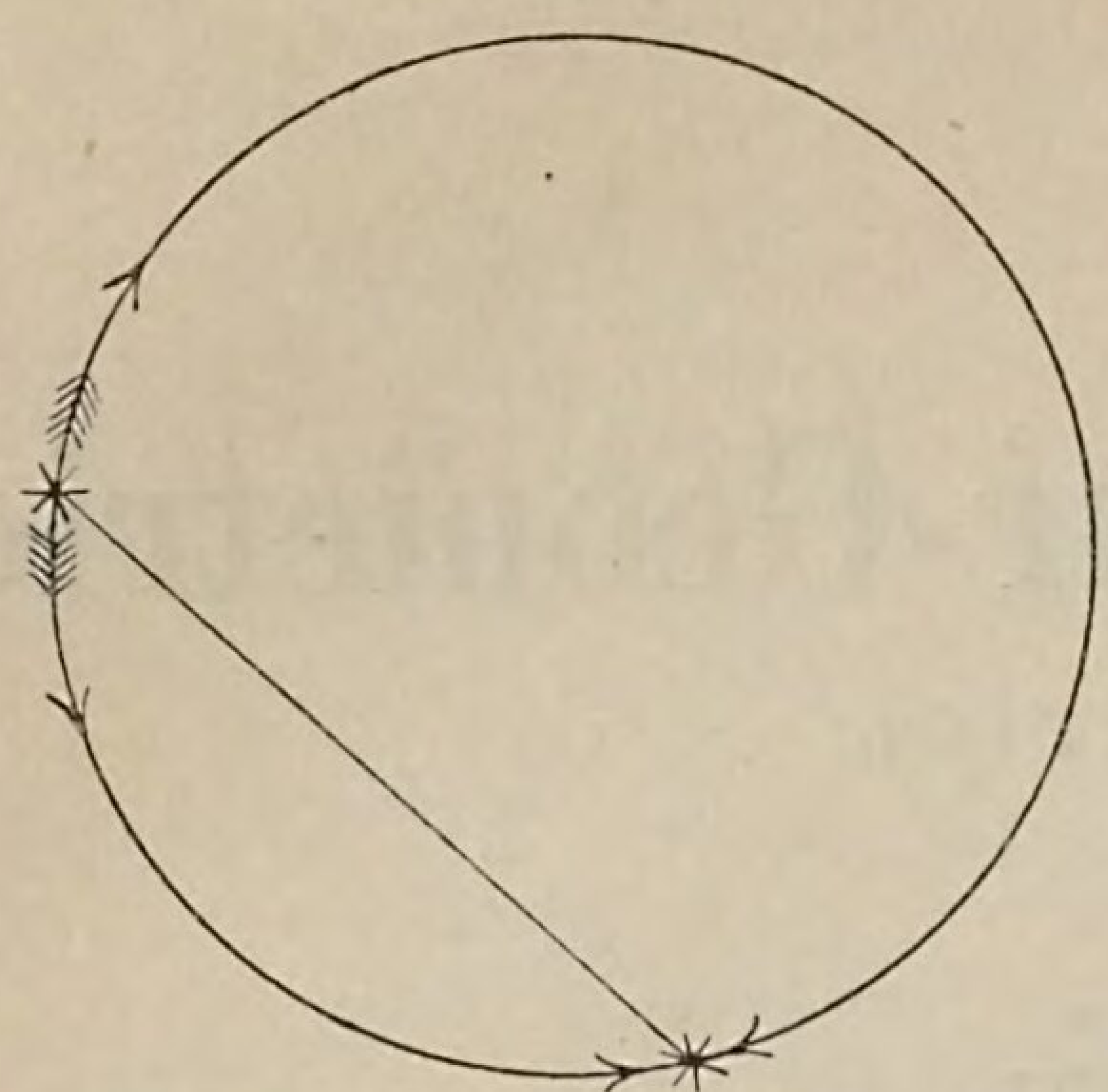
Erkl. 2. Die Umlaufsrichtung, in welcher ein Punkt die Kreisperipherie durchläuft, kann die positive oder die negative sein, also wie die Drehung gegen die Uhrzeigerbewegung oder mit derselben, oder auch mit der Drehung der Erde um ihre Achse oder gegen dieselbe, oder auch mit der Drehung der Erde um die Sonne oder gegen dieselbe (vgl. Erkl. 15 im II. Teile dieses Lehrbuches).

Antwort. Die Punkte einer Kreislinie können in folgenden Arten untereinander in Beziehung treten:

1) Wenn ein Kreispunkt die Peripherie des Kreises durchläuft, so kommt er der Reihe nach mit jedem der übrigen Kreispunkte einmal zur Deckung.

2) Um durch solchen Umlauf mit einem bestimmten zweiten Kreispunkte

Figur 1.



Erkl. 3. Der Ausnahmefall, dass die beiden Teile der Peripherie, oder die beiden Kreisbogen, auf welchen ein Punkt zu einem bestimmten andern gelangen kann, gleiche Länge haben, tritt nur dann ein, wenn jeder der beiden Kreisbogen gleich der Hälfte der ganzen Peripherie, also gleich einem Halbkreise ist.

Erkl. 4. Da zwischen zwei Punkten nur eine einzige gerade Verbindungslinie möglich ist (s. die Lehrsätze 1 bis 4 im ersten Teil dieses Lehrbuches), so ergibt sich, dass durch zwei Punkte eines Kreises die Lage einer einzigen Sekante, sowie Lage und Länge einer einzigen Sehne eindeutig bestimmt ist.

zur Deckung zu gelangen, kann der gegebene erste Kreispunkt zweierlei nach ihrer Lage, Umlaufsrichtung, und in der Regel auch nach Grösse verschiedene „Teile der Kreisperipherie“ oder „Kreisbogen“ durchlaufen.

3) Um auf geradem Wege mit einem bestimmten zweiten Kreispunkte zur Deckung zu gelangen, hat der gegebene erste Kreispunkt die einzige geradlinige Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte oder die durch beide Punkte zu legende Sehne zu durchlaufen.

Frage 3. Zu welchen Vorstellungen über die beiden durch zwei gegebene Punkte eines Kreises bestimmten Kreisbogen gelangt man auf Grund der vorigen Antwort?

Erkl. 5. Wie durch einen Kreispunkt kein Kreisbogen eindeutig bestimmt wird, so wird auch durch einen Punkt einer Linie keine Strecke, durch eine Gerade durch einen Punkt kein Winkel bestimmt. Dagegen werden durch zwei Kreispunkte gleich zwei Kreisbogen bestimmt, und ebenso durch zwei Punkte eine Strecke samt ihren (als im Unendlichen zusammenhängend gedachten) Verlängerungen, durch zwei Gerade vier Winkel (von denen je zwei Scheitelwinkel im Unendlichen zusammenhängende Winkelräume bilden). Man vergleiche hiezu die Erkl. 8 bis 12 im III. Teile dieses Lehrbuches.

Erkl. 6. Die in der vorigen Erklärung enthaltenen Vergleiche führen dazu, dass man sich die gerade Linie als einen ins Unendliche ausgezogenen Kreis vorstellt. Dabei denkt man sich den Uebergang von der einen Verlängerung einer Strecke zur anderseitigen als Ueberschreiten des im Unendlichen liegenden Kreispunktes.

Antwort. Durch die vorige Antwort wird man zu folgenden Vorstellungen geführt:

1) Durch einen einzelnen Punkt wird eine Kreislinie nicht in zwei getrennte Teile geteilt.

2) Durch zwei Peripheriepunkte wird eine Kreislinie in zwei getrennte Teile geteilt. Es ist nicht möglich, aus dem einen dieser Kreisbogen auf der Kreislinie zu einem Punkte des andern Kreisbogens zu gelangen, ohne entweder den einen, oder den andern der gegebenen Teilpunkte zu überschreiten.

3) Die beiden durch zwei Punkte abgetrennten Kreisbogen bilden zusammen den ganzen Kreisumfang oder 360 Bogengrade. Daher ist die Summe der beiden durch zwei beliebige Teilpunkte auf einem Kreise bestimmten

Erkl. 7. Wie auf der geraden Linie, so ist auch auf dem Kreise durch Festlegung eines nicht zu überschreitenden Punktes nur eine Beschränkung aufgestellt für die vorher zweifache Möglichkeit, von einem Punkt zu einem andern zu gelangen. Von den zwei in Antwort der Frage 2 erwähnten Wegen zwischen zwei Punkten ist nämlich nur noch der eine freigelassen, also eine Willkür in der Umlaufsrichtung von einem ersten Punkte zu einem gegebenen zweiten Punkte ausgeschlossen.

Erkl. 8. Man nennt im allgemeinen zwei geometrische Gebilde (Linien, Flächen, oder Räume) vollständig getrennt, wenn kein Uebergang aus dem einen Gebilde zu einem gegebenen Punkte des andern möglich ist, ohne Ueberschreitung der festgelegten Grenzen; ist dagegen nur ein Teil der Wege abgeschnitten, ein andrer Teil noch offengelassen, so heissen die Gebilde unvollständig getrennt.

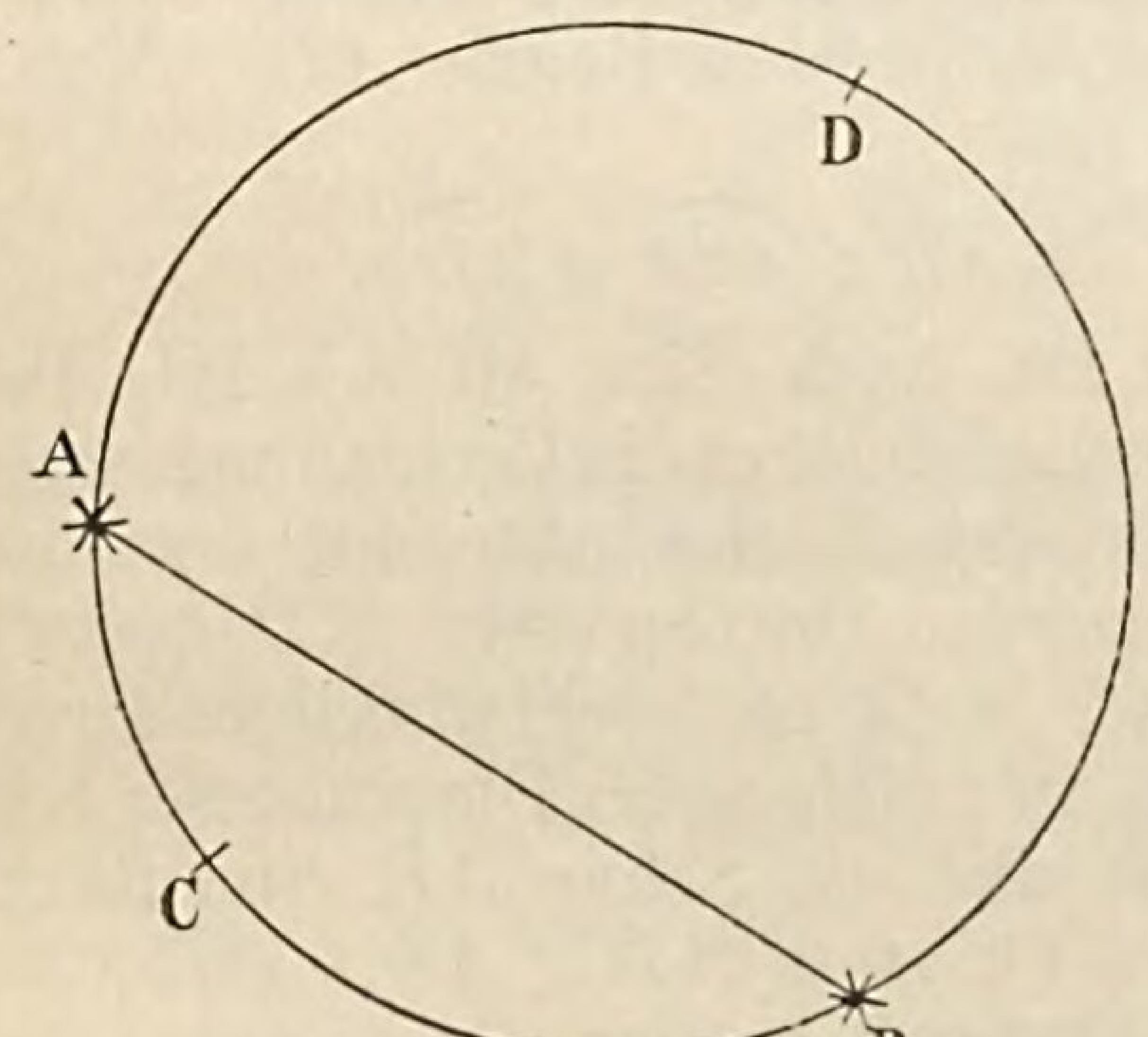
Kreisbogen stets gleichgross, der eine Bogen ist stets die Ergänzung des andern zu 360 Bogengraden. Man vergleiche über die Rechnung mit Bogengraden die Antwort der Frage 48 sowie die Erkl. 99 bis 102 im zweiten Teile dieses Lehrbuches.)

4) Sind zufällig die beiden Kreisbogen gleichgross so ist jeder gleich dem Halbkreise und zählt 180 Bogengrade.

5) Sind die beiden Kreisbogen nicht gleichgross, so ist stets der eine kleiner, der andere grösser, als ein Halbkreis; und zwar der eine um ebensoviel kleiner als der Halbkreis, wie der andre grösser als der Halbkreis.

Frage 4. Wie werden die beiden durch zwei Kreispunkte bestimmten Kreisbogen und die zugehörige Sehne bezeichnet?

Figur 2.



Erkl. 9. In Figur 2 ist also zu bezeichnen: der im positiven Umlauf von dem Punkte A nach B führende Kreisbogen durch:

„Bogen $\overset{\frown}{AB}$ oder $\overset{\frown}{ACB}$";

der im negativen Umlauf zwischen denselben Punkten liegende Kreisbogen durch:

„Bogen $\overset{\frown}{ADB}$";

die zwischen denselben Punkten liegende Sehne durch:

„Sehne AB oder $\overline{AB}$".

Erkl. 10. Durch die Stellung der einen Bogen bezeichnenden Buchstaben kann auch die Umlaufsrichtung stets angegeben werden. Man hat nämlich z. B.:

Antwort. 1) Zur Bezeichnung eines zwischen zwei Punkten A und B liegenden Kreisbogens werden die beiden Buchstaben der Punkte A und B neben einander gestellt und entweder das Wort „Kreisbogen" oder auch nur „Bogen" ausdrücklich beigefügt; oder es wird ein Bogen $\frown$ über die beiden Buchstaben gesetzt, z. B. Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in Figur 2.

2) Zur Unterscheidung der beiden durch zwei Punkte bestimmten Kreisbogen muss irgend ein weiterer Punkt hingezogen werden, welcher auf dem zu bezeichnenden Bogenstücke liegt; dessen Buchstaben wird dann zwischen die beiden Buchstaben der Grenzpunkte hineingesetzt, z. B. Bogen $\overset{\frown}{ACB}$.

3) Wird die Zwischensetzung eines Buchstabens unterlassen, so wird stets derjenige der beiden Bogen $\overset{\frown}{AB}$ vorgestellt, welcher kleiner ist, als der Halbkreis, also auch kleiner als der andre Bogen zwischen denselben beiden Punkten, also kurz der kleinere der beiden zwischen diesen Punkten liegenden Kreisbogen.

4) Um die Sehne zwischen den beiden Punkten A und B zu bezeichnen, werden die beiden Buchstaben der Endpunkte ohne weiteres nebeneinander gesetzt; soll

in positiver Umlaufsrichtung:

Bogen $\overset{\frown}{ACB}$ oder $\overset{\frown}{BDA}$,

in negativer Umlaufsrichtung:

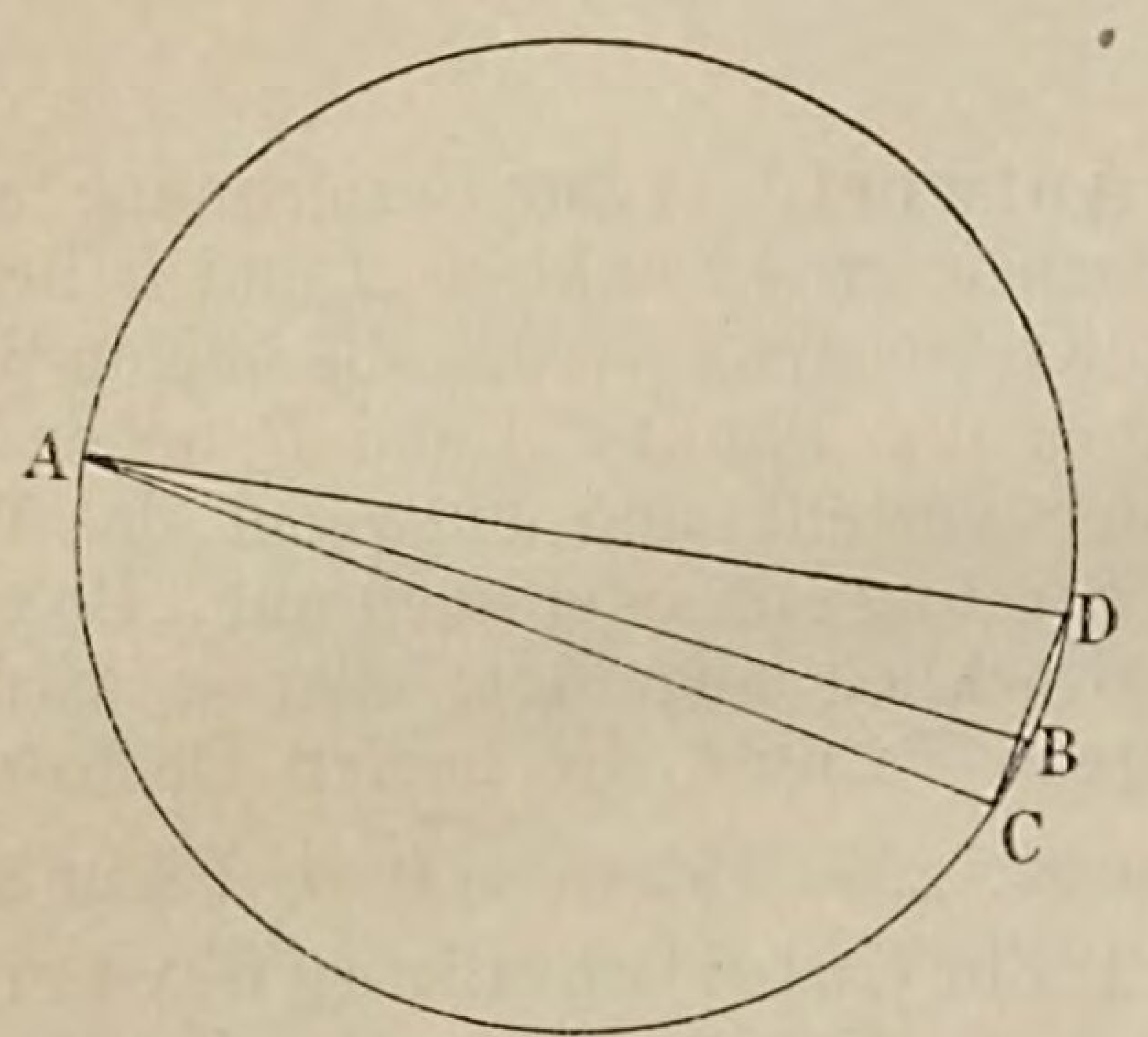
Bogen $\overset{\frown}{BCA}$ oder $\overset{\frown}{ADB}$.

Erkl. 11. Zur Unterstützung der Vorstellung werden oft auch mehr als ein Buchstabe zwischen den Endpunkten eines Kreisbogens zu Hilfe genommen. So kann der in Figur 2 im positiven Umlauf von B nach C führende Bogen bezeichnet werden als Bogen $BDAC$ oder $\overset{\frown}{BDAC}$.

die Unterscheidung der geradlinigen Sehne von den beiden Bogen zwischen ihren Endpunkten aber ausdrücklich hervorgehoben werden, so wird über die beiden nebeneinander stehenden Buchstaben der Endpunkte noch eine kurze wagrechte Linie — gezeichnet: also Sehne $\overline{AB}$ im Gegensatz zu Bogen $\overset{\frown}{AB}$.

Frage 5. Welche Ergebnisse erhält man bei Untersuchung der Abstände zweier Punkte der Kreisperipherie?

Figur 3.



Erkl. 12. Dass wirklich mit wachsendem Bogen auch der Abstand des wandernden Punktes von A ständig zunimmt bis zum Durchmesser AD, und nicht etwa schon von einer Stelle C an die Sehne abnimmt, lässt sich folgendermassen beweisen:

Voraussetzung: Bogen $\overset{\frown}{ACB} > \overset{\frown}{AC}$

Behauptung: Sehne $\overline{AB} >$ Sehne $\overline{AC}$.

Beweis: Zum Beweise verbinde man noch die Punktpaare CB und CD. Dann muss nach Satz 60 des III. Teiles dieses Lehrbuchs

$$\sphericalangle ACD = 90^0$$

sein, also:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + DCB > 90^0.$$

Demnach ist ABC ein stumpfwinkliges Dreieck mit stumpfem Winkel C, AB die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite, also AB grösser als AC.

Antwort. Ueber die Abstände zweier Punkte der Kreisperipherie kann man folgendes aussagen:

1) Da die beiden Kreisbogen zwischen den Punkten A und B in Figur 3 krumme Verbindungslinien dieser Punkte sind, die Sehne AB aber eine gerade, so muss nach Satz 50 des III. Teiles dieses Lehrbuches die Sehne AB kürzer sein, als jeder der beiden Bogen AB. Man erhält also

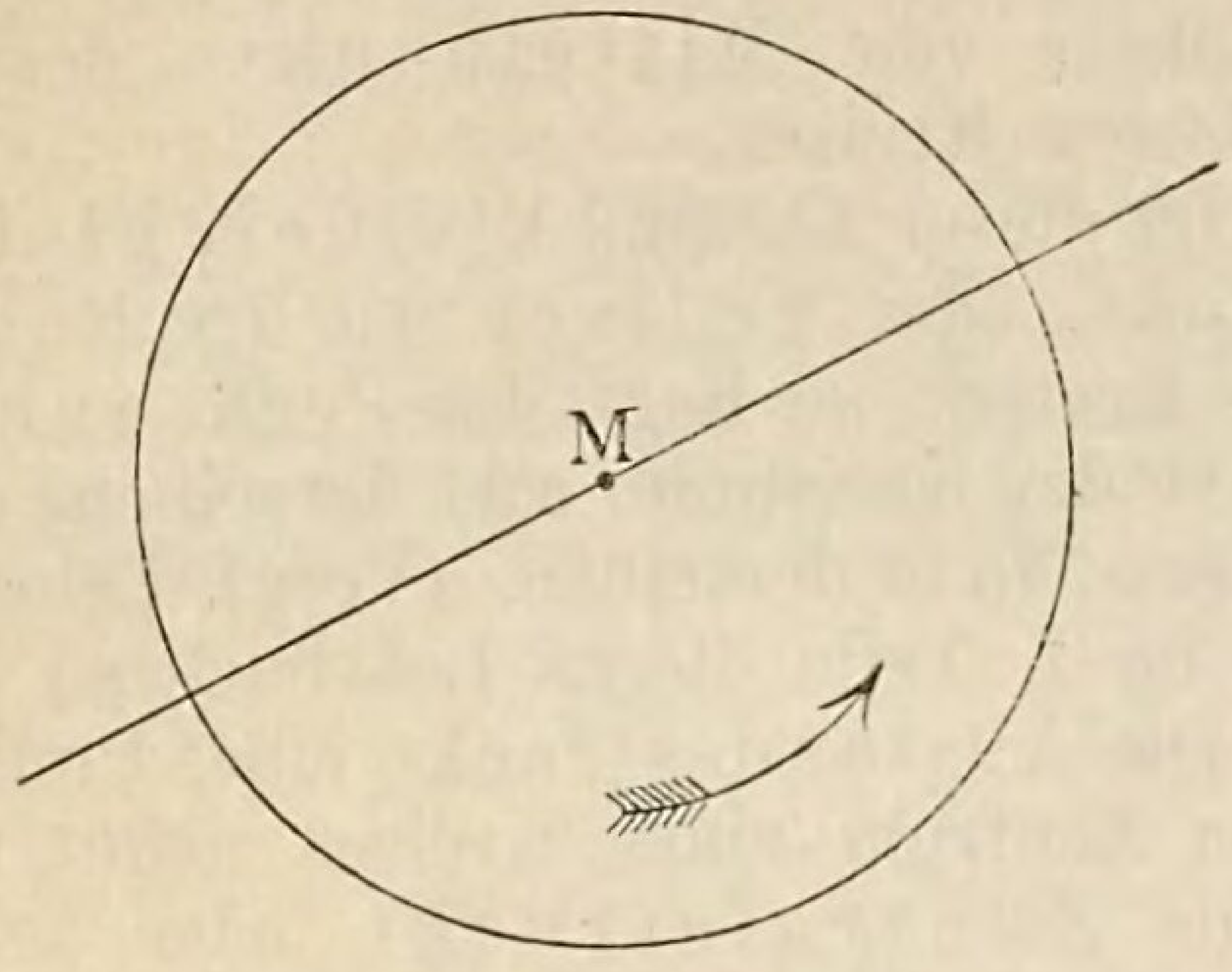
$$\overline{AB} < \overset{\frown}{ACB} < \overset{\frown}{ADB}.$$

2) Da nach Satz 60 des III. Teiles dieses Lehrbuches die Verbindungsstrecke AB zweier Kreispunkte mit dem durch A gehenden Durchmesser AD desselben Kreises stets ein rechtwinkliges Dreieck bildet, in welchem der Durchmesser Hypotenuse und die Sehne AB eine Kathete ist, so ist stets $AB < AD$. Daher muss der Abstand zweier Kreispunkte stets kleiner sein, als der Durchmesser des Kreises; oder eine Sehne kann nie grösser sein, als der Durchmesser; oder der Durchmesser selbst ist die grösste Sehne eines Kreises.

3) Wenn daher ein Punkt die Kreisperipherie etwa von A aus durchläuft, so nimmt sein Abstand von A ständig zu, bis die Sehne gleich dem Durchmesser AD, also der Bogen gleich dem Halbkreis wird. Rückt dann der Punkt auf dem Kreise weiter, so nimmt sein geradliniger Abstand von A wieder ab, und wird Null, wenn der wandernde Punkt wieder in A anlangt.

Frage 6. Welche Beziehung besteht zwischen den Punkten der Kreisperipherie und dem Mittelpunkte des Kreises?

Figur 4.



Erkl. 13. Zieht man einen beliebigen Durchmesser eines Kreises und klappt um denselben um, so kann kein Punkt des einen Halbkreises eine andre Lage erhalten, als wieder auf einem Punkte des andern Halbkreises. Denn wäre dies irgendwo der Fall, so müsste die Verbindungsstrecke dieses Punktes mit dem Mittelpunkt gleich dem Radius sein, und müsste auch gleich der auf derselben Linie liegenden zweiten Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit der Peripherie sein; dies aber ist unmöglich, wenn nicht die beiden Peripheriepunkte zusammenfallen.

Erkl. 13a. Man beachte die Durchführung der in den Sätzen 97 des III. Teiles ausgesprochenen Ergebnisse für den Kreis:

Der Kreis besitzt unendlich viele Symmetrieachsen, da jeder Durchmesser eine solche darstellt; zwei benachbarte bilden einen unendlich kleinen Winkel φ, so dass der Quotient $m = \frac{180^0}{\varphi}$ unendlich gross ist. Durch diese unendlich vielen Durchmesser wird die Peripherie und die ganze Kreisfläche auch in unendlich viele unendlich kleine kongruente Teilchen geteilt.

Alle Achsen schneiden sich im gleichen Punkte, dem Mittelpunkte, und durch Umdrehung um jeden beliebigen Betrag — klein oder gross — kommt die ganze Figur mit sich selbst zur Deckung.

Die in Erkl. 441 des III. Teiles betrachteten Grössen φ, m, ψ nehmen daher beim Kreise folgende Werte an:

$\varphi = 0^0$ als Winkel zweier benachbarten Durchmesser,

$m = \frac{180}{\varphi} = \frac{360}{\psi} = \infty$, als Anzahl der Achsen und der kongruenten Einzelteile,

$\psi = 0^0$ als Drehungswinkel für die Ueberführung der Figur in sich selbst.

Antwort. Nach den Lehrsätzen 25 und 26 des I. Teiles dieses Lehrbuches besteht zwischen Kreispunkten und Kreismittelpunkt die Beziehung:

> dass der Mittelpunkt von allen Punkten der Peripherie denselben Abstand hat, und umgekehrt.

Wenn daher der Kreis als ganze Figur um den Mittelpunkt als Umdrehungsmittelpunkt beliebig gedreht wird, so gelangt in jedem Augenblicke jeder seiner Punkte nur wieder mit Punkten desselben Kreises zur Deckung. Dies gilt daher besonders auch für die Umdrehung von 180^0 oder die halbe Umdrehung.

Bei der letzteren aber zeigt sich, dass die Figur eines beliebigen Durchmessers samt dem einen Halbkreis kongruent ist mit der aus demselben Durchmesser und dem andern Halbkreis gebildeten Figur — und zwar gleichzeitig gleichwendig kongruent und ungleichwendig kongruent. Daher kann auch beim Umklappen um diesen Durchmesser jeder Punkt des einen Halbkreises auch nur wieder auf einen Punkt des andern Halbkreises fallen, weil sonst ungleiche Radien entstehen würden; — und man erhält den

Satz 1. Der Kreis ist:

1) zentrisch-symmetrisch in Bezug auf seinen Mittelpunkt als Symmetrie-Zentrum, und

2) achsig-symmetrisch in Bezug auf jede durch den Kreismittelpunkt gehende Gerade oder jeden Durchmesser als Symmetrieachse.

Frage 7. Wonach wird die Beziehung eines beliebigen Punktes zu einer Kreislinie beurteilt?

Erkl. 14. Während es für die Kreispunkte selbst und den Mittelpunkt des Kreises gleichwertig bleibt, ob der Kreis nur als Figur in der Zeichenebene oder als Raumlinie betrachtet werden soll, tritt für weitere Punkte die Notwendigkeit der Unterscheidung ein, ob sie in derselben Ebene liegen oder ausserhalb. Im letzteren Falle kommt zur Beurteilung der Beziehung zwischen Kreis und Punkt zur Zentralen noch hinzu der Neigungswinkel dieser Linie zur Kreisebene (s. Seipp, Stereometrie).

Erkl. 15. Ein Durchmesser eines Kreises ist nach Nebenstehendem stets eine auf einer Zentralen des Kreises gelegene Strecke, und ebenso jeder einzelne Radius, sonst aber keine von allen Sehnen des Kreises.

Antwort. Die Beziehung eines beliebigen Punktes in der Ebene einer gegebenen Kreislinie zu diesem Kreise wird beurteilt nach dem Abstande dieses Punktes vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises.

Ist dieser Abstand kleiner, gleichgross, oder grösser wie der Radius des Kreises, so liegt der Punkt innerhalb der Kreislinie, auf derselben, oder ausserhalb derselben. (Vergl. Lehrsatz 29 im I. Teile dieses Lehrbuches.)

Die Abstandsstrecke eines Punktes vom Zentrum eines Kreises nennt man seine Zentralstrecke oder seinen Zentralabstand; und die gerade Linie, auf welcher dieselbe enthalten ist, als ganze Linie wird als Zentrale des Punktes bezeichnet.

Frage 8. Welche Abstände hat ein beliebiger Punkt in der Ebene eines gegebenen Kreises von den verschiedenen Peripheriepunkten desselben?

Erkl. 16. In Figur 5 sind die beiden Schnittpunkte einer durch P gehenden Linie mit dem Kreise jeweils mit demselben Buchstaben A oder B bezeichnet, da für jedes der beiden Dreiecke MPA bezw. für beide Dreiecke MPB der nebenstehende Beweis in wörtlich gleichbleibender Weise Gültigkeit hat.

Erkl. 17. Grenzfälle der in nebenstehender Antwort betrachteten Beziehungen wären für den inneren Punkt der Mittelpunkt M selber, für den äusseren Punkt ein unendlich ferner Punkt der Ebene.

Fällt P nach M, so wird wegen $MP = 0$:

$$PA = PX = PY,$$

und es tritt Lehrsatz 25 und 26 des I. Teiles in Kraft.

Fällt P ins Unendliche, so wird $MP = \infty$, und man erhält ebenso:

$$PX = \infty \text{ und } PY = \infty.$$

Bei diesem Grenzübergang könnte man also sagen, dass ausser dem Mittelpunkte eines Kreises auch sämtliche unendlich fernen Punkte seiner Ebene von allen Kreispunkten denselben Abstand haben.

Dabei ist aber nicht ausser Acht zu lassen, dass für unendlich fernes P zwar:

$$\frac{PY}{PX} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Antwort. Unter den Abständen eines beliebigen Punktes P von den Peripheriepunkten eines gegebenen Kreises sind besonders bemerkenswert die beiden Strecken PX und PY, welche auf der Zentralen des Punktes P gelegen sind. Um mit diesen beiden Strecken die auf einer beliebigen Schnittlinie durch P entstehenden Abstände PA für einen innern oder PB für einen äussern Punkt zu vergleichen, verbindet man A bezw. B mit dem Mittelpunkt, und wendet auf das entstehende Dreieck PMA bezw. PMB den Satz 49 des III. Teiles dieses Lehrbuches an:

1) Liegt der Punkt P innerhalb des Kreises (Figur 5, I) so ist darnach wegen $MP < MA$ stets:

$$MA - MP < PA < MA + MP.$$

Ersetzt man darin den Radius MA einmal durch den gleichgrossen Radius MX, das anderemal durch MY, so entsteht:

$$MX - MP < PA < MY + MP;$$

da also:

$$MX - MP = PX$$
$$MY + MP = PY,$$

so entsteht:

$$PX < PA < PY.$$

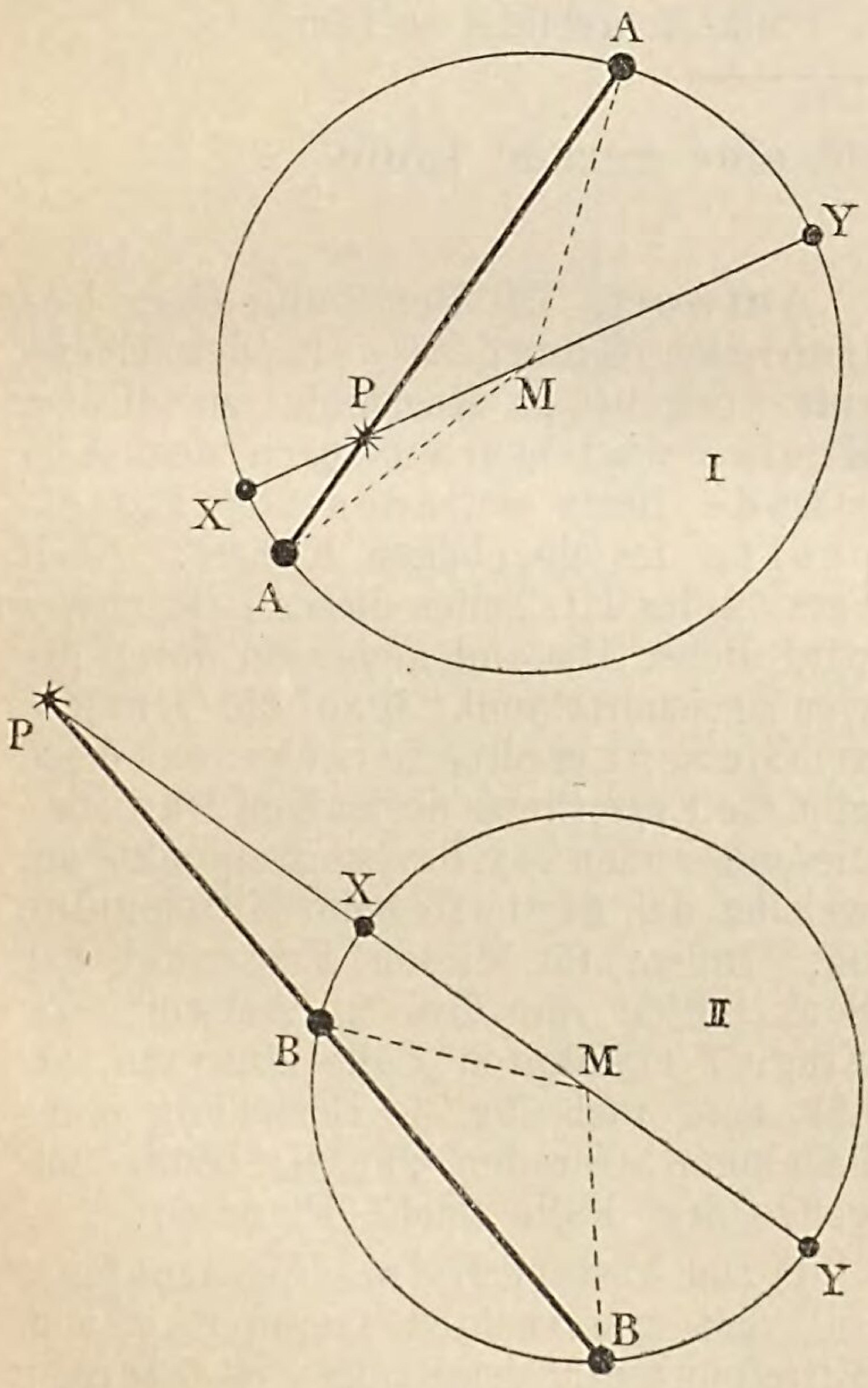
wird, dass aber dennoch:

$$PY - PX = \infty - \infty = XY$$

gleich dem Durchmesser des Kreises bleibt.

Erkl. 17a. Die Strecken PX und PY selbst werden als die beiden Abstände des Punktes P vom Kreise bezeichnet, und zwar wird allgemein wieder der kürzeste Abstand PX verstanden, wenn kurzweg vom Abstande eines Punktes von einem Kreise gesprochen wird. Ebenso war auch als Abstand eines Punktes von einer Geraden die senkrechte, nämlich die kürzeste Abstandsstrecke zwischen dem gegebenen Punkte und allen Punkten der Geraden bezeichnet worden.

Figur 5.



2) Liegt der Punkt P ausserhalb des Kreises (Figur 5, II), so ist nach demselben Satze wegen $MP > MB$ stets:

$$MP - MB < PB < MP + MB.$$

Ersetzt man darin wieder den Radius MB einmal durch MX, dann durch MY, so entsteht:

$$MP - MX < PB < MP + MY;$$

also wegen:

$$MP - MX = PX$$
$$MP + MY = PY$$

wieder wie oben:

$$PX < PB < PY.$$

Frage 9. Wie lässt sich das Ergebnis der vorigen Antwort in Worte fassen?

Erkl. 18. Rückt der Punkt P auf die Peripherie des Kreises selbst, so fällt der Inhalt der nebenstehenden Sätze zusammen mit dem in Antwort der Frage 5 über die Abstände der Kreispunkte untereinander gesagten: Der grösste Abstand wird gleich dem Durchmesser, der kleinste gleich Null.

Antwort. Für die beiden Fälle des vorigen Beweises lässt sich folgende zusammenfassende Aussage machen:

Satz 2. Von allen Punkten einer Kreislinie liegt einem gegebenen Punkte am fernsten derjenige, dessen Verbindungsstrecke mit diesem

Erkl. 19. Unter Benützung der in Erkl. 77 des I. Teiles enthaltenen Definition der „Abschnitte einer Strecke" kann man die nebenstehenden Sätze auch folgendermassen aussprechen:

Satz 2b. Der grösste und der kleinste unter allen Abständen zwischen einem gegebenen Punkte und den Punkten einer Kreislinie liegen auf derselben Geraden und bilden die beiden Abschnitte, in welche der Punkt den durch ihn bestimmten Durchmesser teilt.

Punkte den Kreismittelpunkt enthält — am nächsten derjenige, dessen Verbindungsstrecke mit diesem Punkte in ihrer Verlängerung durch den Kreismittelpunkt geht.

Oder:

Satz 2a. Die Abstände zwischen einem gegebenen Punkte und den Punkten eines Kreises sind sämtlich kleiner als der grössere und grösser als der kleinere derjenigen Abschnitte, welche auf der Zentralen des Punktes zwischen dem Punkte und den beiden Kreisschnittpunkten gebildet werden.

2) Ueber einen Kreis und eine gerade Linie.

Frage 10. Wonach wird die Beziehung einer beliebigen Geraden zu einer Kreislinie beurteilt?

Erkl. 20. Auch für die Beziehung einer nicht in der Ebene der gegebenen Kreislinie befindlichen Raumlinie zu diesem Kreise würde der Abstand vom Kreismittelpunkt massgebend sein; dazu tritt aber als zweites hinzu der Neigungswinkel dieser Geraden zur Ebene des gegebenen Kreises. (Siehe Seipp, Stereometrie.)

Erkl. 21. Da eine Gerade als Linie unbegrenzt ist, so kann sie jedenfalls nicht ihrer ganzen Erstreckung nach innerhalb der Kreislinie liegen. Diejenige Strecke auf der Geraden, welche innerhalb des Kreises liegt, heisst Sehne. Daher ist eine Sehne die Gesamtheit derjenigen Punkte einer Geraden, deren Abstand vom Kreismittelpunkt kleiner ist als der Radius.

Erkl. 22. Man sagt sowohl, die Gerade g berühre im Punkte B den Kreis, als auch, der Kreis berühre im Punkte B die Gerade g. Und nicht nur zwischen Kreis und gerader Linie, sondern auch zwischen irgend welchen Gattungen krummer Linien unter sich und mit der Geraden findet Berührung in einem Punkte statt, wenn die zwischen Kreis und Tangente stattfindenden Beziehungen erfüllt sind. (Vergl. Abschnitt A 7 b.)

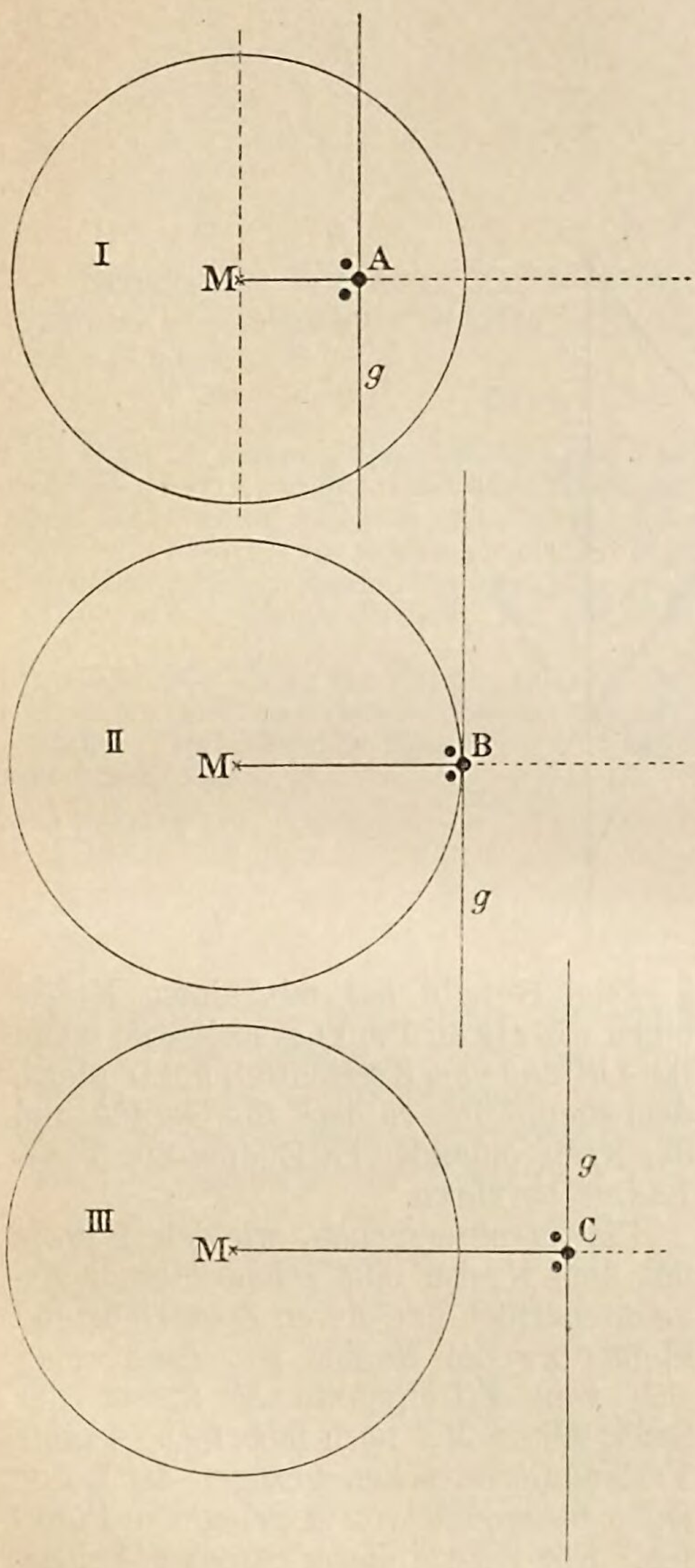
Erkl. 23. Nur in der sog. „analytischen Geometrie" findet auch eine weitere Untersuchung der Beziehung statt zwischen einem Kreise und einer Geraden, deren Zentralabstand grösser als der Radius ist. Man findet, dass wenn Schnittpunkte der beiden Linien in die Rechnung eintreten, dieselben wie sogenannte konjugiert imaginäre Grössen zu behandeln sind. (Vergl. Cranz, Lehrbuch der analytischen Geometrie.)

Antwort. Die Beziehung einer beliebigen Geraden g in der Ebene einer gegebenen Kreislinie zu diesem Kreise wird beurteilt nach dem Abstande dieser Geraden vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises. Nach Satz 52 des III. Teiles dieses Lehrbuches wird dieser Abstand gemessen durch die vom Kreismittelpunkt M auf die Gerade g gefällte senkrechte Strecke, und diese gibt die Entfernung desjenigen Punktes dieser Geraden vom Kreismittelpunkte an, welcher der nächste beim Mittelpunkte ist. Indem für diesen Fusspunkt der Senkrechten die drei in Antwort der Frage 7 erwähnten Fälle eintreten, erhält man auch für die Beziehung einer beliebigen Geraden zur Kreislinie folgende drei Fälle (siehe Figur 6):

1) Der Abstand MA des Fusspunktes A auf der untersuchten Geraden g vom Mittelpunkte M des Kreises ist kleiner als der Radius. Dann liegt der Fusspunkt A, also damit auch ein Teil der Geraden g, innerhalb des Kreises, und es entsteht eine Sehne; oder wenn der Abstand des Punktes A von M gleich Null ist, entsteht ein Durchmesser.

2) Der Abstand MB des Fusspunktes B auf der untersuchten Geraden g vom Kreismittelpunkte ist gleich dem Radius. Dann liegt der Fusspunkt B zu-

Figur 6.



gleich auf der Geraden g und auf der Peripherie des Kreises. Alle andern Punkte der Geraden g aber liegen nach dem genannten Satze 53 weiter von M entfernt als der Fusspunkt B, sie liegen also sämtlich ausserhalb des Kreises. Da der Punkt B der einzige Punkt der Geraden g ist, welcher auf dem Kreise liegt, so sagt man, die Gerade g berühre den Kreis in dem Punkte B: die Gerade g heisst Tangente, Punkt B heisst Berührungspunkt.

3) Der Abstand MC des Fusspunktes C auf der untersuchten Geraden g vom Kreismittelpunkte ist grösser als der Radius. Dann liegt C ausserhalb des Kreises; und da alle andern Punkte von g noch weiter von M entfernt sind, so liegt die ganze Gerade g ausserhalb des Kreises. Diese Lagenbeziehung zwischen einer Geraden und einem Kreise, bei welcher diese beiden Linien keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, wird nicht durch eine besondere Benennung der Geraden bezeichnet.

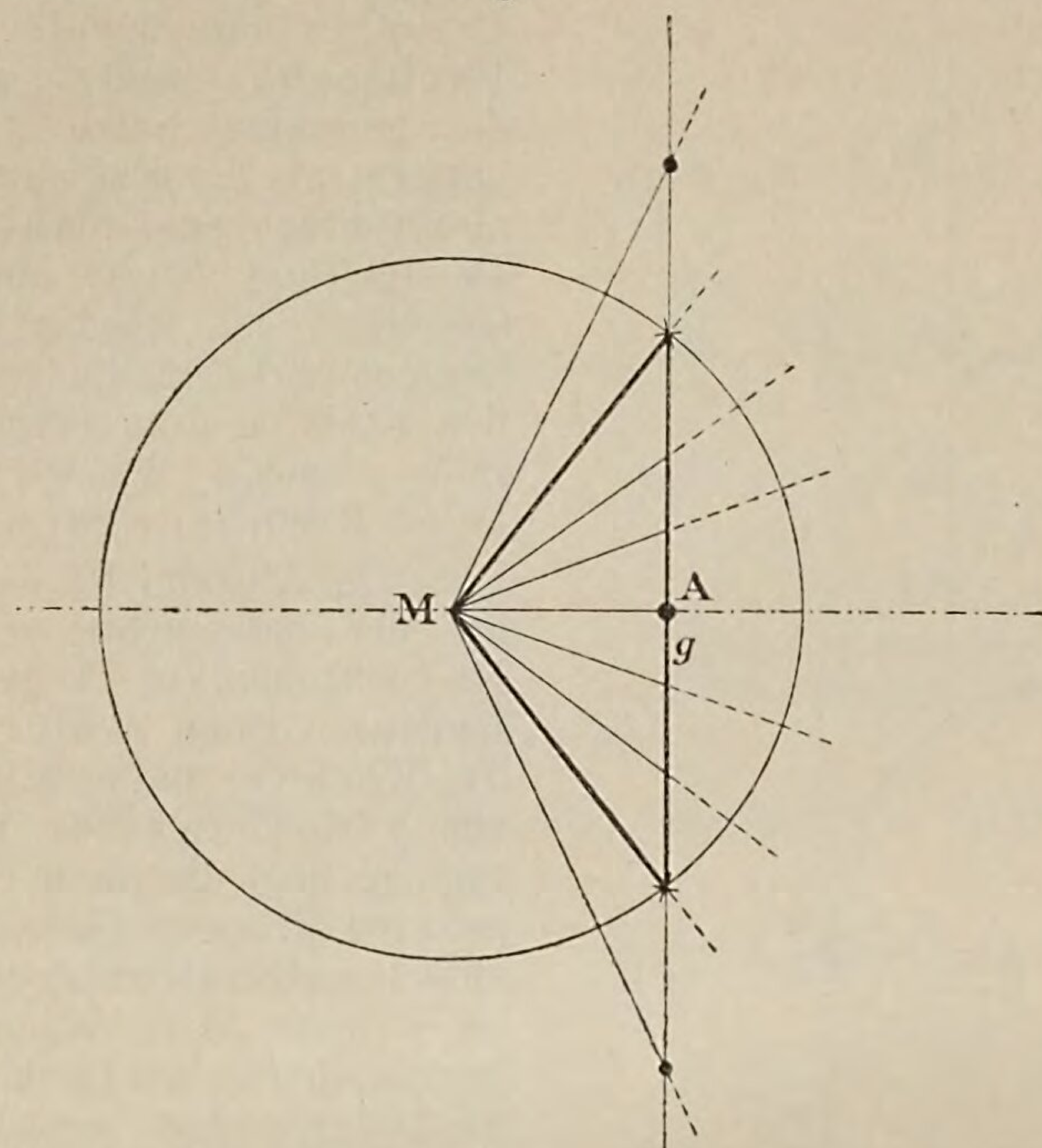
a) Ueber den Kreis und eine denselben schneidende Gerade.

Frage 11. Wieviele Punkte kann eine gerade Linie mit einem Kreise gemeinsam haben?

Erkl. 24. Es wird sich im folgenden zeigen, dass der eine Punkt B, welchen die Tangente mit dem Kreise gemeinsam hat, als ein Doppelpunkt oder für zwei zusammenfallende Punkte gilt. Unter Bezugnahme auf Erkl. 23 rechnet man daher in jedem der drei betrachteten Fälle

Antwort. Nach der vorigen Antwort kann eine Gerade mit einem Kreise gar keinen Punkt gemeinsam haben, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkte grösser ist als der Radius, so dass die ganze Gerade ausserhalb des Kreises verläuft.

Figur 7.



immer mit zwei Schnittpunkten zwischen Gerade und Kreis: entweder zwei getrennten reellen, oder zwei in einen Berührungspunkt zusammenfallenden, oder zwei (konjugiert) imaginären Schnittpunkten.

Erkl. 25. Nach Erkl. 145 und 148 des III. Teiles dieses Lehrbuches sind je zwei gleichlange schiefe Strecken von einem Punkte nach einer Geraden zur Senkrechten symmetrisch, bilden mit ihr und der gegebenen Geraden beiderseits gleiche Winkel, und schneiden auf der Geraden gleichlange Stücke ab beiderseits vom Fusspunkte der Senkrechten. Daher kann man auch von einem Punkte nach einer Geraden nur zwei schiefe Strecken von gegebener Länge ziehen.

Erkl. 26. Der Radius eines Kreises wird gewöhnlich mit dem Buchstaben r bezeichnet. Wenn der Buchstabe r als Masszahl schlechtweg gebraucht wird, so versteht man darunter die Längenanzahl einer Strecke, welche gleich dem Radius des betrachteten Kreises ist.

Eine Gerade hat mit einem Kreise einen einzigen Punkt gemeinsam, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkte gleich dem Radius ist, so dass die Gerade und der Kreis einander im Endpunkte dieses Radius berühren.

Um zu untersuchen, wieviele Punkte mit dem Kreise eine solche Gerade gemeinschaftlich hat, deren Zentralabstand kleiner als der Radius ist, denke man sich vom Mittelpunkte M ausser der Senkrechten MA noch mehrfache schiefe Verbindungsstrecken gezogen nach den auf g beiderseits von A gelegenen Punkten. Für je zwei dieser Strecken beiderseits MA und nach Satz 1 ebenso für den Kreis selbst ist MA Symmetrieachse. Jede folgende dieser schiefen Verbindungsstrecken ist aber nach Satz 53 im III. Teile dieses Lehrbuches länger als die vorhergehende, und beiderseits wachsen dieselben unbegrenzt, also muss auf der Geraden g beiderseits vom Punkte A ein einziger Punkt sein, dessen Verbindungsstrecke mit M gleich dem Radius ist, und zwar sind die beiden Punkte achsig-symmetrisch zu MA. Sie haben

von M den Abstand r, liegen auf g, sind also Schnittpunkte von Gerade und Kreis.

Die ganze Gerade g heisst eine Sekante des Kreises, die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten heisst Sehne.

Frage 12. Was kann man rücksichtlich des Vorstehenden von einer Sekante aussagen?

Erkl. 27. Wenn umgekehrt ein Kreis mehr als zwei Punkte mit einer Geraden gemeinsam haben sollte, so müsste er selbst mit dieser Geraden identisch werden als ein Kreis mit unendlich grossem Radius und unendlich fernem Mittelpunkt. (Vergl. die Erkl. 111, 314, 333.)

Erkl. 28. Ueber den Winkel, unter welchem ein Kreis und eine Gerade einander schneiden können, vergleiche man Erkl. 52, 56, 65 bis 67 und Satz 41a.

Antwort. Von einer Sekante oder einer den Kreis schneidenden Geraden kann man auf Grund der vorigen Antwort folgendes aussagen:

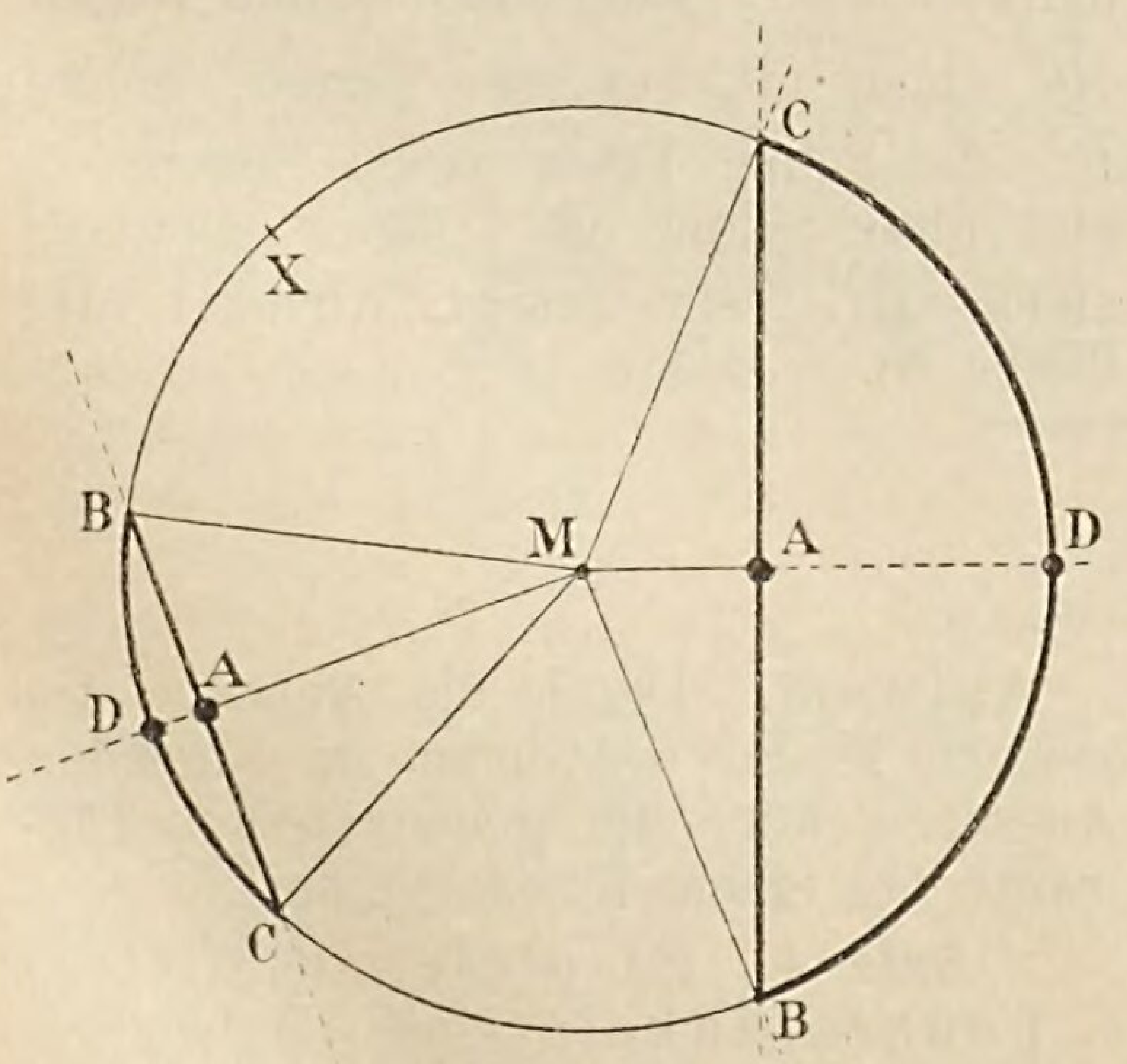
Satz 3. Eine Sekante trifft den Kreis in zwei Punkten, welche achsig-symmetrisch sind für den zur Sekante senkrechten Durchmesser.

Satz 3a. Eine Gerade und ein Kreis können nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben.

Satz 3b. Wenn eine Gerade und ein Kreis einen Schnittpunkt gemeinsam haben, so müssen sie auch einen zweiten Schnittpunkt haben.

Frage 13. In welcher Beziehung stehen die Elemente des von einer Sehne als Grundseite und dem Kreismittelpunkt als Spitze gebildeten Dreiecks zur Kreislinie?

Figur 8.



Antwort. In dem Dreieck BCM in Figur 8 ist Grundseite die Sehne BC. Da deren Endpunkte B, C Kreispunkte sind, so bestimmt nach Antwort der Fragen 2 bis 4 die Sehne BC zwei Kreisbogen, einen über und einen unter der Grösse eines Halbkreises, nämlich:

$$\text{die Bogen } \widehat{BDC} < 180^0 < \widehat{CXB}$$

Da zu MA als Symmetrieachse die Punktepaare B, C symmetrisch sind, so fällt beim Umklappen um diesen Durchmesser als Achse nicht nur die Grundseite des Dreiecks selbst, sondern auch jeder der durch dieselbe bestimmten Kreisbogen wieder in seine vorherige Lage.

Ferner sind wegen der gleichen Abstände aller Kreispunkte vom Mittelpunkt die Dreiecksseiten $MB = MC$, also das Dreieck MBC ein gleichschenkliges Dreieck. Die gleichen Schenkel

Erkl. 29. In Figur 8 ist auf zweifache Weise ein Dreieck MBC, bezw. eine Sehne BC eingezeichnet: einmal mit stumpfem, einmal mit spitzem Winkel an der Spitze M. Daher ist der Bogen $\widehat{BDC}$ einmal grösser, das anderemal kleiner als 90°. Symmetrieachse ist MA, und beim Umklappen um MA fällt B auf C, MB auf MC, AB auf AC, Bogen $\widehat{BD}$ auf $\widehat{CD}$; die Strecke MAD aber behält ihren Platz bei, es ist also A Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und ebenso D Mittelpunkt von $\widehat{BC}$, die Linie MAD ist Halbierungslinie des Winkels BMC.

Also ist nicht nur $\widehat{DB} = \widehat{DC}$, sondern auch $\sphericalangle DMB = \sphericalangle DMC$ — entsprechend dem Lehrsatze 19 und 20 im II. Teile dieses Lehrbuches, wornach zu gleichen Kreisbogen auch gleiche Mittelpunktswinkel gehören, und umgekehrt.

sind Radien des Kreises; der Winkel an der Spitze hat seinen Scheitel im Kreismittelpunkte M, ist also ein Mittelpunktswinkel oder Zentriwinkel. (Siehe Abschnitt A 6 im II. Teile dieses Lehrbuches)

Frage 14. Zu welchen Ergebnissen führt eine Umdrehung des Dreiecks MBC (Fig. 9) um den Kreismittelpunkt M als Umdrehungsmittelpunkt?

Erkl. 30. Auch die ganze von den Radien MB und MC mit dem Kreisbogen $\widehat{BC}$ begrenzte Fläche überstreicht bei der Umdrehung dieselbe Kreisfläche, und es bleibt ebenso die von der Sehne $\overline{BC}$ und dem Bogen $\widehat{BDC}$ oder $\widehat{CXB}$ begrenzte Fläche stets gleichgross. Eine solche von zwei Radien und einem der zugehörigen Kreisbogen begrenzte Fläche heisst Sektor oder Kreisausschnitt, eine von einer Sehne und einem der zugehörigen Kreisbogen begrenzte Fläche heisst Segment des Kreises oder Kreisabschnitt. Es unterscheidet sich also der Kreisausschnitt vom Kreisabschnitt um das gleichschenklige Dreieck MBC über der gemeinsamen Sehne BC.

Antwort. Wenn das Dreieck MBC um den Kreismittelpunkt beliebig weit herumgedreht wird, so durchlaufen seine Schenkel MB und MC die verschiedenen Lagen der Kreisradien, die Endpunkte B und C selbst durchlaufen die Kreisperipherie, die Kreisbogen $\widehat{BDC}$, sowie $\widehat{CXB}$ verbleiben stets Bogen desselben Kreises, $\overline{BC}$ bleibt Sehne.

In jeder neuen Lage deckt also der Winkel BMC einen gleichgrossen Mittelpunktswinkel, jeder der beiden Bogen $\widehat{BC}$ einen gleichgrossen Bogen, Sehne $\overline{BC}$ die Sehne dieses neuen Bogens — und diese Sehne muss daher ebenfalls gleich $\overline{BC}$ sein (vergl. Antwort der Frage 5).

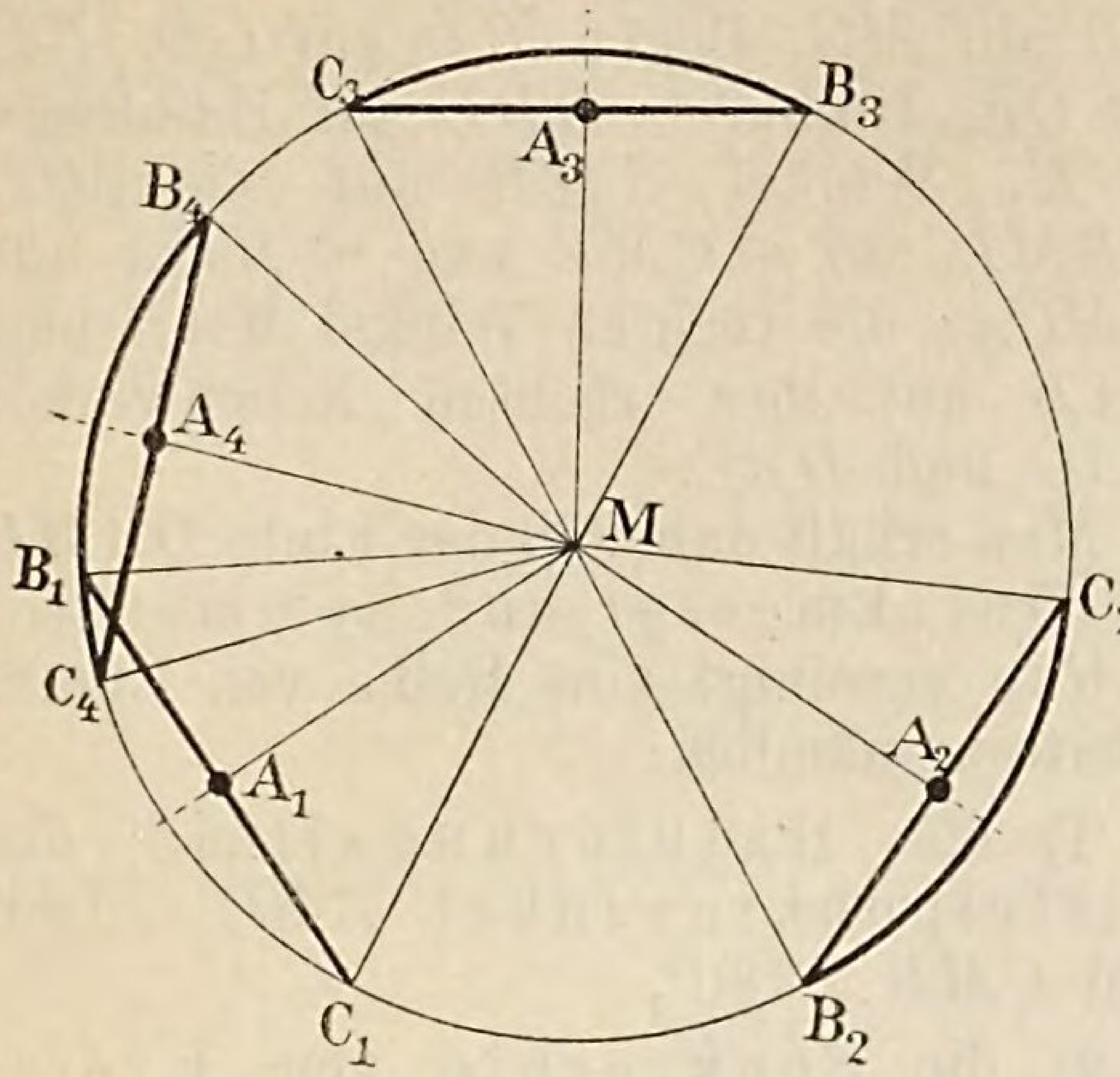
Frage 15. Welche Aussagen über die Beziehung zwischen Mittelpunktswinkel, Sehne und Bogen u. s. w. ergeben sich aus der Umdrehung der Figur $MBCD$ um den Kreismittelpunkt?

Erkl. 31. Dass zu gleichen Mittelpunktswinkeln gleiche Bogen gehören und umgekehrt, war schon in den Lehrsätzen 19 und 20 des II. Teiles dieses Lehrbuches ausgesprochen worden. Zum Beweise in der Antwort der Frage 47 daselbst war ebenfalls die Deckung bei der Umdrehung um den Kreismittelpunkt benützt worden.

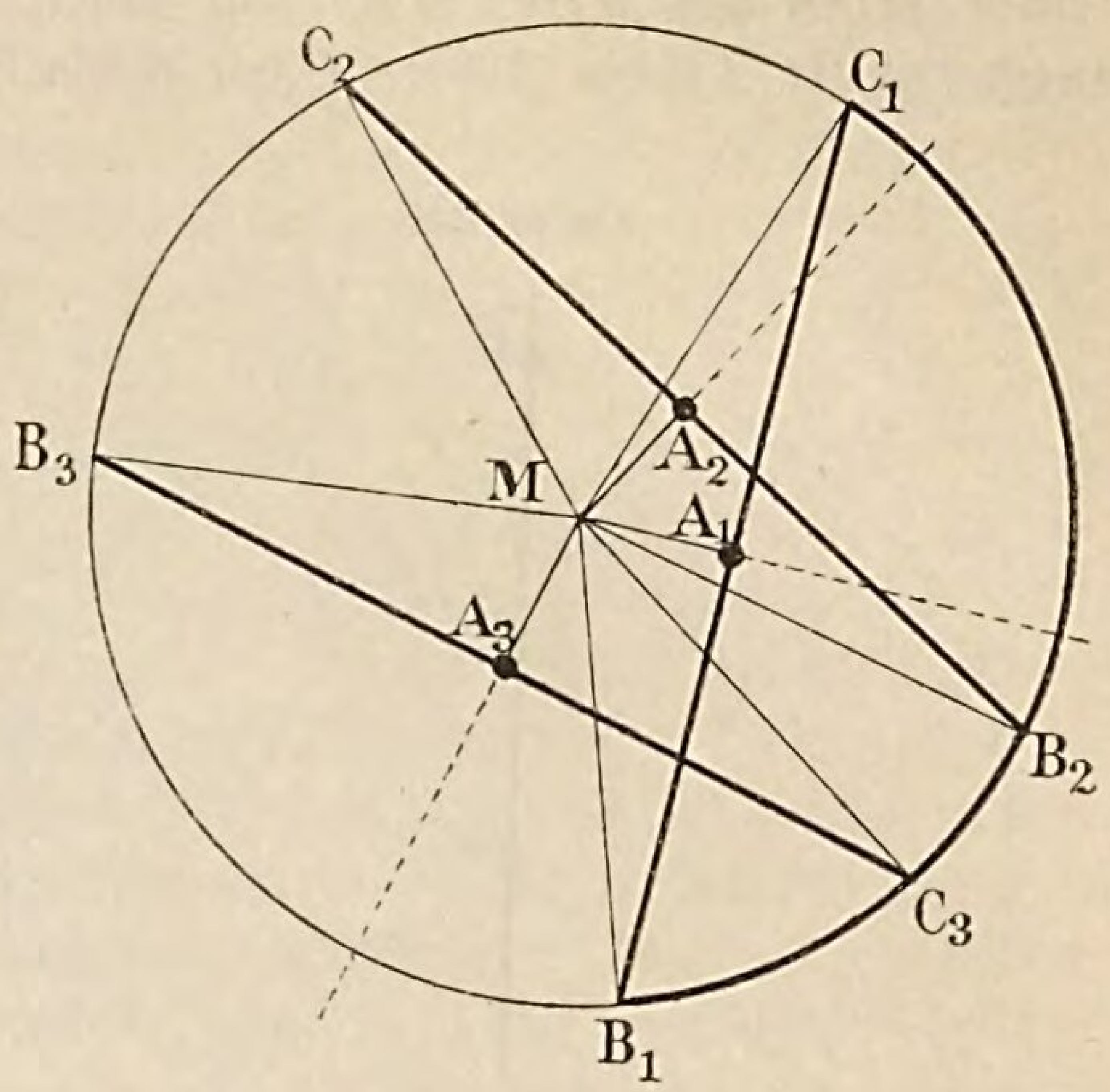
Antwort. Durch die Antwort der vorigen Frage wird man zu folgenden Aussagen über die geometrischen Elemente bei einem Kreise geführt:

Satz 4. Zu gleichen Mittelpunktswinkeln eines Kreises gehören auch zwei gleiche Kreisbogen, gleiche Sehnen, gleiche Sektoren und Segmente.

Figur 9 I.



Figur 9 II.



Erkl. 32. Zu der einen Sehne BC gehören

die beiden Mittelpunktswinkel:

$\sphericalangle BMC$ (hohler W.)

und $\sphericalangle CMB$ (erhabener W.),

die beiden Kreisbogen:

$\widehat{BDC} < 180$ Bogengrade und $\widehat{CXB} > 180^0$,

die beiden Sektoren:

$BMCDM <$ Halbkreisfläche $< CMBXC$

und die beiden Segmente:

$BACDB <$ Halbkreisfläche $< CABXC$.

Erkl. 32a. Bei wachsender Sehne BC

nehmen zu:

der hohle Mittelpunktswinkel $BMC < 180^0$,

der Kreisbogen $\widehat{BDC} < 180^0$,

der Sektor $BMCDM$,

das Segment $BACDB$;

nehmen ab:

der überstumpfe Mittelpunktswinkel $CBM > 180^0$,

der Kreisbogen $\widehat{CXB} > 180^0$,

der Sektor $CMBXC$,

das Segment $CABXC$.

Und umgekehrt:

Satz 4a. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören auch zwei gleiche Mittelpunktswinkel, gleiche Sehnen, gleiche Sektoren und Segmente.

Oder:

Satz 4b. Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören auch zwei gleiche Mittelpunktswinkel, zwei gleiche Kreisbogen, gleiche Sektoren und Segmente.

Und endlich folgt in Berücksichtigung der Antwort der Frage 5:

Satz 4c. Zu einem grösseren Mittelpunktswinkel oder Kreisbogen, bezw. Sehnenausschnitt eines Kreises, gehören — unterhalb 180^0 grössere — oberhalb 180^0 kleinere — Sehnen, bezw. Zentriwinkel oder Kreisbogen — und umgekehrt.

Die grösste Sehne ist der Durchmesser.

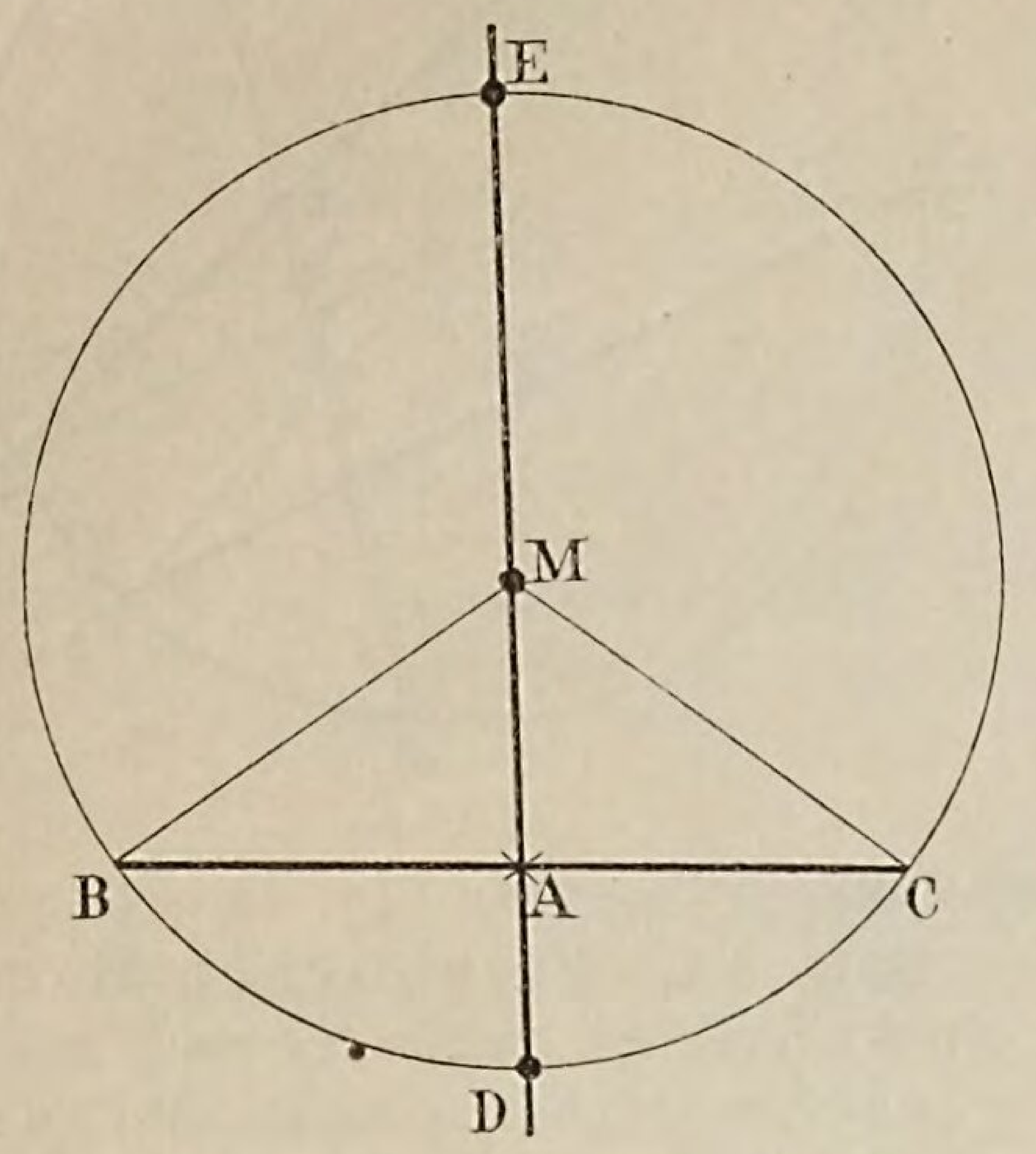
Frage 16. Zu welchen Ergebnissen führt eine Umklappung des Dreiecks MBC um die Senkrechte MA als Symmetrieachse?

Antwort. Wenn die Figur 10 um den Durchmesser $DAME$ als Symmetrieachse umgeklappt wird, so behält der Durchmesser $DAME$ und jeder seiner Punkte die vorherige Lage bei, die Achsensenkrechte BAC gelangt in die-

Erkl. 33. Auch die Sektoren und Segmente beiderseits der Symmetrieachse decken sich mit den symmetrisch kongruenten:

Sektor $MBDC$ und $MBEC$ mit sich selbst, Sektor MDB mit MDC, MEB mit MEC; Segment $DCABD$ u. $EBACE$ mit sich selbst.

Figur 10.



Erkl. 34. Infolge des Zusammentreffens der nebenstehend genannten vier Eigenschaften in dem Durchmesser DE kann man jeder Linie, welche eine derselben hat, alle zuschreiben.

Im ganzen kommt in Betracht, dass eine Linie durch den Mittelpunkt geht, den Mittelpunktswinkel halbiert, die Sehne senkrecht trifft, die Sehne oder den Bogen halbiert. Wenn man daher irgend eine Linie auswählt, welche zwei dieser Eigenschaften schon besitzt, so kann man auf Grund nebenstehender Antwort behaupten, dass sie auch die beiden andern Eigenschaften besitze.

selbe Lage, Punkt B nach C, Strecke MB auf MC, Bogen BD auf CD, BE auf CE, Halbkreis DBE auf Halbkreis DCE, Winkel AMB auf $\sphericalangle AMC$, $\sphericalangle BME$ auf $\sphericalangle CME$ und $\sphericalangle MBA$ auf $\sphericalangle MCA$; die rechten Winkel MAB und DAB auf ihre rechten Nebenwinkel MAC und DAC.

Man erhält daher in der Linie $DAME$ als Durchmesser und Symmetrieachse vereinigt eine Reihe von Eigenschaften, nämlich:

1) die Halbierungslinie der Mittelpunktswinkel $BMC < 180^0$ und $CMB > 180^0$,

2) die Senkrechte vom Kreismittelpunkt auf die Sehne BC,

3) die Mittelsenkrechte der Sehne BC,

4) die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Mitte der Sehne BC oder der Bogen BDC bezw. CEB — oder dieser Mittelpunkte untereinander.

Man kann daher die in den Sätzen 57 des III. Teiles dieses Lehrbuches zwischen Spitze, Scheitelwinkel und Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks ausgesprochenen Beziehungen vollständig übertragen auf die Beziehungen zwischen Mittelpunkt, Mittelpunktswinkel und Sehne eines Kreises.

Frage 17. Welche Gestalt nehmen nach voriger Antwort die Sätze über das gleichschenklige Dreieck an, wenn dieselben auf den Kreis übertragen werden?

Erkl. 35. Man beachte wohl, dass die im vorigen Teile dieses Lehrbuches angewendeten Konstruktionen eines gleichschenkligen Dreiecks (siehe die Antwort der Frage 98), einer Winkelhalbierenden (Aufgabe 169 am Schlusse des III. Teiles), einer Mittelsenkrechten (Aufgabe 170 daselbst), einer Senkrechten auf eine Gerade aus gegebenem Punkte (Aufgabe 171) und in gegebenem Punkte (Aufgabe 172) und andere — schon aufgebaut waren auf denjenigen Einzelfällen der nebenstehenden Lehrsätze, welche sich bei deren einfachstem Auftreten eben beim gleichschenkligen Dreiecke zeigten. Denn zur Halbierung eines Winkels

Antwort. In der Uebertragung auf die Beziehungen zwischen Kreis, Sehne und Bogen erhält man aus den Sätzen 57 des III. Teiles dieses Lehrbuches die folgenden:

Satz 5. Die Halbierungslinie eines Mittelpunktswinkels halbiert auch die zugehörigen Bogen und ist Mittelsenkrechte der zugehörigen Sehne.

Satz 5a. Die Senkrechte vom Kreismittelpunkt auf eine Sehne halbiert die Sehne, sowie die beiden zugehörigen

z. B. wurden die Schenkel desselben zu den Radien MB und MC benützt und die Senkrechte von M auf die zugehörige Sehne BC konstruiert. Und ebenso in den andern der aufgezählten Beispiele.

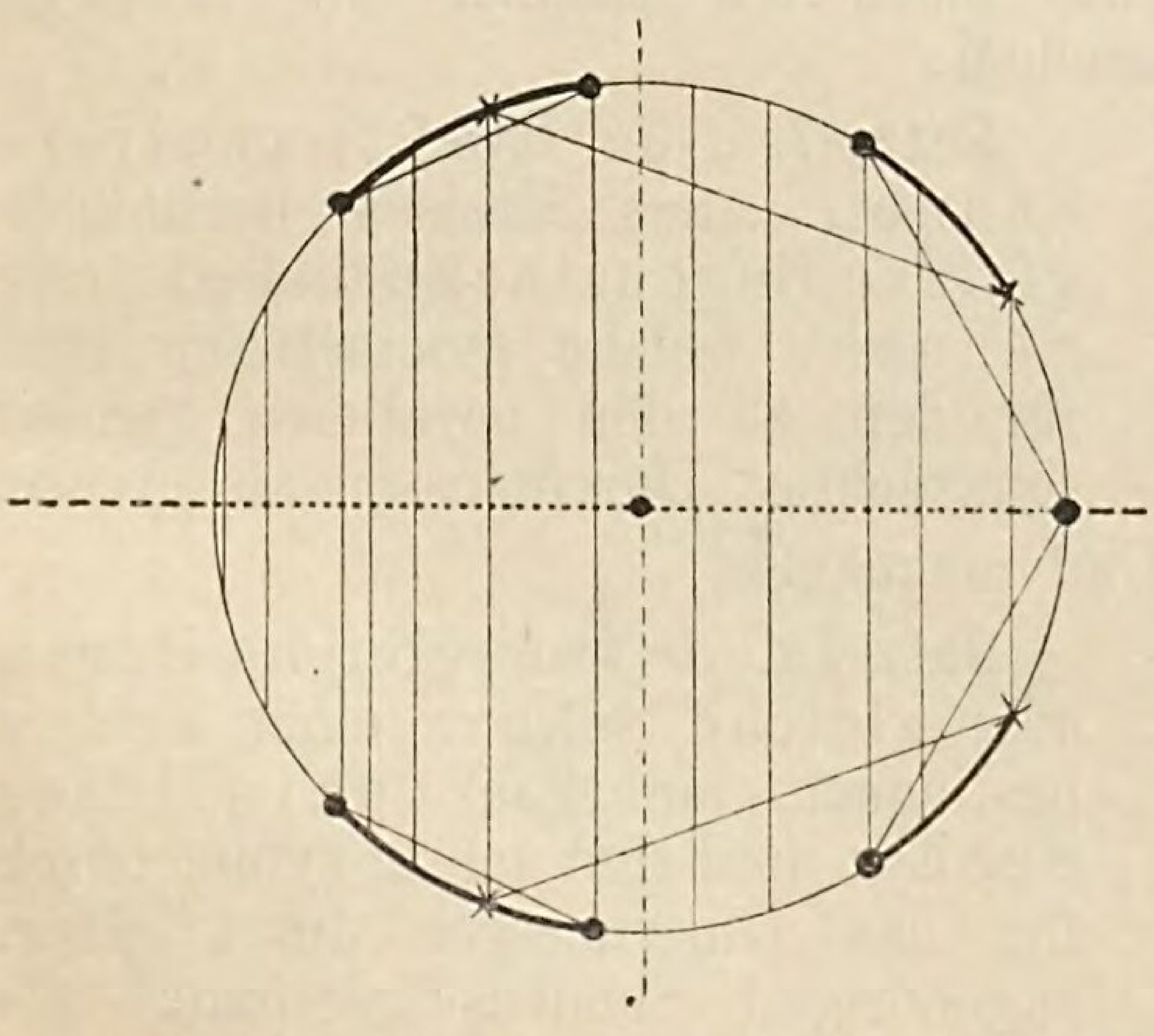
Kreisbogen und Mittelpunktswinkel.

Satz 5b. Die Mittelsenkrechte einer Sehne geht durch den Kreismittelpunkt und halbiert die beiden zugehörigen Kreisbogen und Mittelpunktswinkel.

Satz 5c. Die Verbindungslinie — entweder des Kreismittelpunktes mit dem Mittelpunkt einer Sehne, bezw. eines dazu gehörigen Kreisbogen — oder zweier dieser Mittelpunkte unter sich — ist senkrecht zur Sehne, halbiert die beiden zugehörigen Mittelpunktswinkel und geht gleichzeitig durch die Mittelpunkte des Kreises, der Sehne, sowie der beiden zugehörigen Kreisbogen.

Frage 18. Welche Ergebnisse erhält man aus den vorigen Sätzen 5 bis 5c für mehrere zum gleichen Durchmesser senkrechte Sehnen?

Figur 11.



Erkl. 36. In Figur 11 ist eine grössere Zahl paralleler Sehnen mit ihrem gemeinsamen Durchmesser und einigen symmetrisch entsprechenden Bogen und Sehnen hervorgehoben; in Figur 12 dagegen ist an einem einzelnen Paare paralleler Sehnen zu erkennen, welche einander entsprechenden Elemente entstehen.

Erkl. 37. Aus Figur 11 ist auch zu ersehen, dass die nebenstehende Ueberlegung ihre Gültigkeit behält, wenn als einer der End-

Antwort. Wenn auf demselben Durchmesser einer Kreislinie mehrere Sekanten senkrecht stehen, so ist für jede der entstehenden Sehnen nach dem vorigen Satze 5a jener Durchmesser die Mittelsenkrechte. Auf ihm liegen daher alle Mittelpunkte sämtlicher zu ihm senkrechten, also unter sich parallelen Sehnen.

Beim Umklappen um den Durchmesser als Symmetrieachse vertauschen sodann die zwei entgegengesetzten Endpunkte jeder solchen senkrechten Sehne ihre Lage miteinander — und dadurch kommt der durch ihre Gesamtheit gebildete Halbkreis zur Deckung mit dem andern Halbkreis. Dabei kommen einzeln zur Deckung je zwei solche Kreisbogen, welche durch entsprechende Endpunkte begrenzt werden, also je zwei zwischen einem Paare paralleler Sehnen liegende Bogen. Folglich müssen nicht nur je zwei solche Bogen selbst kongruent sein, sondern auch die ihre Endpunkte geradlinig verbindenden Sehnen müssen zur Deckung kommen. Demnach sind auch solche Sehnen, welche

punkte der symmetrischen Bogen oder Sehnen der Kreisschnittpunkt des Durchmessers selbst gewählt wird. Dabei kommt man zurück auf Figur 10 und findet, dass daselbst auch die Sehnen BD und CD gleichlang werden und in D gleiche Winkel mit dem Durchmesser DE bilden, dass sie also symmetrisch sind zu demjenigen Durchmesser, welcher durch ihren Schnittpunkt geht, oder welcher ihren Winkel halbiert, oder welcher ihre zugehörige Sehne BC senkrecht halbiert.

die Kreisschnittpunkte zweier parallelen Sehnen verbinden, symmetrische Strecken, d. h. sie sind gleichlang, schneiden einander auf der Achse und bilden mit derselben beiderseits gleiche Winkel.

Frage 19. Welche Aussagen über die Beziehung zwischen parallelen Sehnen und der Kreislinie ergeben sich aus der in voriger Antwort der Frage 18 angestellten Ueberlegung?

Antwort. Ueber parallele Sehnen in einem Kreise kann man folgende Aussagen machen:

Satz 6. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen sämtlich auf einer Geraden, nämlich dem Durchmesser, welcher ihre gemeinsame Mittelsenkrechte ist.

Oder:

Satz 6a. Jeder Durchmesser halbiert sämtliche zu ihm senkrechten Sehnen.

Ferner kann man über jedes Paar von parallelen Sehnen die Aussage machen:

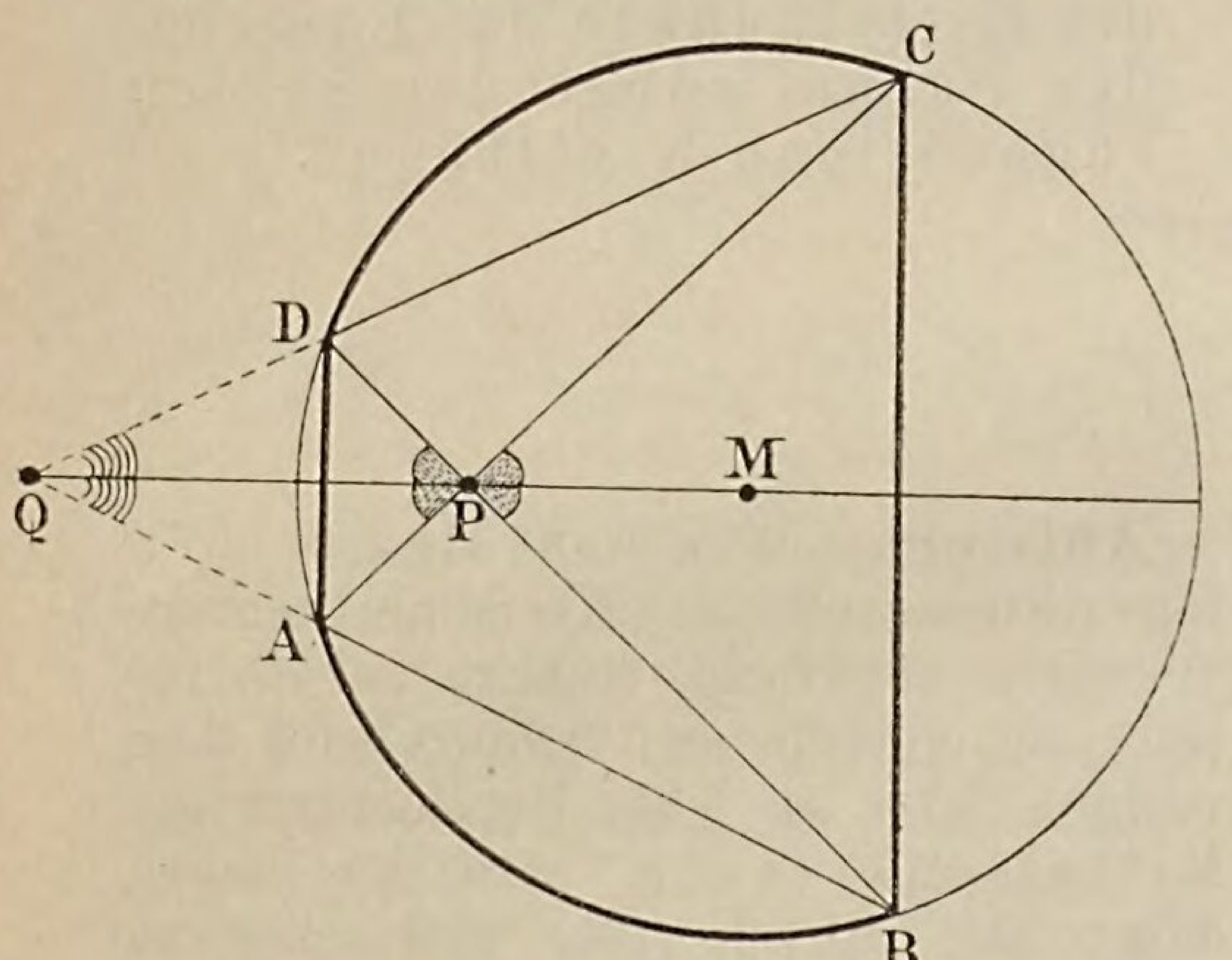
Satz 7. Je zwei parallele Sehnen eines Kreises bestimmen gleiche Bogenstücke und gleiche Sehnen, welche symmetrisch sind für den zu den parallelen Sehnen senkrechten Durchmesser als Achse.

Und umgekehrt:

Satz 7a. Je zwei gleiche Bogen oder gleiche Sehnen eines Kreises bestimmen ein Paar paralleler Sehnen und sind achsig-symmetrisch für den Durchmesser durch ihren zugehörigen Sehnenschnittpunkt als Achse.

Dabei kann der Sehnenschnittpunkt sowohl ausserhalb des Kreises liegen, wie Q in Figur 12 als Schnittpunkt der gleichen Sehnen AB und DC, oder innerhalb des Kreises, wie P als Schnittpunkt der gleichen Sehnen AC und DB.

Figur 12.



Erkl. 38. In Figur 12 ist nach dem Nebenstehenden:

$$\text{Bogen } \widehat{AB} = \widehat{DC},\ \widehat{ABC} = \widehat{DCB}$$

$$\text{und } \widehat{DAB} = \widehat{ADC},$$

$$\text{Sehne } \overline{AB} = \overline{DC} \text{ und } \overline{AC} = \overline{BD};$$

die Verbindungslinie der Schnittpunkte P und Q geht durch den Kreismittelpunkt, halbiert die Bogen $\widehat{AD}$ und $\widehat{BC}$ und ist Mittelsenkrechte der Sehnen $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$.

Ferner sind die Winkel $AQM = DQM$
und $\sphericalangle APQ = DPQ = BPM = CPM$
und $\sphericalangle APM = DPM = BPQ = CPQ$.

Ebenso wegen der Symmetrie auch:
$\sphericalangle BAC = BDC$ und $\sphericalangle ABD = ACD$.

Erkl. 39. Zum Beweise des nebenstehenden Satzes 7a verbinde man die Endpunkte B und C der gleichen Bogen oder Sehnen und klappe die

Figur um die Mittelsenkrechte von BC um. Da letztere ein Durchmesser sein muss, so fällt der Kreisbogen CD jedenfalls auf einen gleichlangen Kreisbogen des andern Halbkreises, also Endpunkt D auf Endpunkt A; demnach ist AD Achsensenkrechte ebenso wie BC, und folglich $AD \parallel BC$. Ferner fällt Strecke $\overline{CD}$ auf Strecke $\overline{BA}$ und Bogen $\widehat{CD}$ auf Bogen $\widehat{BA}$, erstere auch in ihrer Verlängerung, folglich muss der Schnittpunkt von CD und BA Achsenpunkt sein.

Frage 20. Welche Folgerungen lassen sich aus den Antworten der Fragen 14 bis 19 entnehmen in Bezug auf den Abstand einer Sehne vom Kreismittelpunkt?

Antwort. Der Abstand einer Sehne vom Kreismittelpunkte wird gemessen durch die vom Mittelpunkt auf die Sehne gefällte senkrechte Strecke, ist also ein Stück der Mittelsenkrechten der Sehne.

1) Bei der in Antwort der Frage 14 durchgeführten beliebigen Umdrehung des Dreiecks MBC in Fig. 8 und 9 um den Mittelpunkt M überstreicht dieser Abstand MA selbst eine Kreisfläche; es bleibt also bei der Umdrehung gleichzeitig mit Bogen $\widehat{BC}$ auch die Sehne $\overline{BC}$ und ihr Abstand MA vom Mittelpunkt stets gleichgross, während die Sehne $\overline{BC}$ die Lagen aller der gleichgrossen Sehnen des Kreises durchläuft.

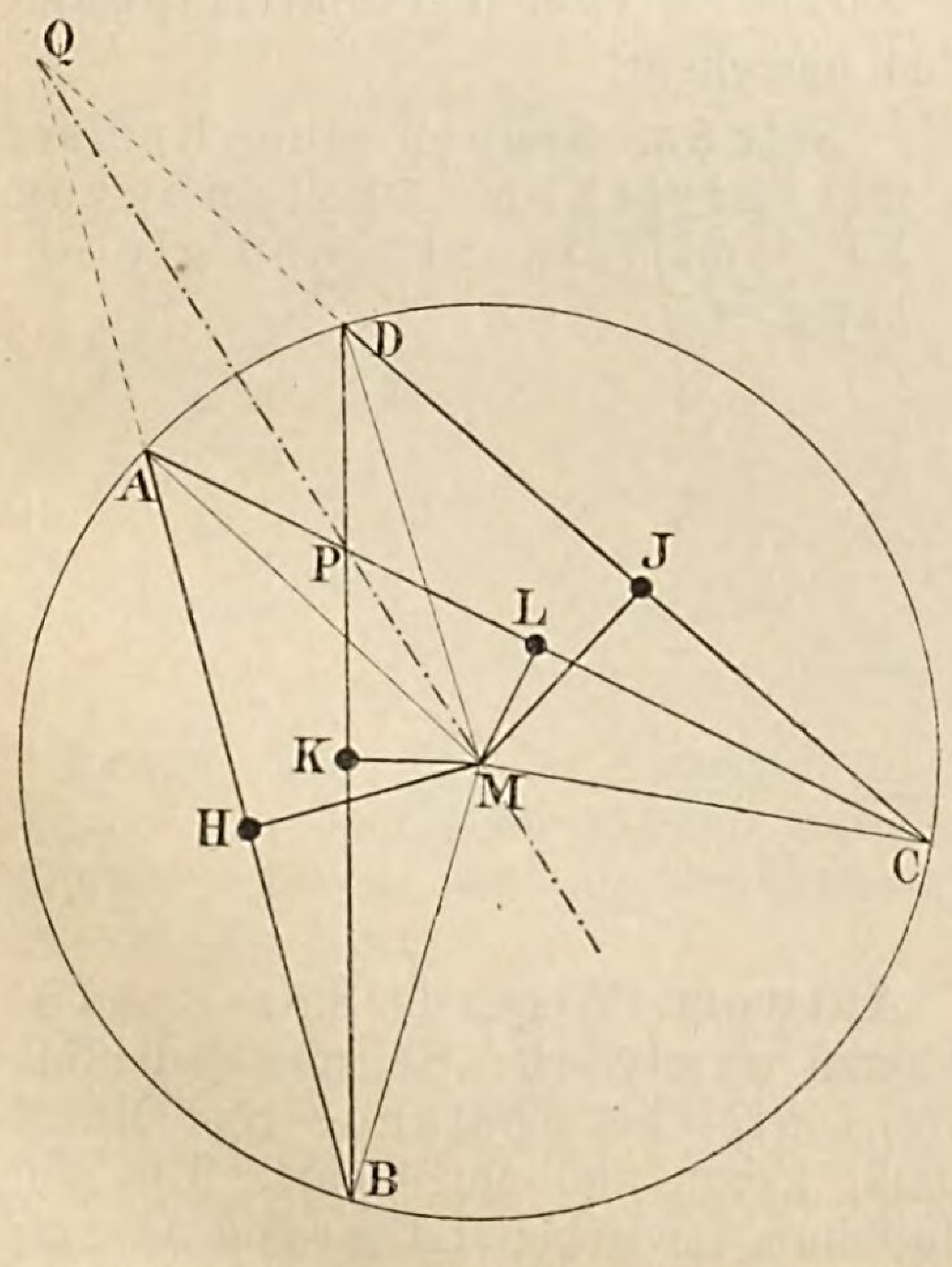
2) Von den vielen parallelen Sehnen in Figur 11 sind wegen der Symmetrie zu derjenigen unter ihnen, welche als Durchmesser durch den Kreismittelpunkt geht, je zwei solche einander gleich, welche auf dem gemeinschaftlichen senkrechten Durchmesser gleichgrosse Strecken beiderseits vom Mittelpunkt abschneiden.

3) Bei der in Antwort der Frage 18 durchgeführten Umklappung der gleichen Sehnen AB und DC bezw. AC und DB in Figur 12 und 13 um den Durchmesser MPQ kommen zur Deckung diese Sehnen, also auch ihre Mittelpunkte H und J bezw. K und L, und daher auch ihre Abstandsstrecken MH und MJ bezw. MK und ML.

4) Sind ganz allgemein AB und CD in Figur 13 zwei gleichgrosse Seh-

Erkl. 40. Aus der im ersten Abschnitt der nebenstehenden Antwort angestellten Ueberlegung lässt sich auch umgekehrt die Folgerung ziehen, dass je zwei gleichgrosse Sehnen eines Kreises durch Umdrehung zur Deckung gebracht werden können — und zwar nach Satz 37 des III. Teiles durch Umdrehung um einen Winkel, welcher dem Nebenwinkel der zur Deckung kommenden Richtungen beider Sehnen gleich ist.

Figur 13.



Erkl. 41. Um die im zweiten Abschnitt der nebenstehenden Antwort angestellte Ueberlegung auch auf zwei beliebige, also noch nicht parallele gleiche Sehnen anwenden zu können, könnte man die eine davon nach Erkl. 40 erst

soweit herumdrehen, dass sie auf dem zur andern senkrechten Durchmesser ebenfalls senkrecht stünde, — und dann in gleicher Weise schliessen.

Erkl. 42. In Figur 13 sind in Anlehnung an Figur 12 zwei Paare gleicher Sehnen eingezeichnet, wovon das eine den Schnittpunkt ausserhalb (Q), das andere innerhalb (P) des Kreises hat. Für letzteres wären die vier kongruenten Dreiecke der im nebenstehenden erwähnten Art:

$$\triangle ALM \cong CLM \cong BKM \cong DKM,$$

und zwar wieder wegen der rechten Winkel, der Radien als Hypotenusen, und der gleichen Sehnenhälften:

$$AL = CL = BK = DK.$$

Folglich ist auch wieder:

$$MK = ML.$$

nen, so bilden ihre Hälften mit dem Kreismittelpunkte je ein rechtwinkliges Dreieck AHM oder BHM und CJM oder DJM. In jedem dieser vier Dreiecke ist aber ausser dem rechten Winkel auch ein Radius als Hypotenuse und eine der vier gleichgrossen Sehnenhälften als Kathete. Demnach sind diese vier Dreiecke kongruent, also auch ihre andern Katheten gleichgross: $HM = JM$.

Frage 21. Was lässt sich auf Grund der vorigen Antwort behaupten über gleiche Sehnen und ihre Abstände vom Mittelpunkt?

Erkl. 43. Die im nebenstehenden Satze 8a behauptete Umkehrung des in voriger Antwort auf vierfache Weise bewiesenen Satzes 8 lässt sich nach jeder derselben Arten beweisen:

1) Bringt man durch Umdrehung die gleichen Abstandsstrecken zur Deckung, so decken sich auch die in deren Endpunkten senkrechten Sehnen.

2) Bringt man durch Umdrehung die gleichen Abstandsstrecken auf den gleichen Durchmesser, so werden die Sehnen in deren Endpunkten symmetrisch.

3) Klappt man um die Halbierungslinie PM der gleichen Abstände um, so kommen diese Abstände zur Deckung, also auch die in ihren Endpunkten senkrechten Sehnen.

4) Sind in den Dreiecken AHM und CJM ausser dem rechten Winkel und den gleichen Hypotenusen auch die Katheten $HM = JM$, so sind die Dreiecke kongruent, also auch:

$$AH = CJ \text{ und } AB = 2 \cdot AH = 2 \cdot CJ = CD.$$

Antwort. Ueber gleichlange Sehnen und ihre Abstände vom Mittelpunkt lassen sich folgende Aussagen machen:

Satz 8. Gleichlange Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Kreismittelpunkt.

Und umgekehrt:

Satz 8a. Sehnen eines Kreises mit gleichem Abstand vom Kreismittelpunkt sind gleichlang.

Frage 22. Was folgt aus dem Bisherigen für ungleichlange Sehnen oder Sehnen mit ungleichen Abständen vom Kreismittelpunkt?

Erkl. 44. Zwei andere Beweisarten als die beiden nebenstehenden, sind die folgenden (siehe die Figuren 15, I und 15, II):

Man drehe die eine Sehne so, dass sie vom gleichen Kreispunkt C ausgeht wie die andere, und suche die aus den ungleichen Sehnenhälften CE und CF, bezw. den ungleichen Abständen

Antwort. Wegen der Sätze 8 und 8a können ungleiche Sehnen jedenfalls nicht gleiche Abstände vom Mittelpunkt haben und umgekehrt. Um eine Beziehung zwischen Länge und Abstand zweier Sehnen zu finden, kann man auf verschiedene Weise verfahren:

1) Dreht man das von der einen Sehne mit dem Mittelpunkt gebildete Dreieck

ME und MF jetzt gebildeten Dreiecke CEF und MEF. Für ersteres erhält man dann $\sphericalangle CEF < \sphericalangle CFE$, wenn angenommen wird $CE > CF$; deshalb wird in Figur 15, I:

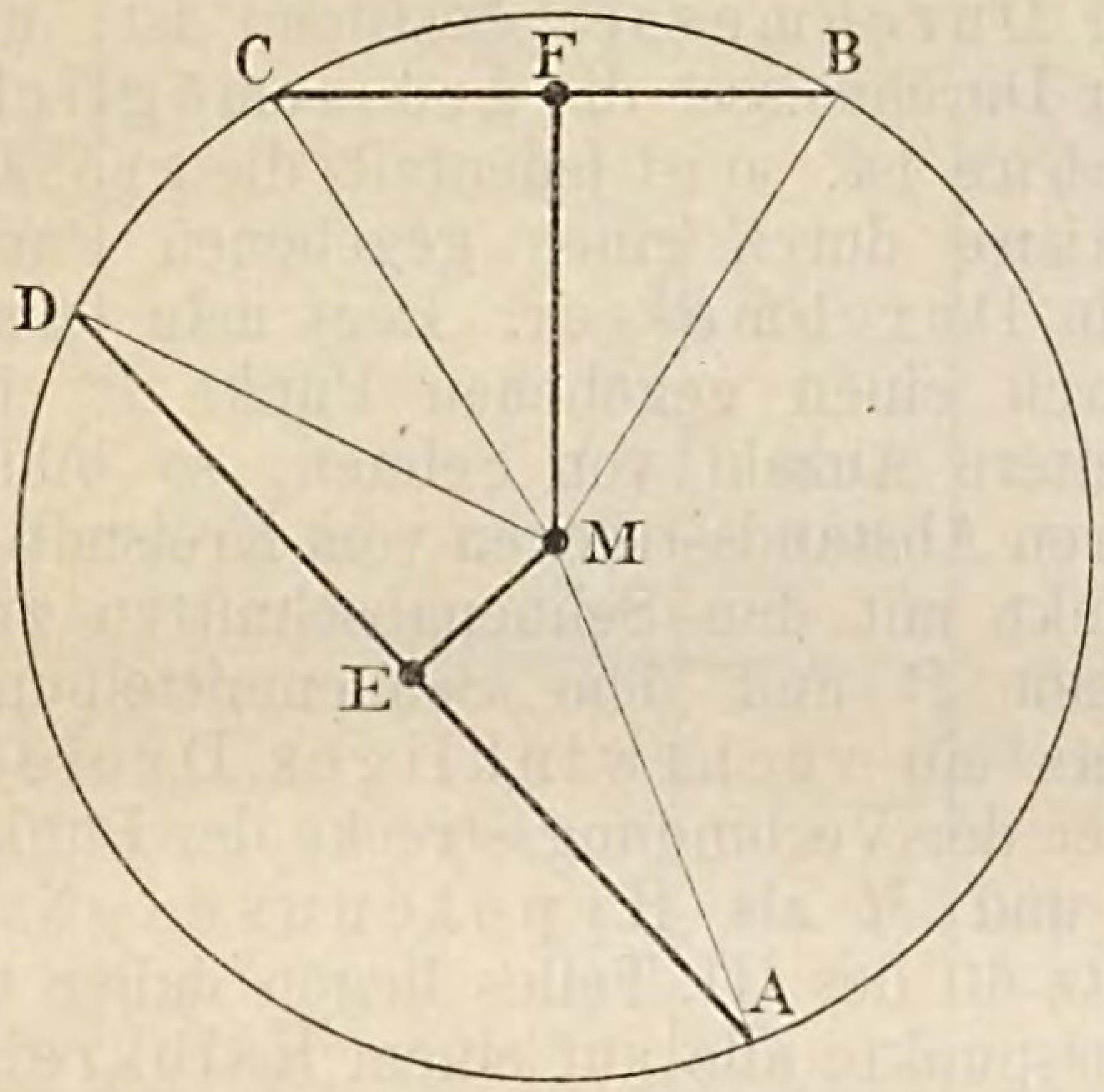
$$\sphericalangle MEF = 90^0 - CEF > 90^0 - CFE = MFE;$$

folglich Gegenseite $ME < MF$.

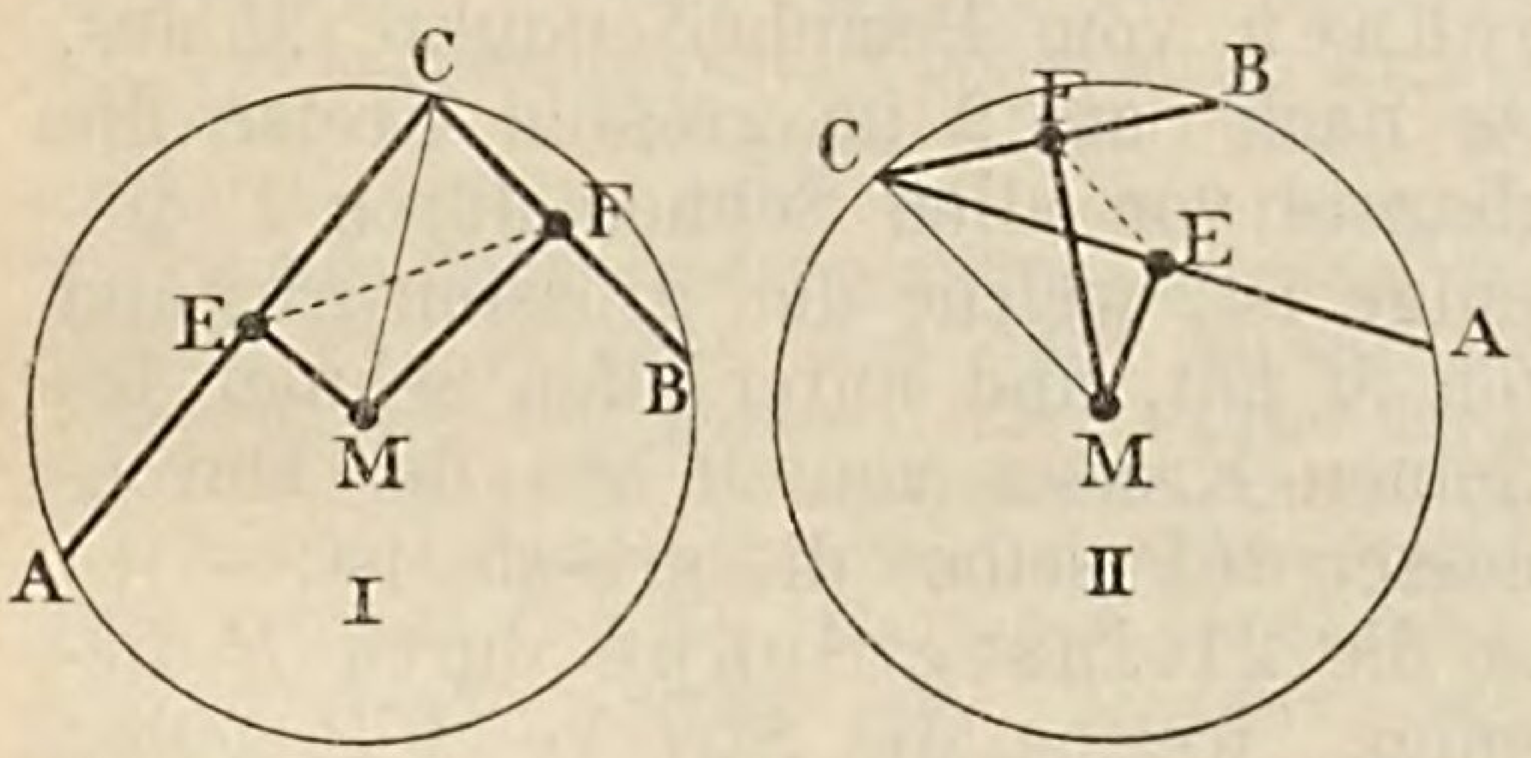
In Figur 15, II dagegen ergänzt der Winkel CEF den rechten Winkel CEM zu einem stumpfen, folglich wird wieder Gegenseite:

$$ME < MF.$$

Figur 14.



Figur 15.



soweit herum, dass die Mittelsenkrechten beider Sehnen auf denselben Durchmesser zu liegen kommen, so erhält man die in Figur 11 gezeichnete parallele Lage verschieden langer Sehnen. Dabei erkennt man, dass die Sehnen desto kürzer werden, je weiter ihr Fusspunkt auf dem Durchmesser vom Mittelpunkt entfernt liegt — denn der von der Sehne ausgeschnittene Kreisbogen wird beiderseits stets um ein gleichgrosses Stück kleiner. Und umgekehrt muss eine längere Sehne, um ein grösseres Bogenstück abschneiden zu können, näher zum Mittelpunkte hinrücken.

2) Sind ganz allgemein AD und BC in Figur 14 zwei ungleiche Sehnen mit den ungleichen Abständen ME und EF, so bilden die ungleichen Sehnenhälften und diese ungleichen Abstände je mit einem Radius ein rechtwinkliges Dreieck mit gleichgrosser Hypotenuse und ungleichen Katheten. Nach Aufgabe 134 des III. Teiles müssen sodann die beiden Katheten sich in ungleichem Sinne unterscheiden, also die Dreiecke mit der grösseren Abstandsstrecke die kleinere Sehnenhälfte haben, und umgekehrt.

Frage 23. Welche Aussagen über Sehnen von beliebigen Längen und Abständen ergeben sich aus der Antwort der vorigen Frage?

Erkl. 45. Für die Umkehrung des Satzes 9 ist in Figur 15, I derselbe Beweisgang vom Dreieck MEF auf das Dreieck CEF rückwärts zu machen. In Figur 15, II entsteht wegen $MF > ME$ der Winkel MFE bei F, welcher den rechten Winkel CFM zum stumpfen Winkel CFE ergänzt. Deshalb ist im Dreieck CFE die Gegenseite $CE > CF$.

Antwort. Auf Grund der mehrfachen gleichartigen Ergebnisse der vorigen Antwort kann man die Aussage machen:

Satz 9. Sehnen von ungleicher Länge haben entgegengesetzt ungleiche Abstände vom Kreismittelpunkt und umgekehrt.

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 9a. Je länger eine Sehne ist, desto näher liegt sie dem Kreismittelpunkt.

Erkl. 46. Die Abstände vom Mittelpunkt, welche eine Sehne überhaupt haben kann, liegen zwischen 0 und r. Die Länge der zugehörigen Sehne ist für den Abstand 0 gleich dem Durchmesser, für den Abstand r gleich Null (vergl. Satz 4c).

Und umgekehrt:

Satz 9b. Je weiter eine Sehne vom Kreismittelpunkt entfernt ist, desto kürzer ist sie.

Der Durchmesser ist also wieder die grösste Sehne.

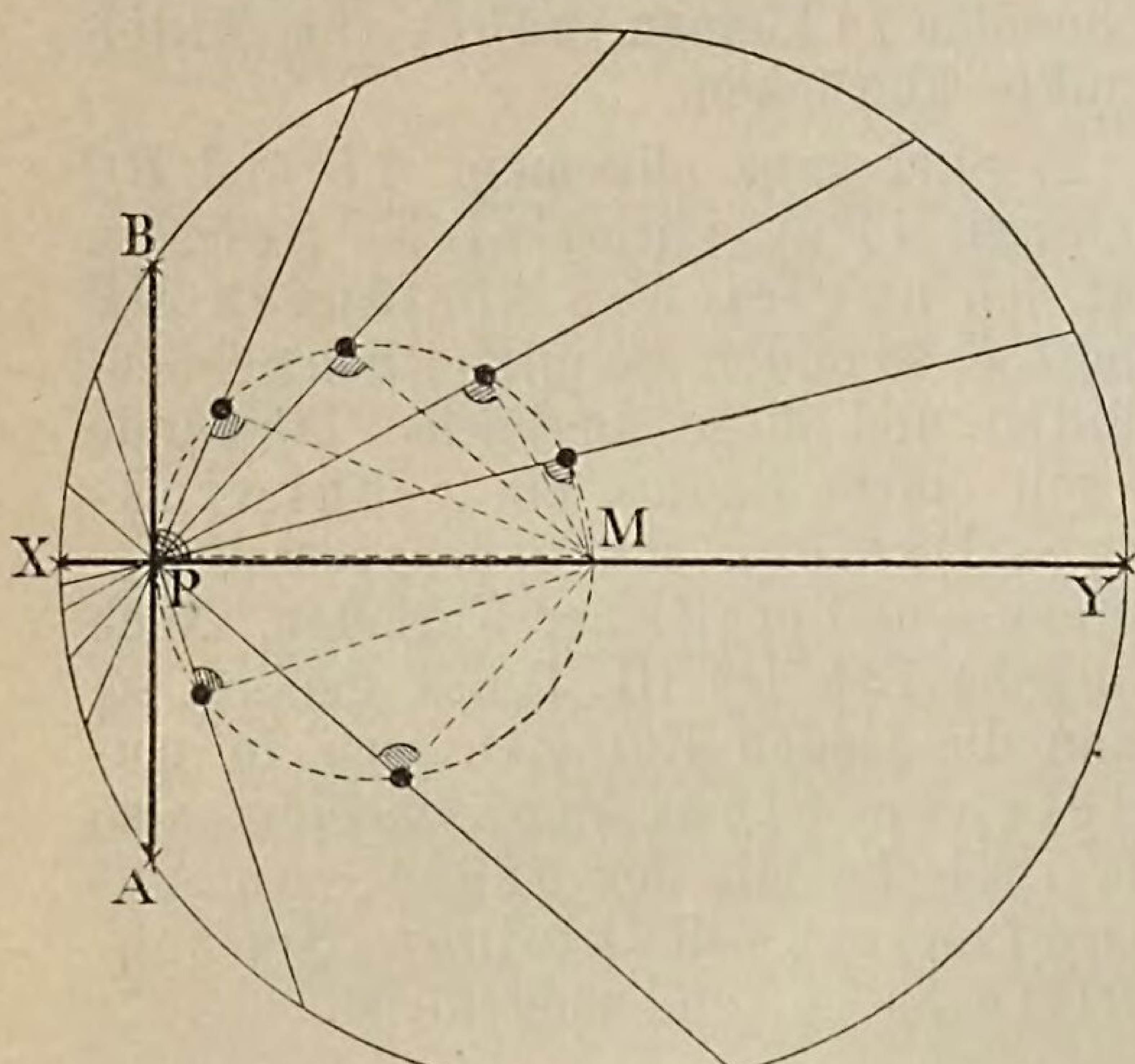
Frage 24. Welches ist die längste bezw. kürzeste der durch einen bestimmten Punkt der Kreisfläche gehenden Sehnen?

Antwort. Da durch jeden Punkt ein Durchmesser bestimmt ist, und der Durchmesser die grösstmögliche Sehne ist, so ist jedenfalls die grösste Sehne durch einen gegebenen Punkt sein Durchmesser. Legt man ferner durch einen gegebenen Punkt P eine weitere Anzahl von Sehnen, so bilden deren Abstandsstrecken vom Kreismittelpunkt mit den Sehnenabschnitten zwischen P und dem Sehnenmittelpunkt stets ein rechtwinkliges Dreieck über der Verbindungsstrecke der Punkte P und M als Hypotenuse. Nach Satz 60 des III. Teiles liegen daher die Fusspunkte alle auf einem Halbkreise über dieser Strecke MP, und die Abstandsstrecken bilden in diesem Halbkreise Sehnen vom Peripheriepunkte M aus. Da nach Satz 9 im grossen Kreise die kleinste von allen Sehnen durch P diejenige ist, welche den grössten Abstand von M hat, und unter allen Sehnen des kleinen Kreises von M aus der Durchmesser MP selbst die grösste ist, — so ist die kleinste Sehne durch P diejenige, welche die Strecke MP selbst als Abstandsstrecke hat, also die Strecke $AB \perp PM$.

Man erhält daher den

Satz 10. Von allen Sehnen durch einen gegebenen Punkt einer Kreisfläche ist die längste der Durchmesser durch diesen Punkt — und die kürzeste die auf diesem Durchmesser im gegebenen Punkte senkrecht stehende Sehne.

Figur 16.



Erkl. 47. Da die Länge einer Sehne durch einen gegebenen Punkt P stets aus zwei Stücken von meist verschiedener Grösse besteht, so lässt sich aus Satz 2 kein Mittel entnehmen zur Aufsuchung der Sehnenlänge. Vielmehr benutzt man Satz 9, um nicht die Länge der Sehnen selbst, sondern deren Abstand vom Mittelpunkt zur Grundlage der Untersuchung zu machen. Da auf diese Weise leicht der grösstmögliche Abstand zu finden ist, ergibt sich auch umgekehrt die kleinste Sehne.

Erkl. 48. Umgekehrt kann man aus nebenstehendem Satze 10 für den Satz 2 die Anwendung entnehmen, dass das Stück PY auf dem Durchmesser durch P sosehr die grösste aller Strecken zwischen P und dem Kreise ist, dass die Zufügung der allerkleinsten derselben Strecken, nämlich des Stückes PX, zu demselben genügt, um zusammen doch noch die grösstmögliche Sehne durch P zu liefern. Auf der kleinsten aller Sehnen durch P liegt also keineswegs die kleinste Strecke zwischen P und dem Kreis, sondern diejenige wird die kleinste Sehne, auf welcher die

beiderseitigen Strecken PA und PB einander symmetrisch gleich sind; denn da $AP \perp PM$ ist, so muss nach Satz 6a $PA = PB$ werden.

b) Ueber den Kreis und eine denselben berührende Gerade.

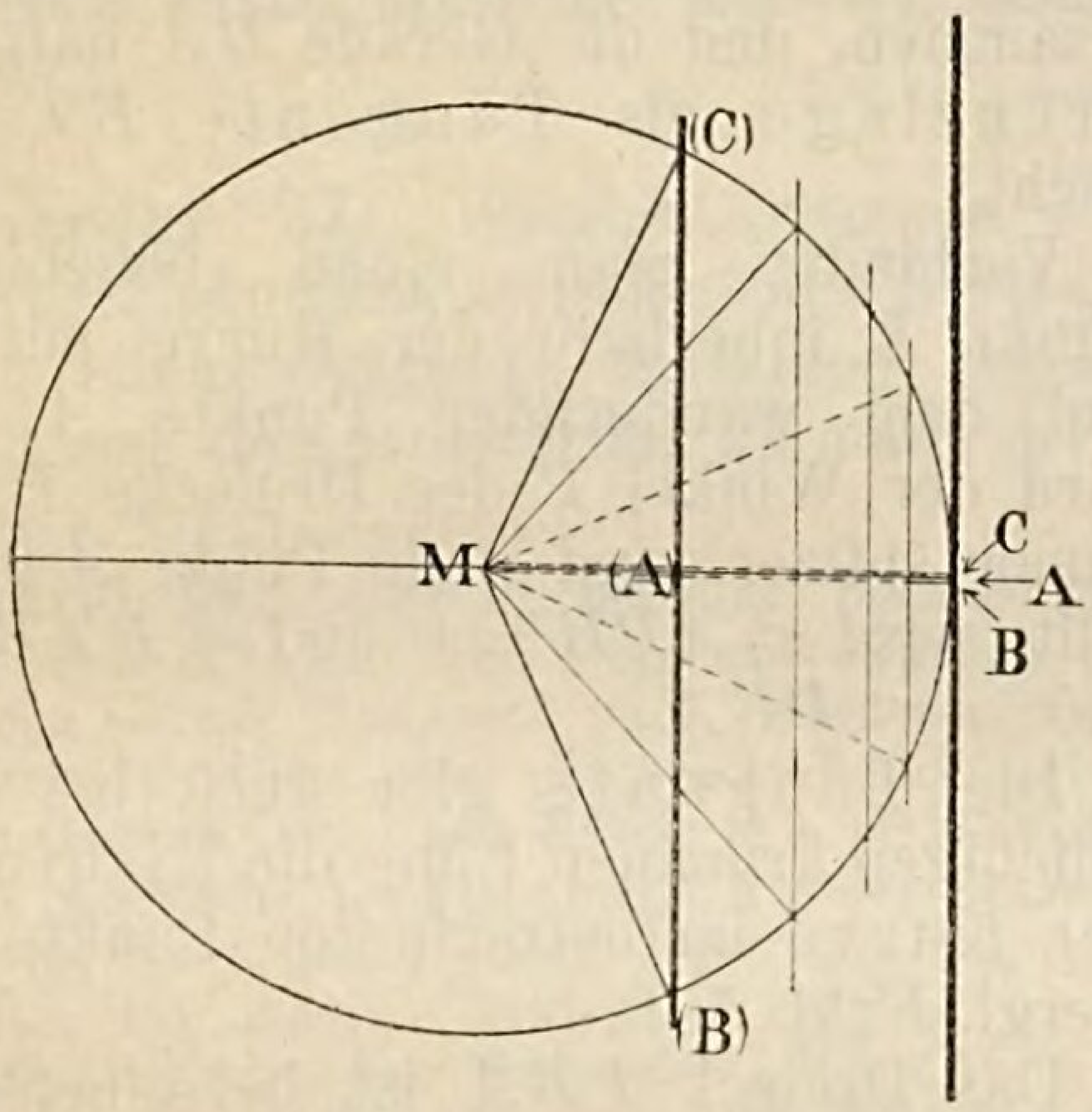
Frage 25. Was wird aus dem Dreieck MBC in Figur 8, wenn nach der Antwort der Frage 10 der Abstand der Geraden BC gleich dem Radius wird?

Antwort. Wenn der Abstand der Geraden BC (Figur 8) grösser als MA wird, so rücken die Schnittpunkte B und C näher zusammen (vergl. auch Figur 11) und fallen zuletzt mit dem Endpunkte des Durchmessers MA selbst zusammen. Dabei wird der Winkel BMC des Dreiecks BMC gleich Null, jeder der Winkel MBC und MCB wird ein Rechter. Die Länge der Grundseite BC ist gleichfalls Null, ihr Mittelpunkt fällt daher ebenso wie die ganze Sehne BC in den einen Punkt, den Berührungspunkt.

Dieser Punkt ist der einzige, welchen die Tangente und der Kreis gemeinsam haben; er ist aber kein gewöhnlicher Schnittpunkt, sondern er besteht aus zwei unendlich nahegerückten, aus zwei zusammenfallenden Punkten, welche ein der Geraden und dem Kreise gemeinsames Linienelement bilden. (Vergleiche Antwort der Frage 50 und Erkl. 171 bis 174 im I. Teile dieses Lehrbuches.)

Da der Berührungspunkt der Fusspunkt der Senkrechten ist, so ist er auf der ganzen Tangente der dem Kreismittelpunkt zunächstliegende, und er ist der einzige, dessen Abstand gleich dem Kreisradius ist, also der einzige Punkt der Geraden, welcher auf dem Kreise liegt. Alle Verbindungsstrecken des Kreismittelpunktes mit andern Punkten der Tangente sind länger als die Senkrechte, also länger als der Radius; folglich liegen alle übrigen Punkte der Tangente ausserhalb des Kreises.

Figur 17.



Erkl. 49. Da eine Tangente zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte eines Kreises enthält, und da eine gerade Linie nach Lehrsatz 1 des I. Teiles durch eine ununterbrochene Aufeinanderfolge zweier Punkte eindeutig bestimmt ist, so kann man auch sagen, die Tangente sei eine gerade Linie, welche durch ein Linienelement des Kreises bestimmt ist.

Eine Sekante hat daher mit einem Kreise zwei getrennt liegende, also nicht aufeinanderfolgende Punkte gemein; eine Tangente zwei unmittelbar aufeinanderfolgende, zwei unendlich nahe Punkte.

Erkl. 50. Da durch ein Linienelement eine gerade Linie bestimmt ist, so kann man andererseits auch sagen, dass die Tangente die Richtung angibt, in welcher sich ein die Kreislinie durchlaufender Punkt an der betrachteten Stelle gerade bewegt. Nach Erklärung 100 des III. Teiles entsteht eine krumme Linie durch diejenige Bewegung eines Punktes, bei welcher dieser die Richtung seiner Verschiebung in jedem Augenblick ändert. Diejenige Richtung, in welcher sich der Punkt an einer bestimmten Stelle des Kreises gerade bewegt, ist also die Richtung der Tangente.

Man vergl. hierüber den Abschnitt über die krummlinige Bewegung und die Zentrifugalkraft in Klimperts Lehrbuch der Dynamik fester Körper.

Frage 26. Wie kann man sich nach vorstehender Antwort eine Tangente an eine krumme Linie in einem Punkte derselben auch entstanden denken?

Antwort. Um an einer beliebigen krummen Linie in einem gegebenen Punkte B derselben die Tangente zu erhalten, ziehe man durch den Punkt B eine beliebige Sekante BA der Kurve und drehe diese Gerade um den Punkt B so, dass der Punkt A sich gegen den Punkt B bewegt. In dem Augenblicke, wo der Punkt A den Bogen AB zurückgelegt hat, fällt Punkt A mit Punkt B zusammen, und die Gerade BA hat die Grenzlage als Tangente BT erreicht.

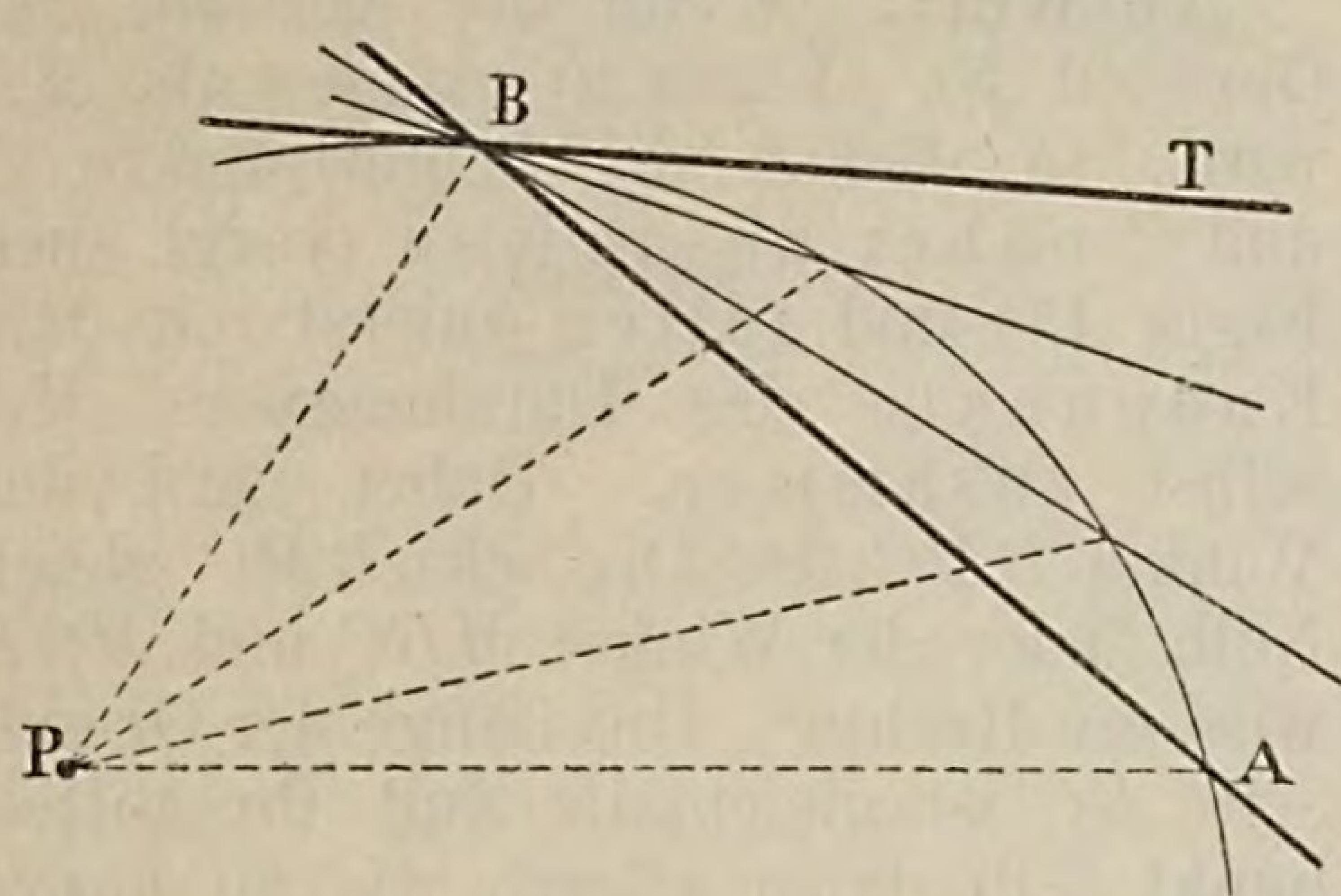
Verbindet man einen beliebigen Punkt P innerhalb der Kurve mit B und dem wandernden Punkte A, so wird der Winkel P des Dreiecks PAB immer spitzer, und wenn Punkt A in B fällt, wird $\sphericalangle APB = 0$ und $\sphericalangle PAB = 180^0 - \sphericalangle PBA$.

Die Tangente gibt auch bei der beliebigen krummen Linie die Richtung der Kurve im betrachteten Punkte an (vergl. Erkl. 50).

Das Dreieck PBA ist bei einer beliebigen Kurve oder auch beim Kreise kein gleichschenkliges, solange nicht P Kreismittelpunkt ist. Nur wenn P mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfällt, wird stets $PB = PA$ in allen Lagen, und daher stets $\sphericalangle PBA = PAB$. Deshalb wird auch nur für die nach dem Kreismittelpunkte gehende Sehne von B aus der Winkel TBP zum rechten Winkel (s. die folgenden Sätze 11).

Erkl. 51. Eine beliebige krumme Linie wird allgemein auch mit dem Namen Kurve bezeichnet, vom lateinischen curvus = krumm.

Figur 18.



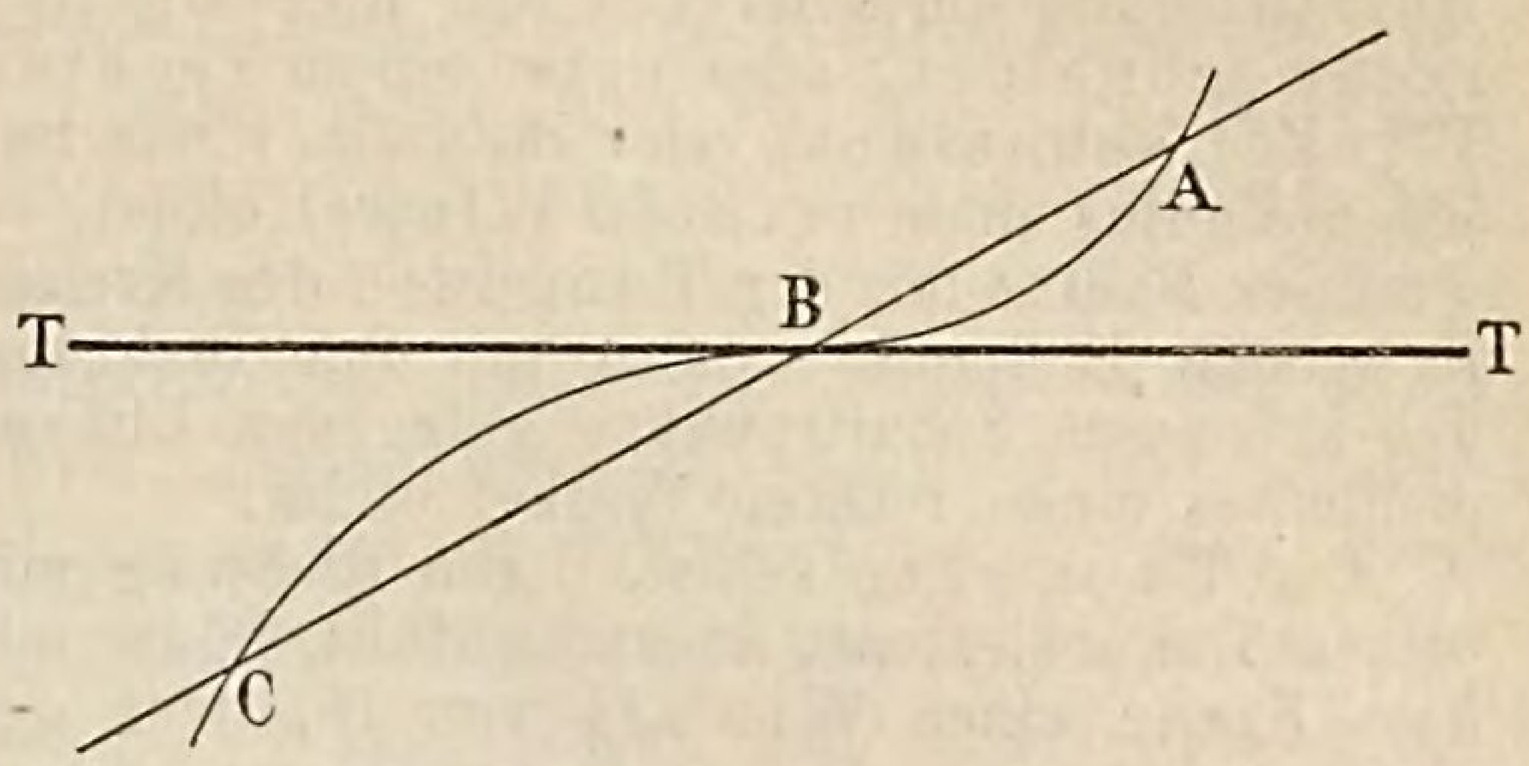
Erkl. 52. Da eine krumme Linie nach dem Nebenstehenden und Erkl. 50 in jedem ihrer Punkte eine bestimmte Richtung besitzt, so kann man auch von dem Schnittwinkel zweier Kurven bezw. von dem Schnittwinkel einer Kurve mit einer sie schneidenden Geraden reden: als dem Winkel der beiderseitigen Tangenten, bezw. dem Winkel zwischen der Tangente und der Sekante.

Erkl. 53. Die Entstehung der Tangente an einen Kreis als Grenzlage einer um ihren Schnittpunkt gedrehten Sehne kann in Figur 16 erkannt werden. Die durch den Punkt P gehenden Sehnen des grossen Kreises nämlich sind gleichzeitig Sekanten des kleinen Kreises über PM als Durchmesser. Das in diesem kleinen Kreis enthaltene Stück zwischen Punkt P und dem andern Kreispunkt (dem Fusspunkt der Senkrechten von M aus) ist jeweils eine Sehne dieses kleinen Kreises, deren zweiter Schnittpunkt von M gegen P hinrückt, so dass die Sehne, von der Lage PM ausgehend, stets kürzer wird und zuletzt als Sehne von der Länge Null in den Punkt P zusammenfällt bei der Lage APB der Geraden. Dann ist MP Durchmesser des kleinen Kreises, und dessen Tangente AB ist nach Antwort der Frage 24 senkrecht zu diesem Durchmesser in seinem Endpunkte B.

Erkl. 54. Während ein Berührungspunkt zwischen Kreis und Gerade oder auch zwischen Kreis und Kreis nur immer als Doppelpunkt zu denken ist, kann bei andern krummen Linien auch der Fall eintreten, dass in dem Berührungspunkt mehr als zwei Punkte zusammenfallen.

So erkennt man leicht in Figur 19, dass bei Drehung der Sekante AC um den Punkt B nicht nur Punkt A, sondern gleichzeitig von der andern Seite auch der Schnittpunkt C gegen den Punkt B hinrückt, und dass gleichzeitig mit dem Punkte A auch Punkt C im Punkte B anlangt, dass also im Berührungspunkte B drei zusammenfallende Punkte, also zwei benachbarte Linienelemente der krummen Linie auf der geraden Tangente liegen. Einen Punkt dieser Kurve von der in Figur 19 gezeichneten Art nennt man einen Wendepunkt. Ebenso können aber auch zwischen einem Kreis und einer Ellipse Berührungen stattfinden, bei welchen drei und sogar vier unendlich naheliegende Punkte den beiden Kurven gemeinsam sind.

Figur 19.



Frage 27. Welche Aussagen über die Beziehungen zwischen der Kreislinie und einer Tangente derselben ergeben sich aus den Antworten 25 und 26?

Antwort. Auf Grund der vorigen Antworten kann man über eine Tangente folgende Aussagen machen (s. Figur 20):

Satz 11. Die im Endpunkte eines Radius errichtete Senkrechte ist eine Tangente des Kreises.

Und ferner:

Satz 11a. Die Senkrechte vom Kreismittelpunkte auf eine Tangente trifft den Berührungspunkt.

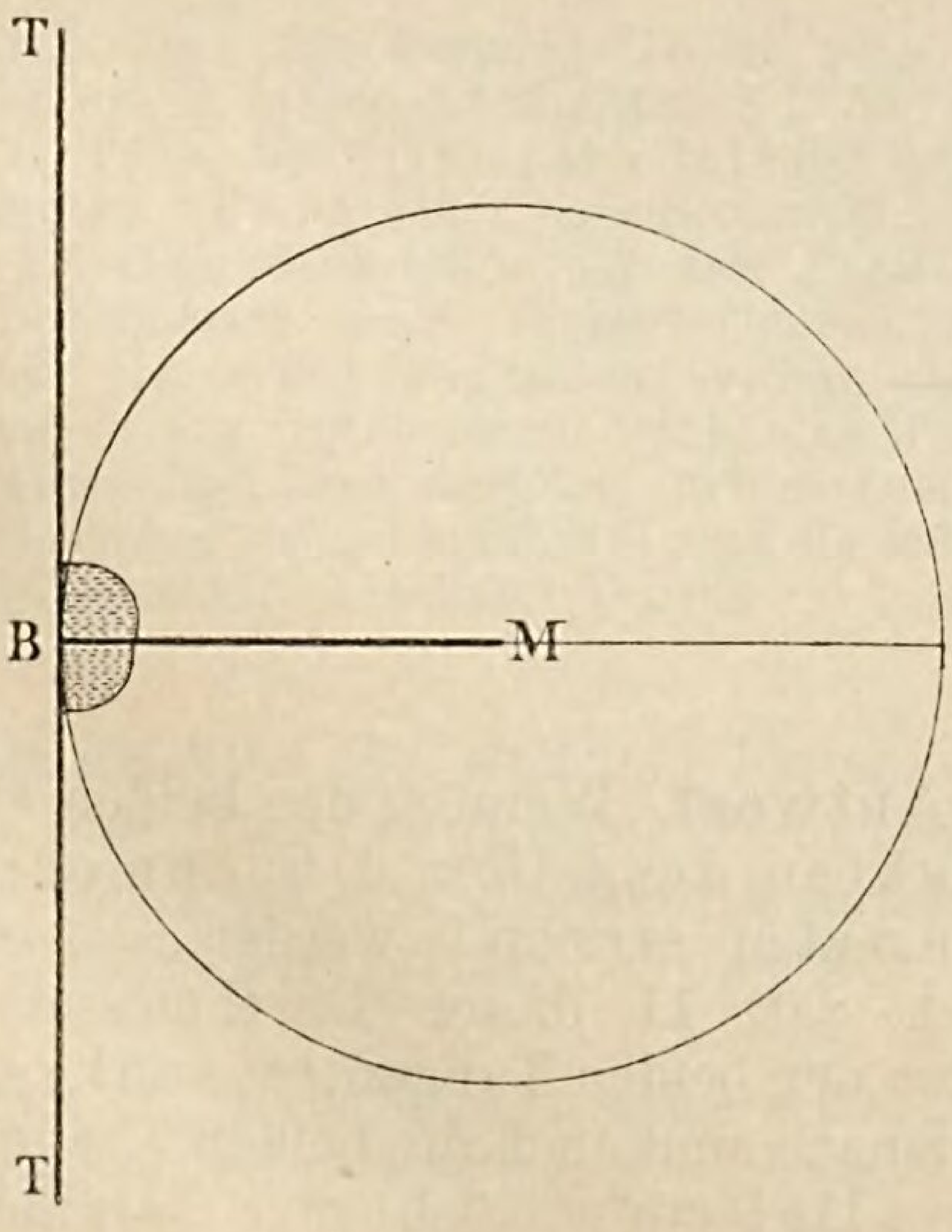
Satz 11b. Die Senkrechte auf einer Tangente im Berührungspunkte geht durch den Kreismittelpunkt, ist also Radius bezw. Durchmesser.

Satz 11c. Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes und des Berührungspunktes einer Tangente ist senkrecht zur Tangente.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Sätze ergibt sich sowohl aus der Antwort der Frage 25, als auch aus einer Wiederholung der in Antwort der Frage 16 angestellten Ueberlegung. Der Durchmesser MB (Figur 20) ist nämlich wieder Symmetrieachse für den Kreis und die Tangente als selbstentsprechende Achsensenkrechte und vereinigt daher in sich die Eigenschaften:

Erkl. 55. Satz 11 ist eine Formulierung der Definition der Tangente, wonach eine solche Gerade Tangente wird, deren senkrechte Abstandsstrecke vom Kreismittelpunkt gleich dem Radius ist. Die Sätze 11a bis 11c sind eine wörtliche Uebertragung der Sätze 5a bis 5c über das Dreieck MBC der Figur 10, indem für Sehne eintritt Tangente, für Mittelpunkt der Sehne — Berührungspunkt der Tangente. Da der Mittelpunktswinkel und ebenso der ausgeschnittene Kreisbogen verschwindet, so bleibt Satz 5 selbst ohne Uebertragung und ebenso die in den Sätzen 5 vorkommenden Beziehungen dieses Winkels und der Kreisbogenstücke.

Figur 20.



Erkl. 56. Nach Erkl. 52 sagt man, dass jeder Radius eines Kreises den Kreis senkrecht schneidet, oder unter einem rechten Winkel schneidet, oder dass ein Kreis mit jedem Radius einen rechten Winkel bildet, — weil der Radius mit der Tangente des Kreises in seinem Endpunkte, also mit der Richtung des in seinem Schnittpunkte gelegenen Linienelementes einen rechten Winkel bildet.

Die Tangente selbst, deren Richtung mit diesem Linienelemente zusammenfällt, bildet mit dem Kreise einen Winkel von 0°, oder der Kreis wird von der Tangente unter einem Winkel von 0° getroffen, d. h. der Kreis wird von der Tangente berührt. Es ist daher Berührung und „Schneiden unter einem Winkel von 0°" für gleichbedeutend zu halten.

Erkl. 57. Wenn in Figur 18 1) die Kurve BA eine Kreislinie ist, und 2) der Punkt P in den Mittelpunkt dieser Kreislinie fällt, dann, aber auch nur bei Erfüllung dieser beiden Bedingungen, ist das Dreieck PBA ein gleichschenkliges und in demselben:

$$\sphericalangle PAB = PBA = 90^0 - \frac{APB}{2}.$$

Wird hierin $\sphericalangle APB = 0$, dann wird:

$$\sphericalangle PAB = PBA = 90^0.$$

Das Dreieck PBA in Figur 18 selbst aber erhält beim Zusammenfallen der Punkte A und B zwar auch einen $\sphericalangle APB = 0$, da aber $\sphericalangle PBA$ nicht gleich $\sphericalangle PAB$ ist, so wird auch beim Zusammenfallen der Punkte nicht jeder dieser beiden Winkel ein Rechter. Die Entstehung des rechten Winkels ist also eine ganz besondere und hervorragende Beziehung zwischen Tangente und Radius des Kreises. Bei andern krummen Linien, welche einen Mittelpunkt besitzen, heisst auch die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit einem Kurvenpunkte ein Radius; dieser bildet aber keineswegs rechte Winkel mit einer in jenem Kurvenpunkte als Berührungspunkt gezogenen Tangente; vielmehr ist dann die auf der Tangente im Berührungspunkte errichtete Senkrechte oder Kurvennormale ganz verschieden von dem vom Berührungspunkte zum Mittelpunkte der Kurve führenden Radius.

1) als Senkrechte vom Kreismittelpunkt M auf die Tangente BT,

2) als Senkrechte der Tangente BT im Berührungspunkte B,

3) als Verbindungslinie des Kreismittelpunktes M mit dem Berührungspunkte B.

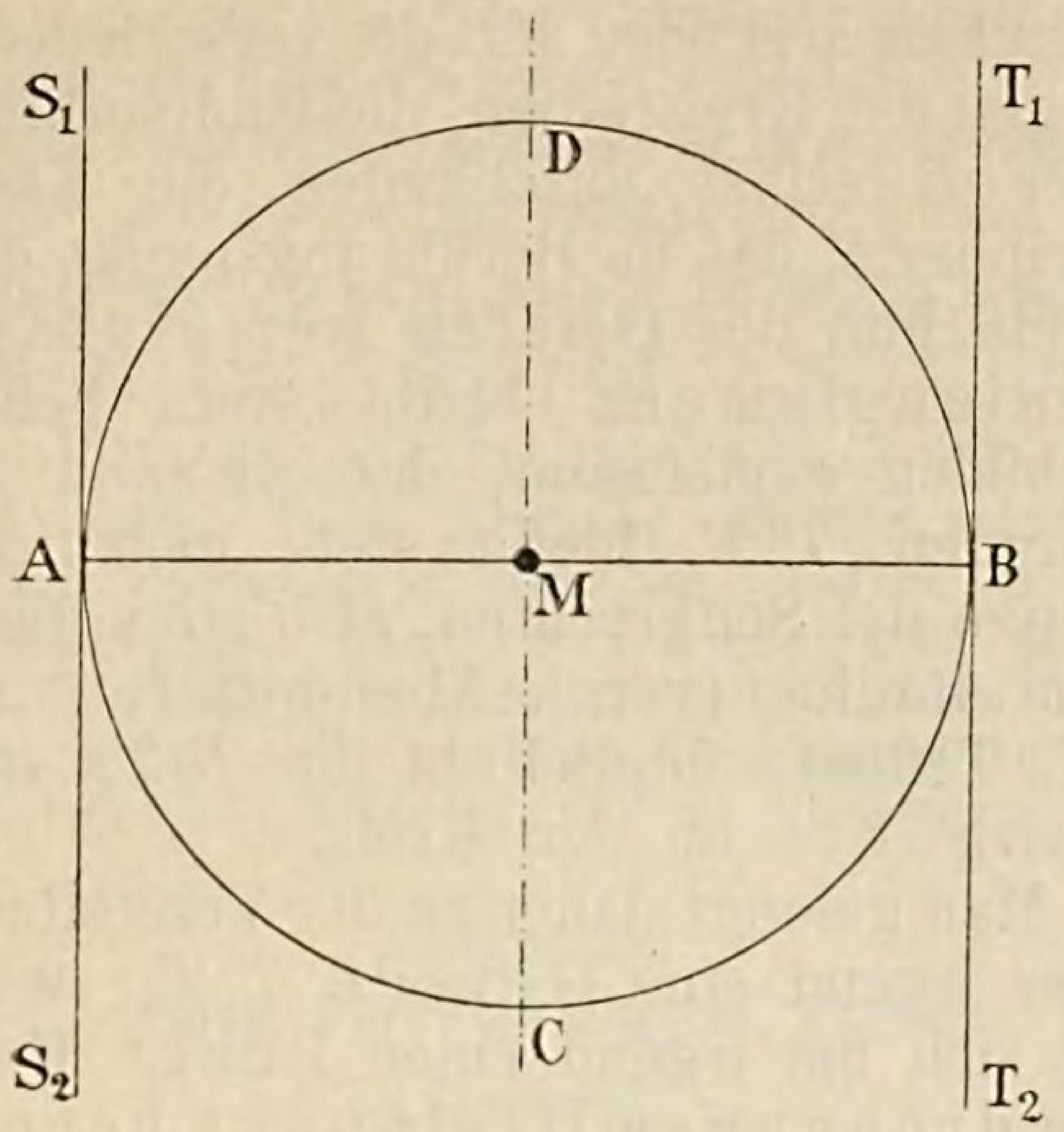
Infolge des Zusammentreffens dieser Eigenschaften kann man daher einer Linie, welche eine von ihnen besitzt, alle zuschreiben.

Frage 28. Welche Ergebnisse erhält man aus den vorigen Sätzen für die zwei in den Endpunkten des gleichen Durchmessers errichteten Tangenten?

Erkl. 58. Die vorliegende Frage 28 schliesst sich an Frage 27 genau so an, wie Frage 18 an Frage 17. Daher ist auch der erhaltene Satz 12 eine Uebertragung der in Satz 6 enthaltenen Behauptungen auf die Beziehungen zwischen Kreis und Tangente.

Antwort. Wenn in den beiden Endpunkten desselben Durchmessers Tangenten errichtet werden, so steht nach Satz 11 dieser Durchmesser auf jeder der beiden Tangenten senkrecht. Demnach sind auch die beiden Tangenten parallel unter sich und parallel zu

Figur 21.



Erkl. 59. Die Gesamtheit der in Figur 21 enthaltenen Linien bildet daher:

1) eine achsig-symmetrische Figur zur Linie AMB als Symmetrieachse,

2) eine achsig-symmetrische Figur zur Linie CMD als Symmetrieachse,

3) eine zentrisch-symmetrische Figur zum Punkte M als Umdrehungsmittelpunkt.

Und es sind entsprechend symmetrisch die Strecken MA, MB; MC, MD; AS_1, AS_2; BT_1, BT_2:

nach der ersten Beziehungsweise mit:

MA, MB; MD, MC; AS_1, AS_2; BT_2, BT_1;

nach der zweiten Beziehungsweise mit:

MB, MA; MC, MD; BT_1, BT_2; AS_1, AS_2;

nach der dritten Beziehungsweise mit:

MB, MA; MD, MC; BT_2, BT_1; AS_2, AS_1.

Erkl. 60. Die Gerade CD ist nach den Ausführungen in den Abschnitten B 2 und B 3 des III. Teiles die Mittelparallele der beiden Tangenten. Es ist daher bemerkenswert, dass jede beliebige Senkrechte der drei Parallelen als Durchmesser eines Kreises dienen kann, welcher die beiden Tangenten berührt. Oder wenn man von irgend einem Punkt der Mittelparallelen einen Kreis zeichnet, der die eine der Parallelen berührt, so berührt er auch die andere. (Vergl. Abschnitt B 2 dieses Teiles.)

allen nach Figur 11 auf demselben Durchmesser senkrecht stehenden Sehnen.

Beim Umklappen um den Durchmesser als Symmetrieachse vertauschen daher die beiden entgegengesetzten Richtungen auf jeder der beiden Tangenten ihre Lage, und gleichzeitig die beiden Halbkreise, welche zwischen den entgegengesetzten Berührungspunkten liegen. Wird aber um denjenigen Durchmesser umgeklappt, welcher auf dem vorigen senkrecht steht, so vertauschen die gleichgerichtet parallelen Richtungen auf den beiden Tangenten gegenseitig ihre Lage, und ebenso die Berührungspunkte und die in ihnen halbierten Halbkreise. Wird endlich die ganze Figur um den Kreismittelpunkt um 180^0 herumgedreht, so erhält der Kreis als ganzer und jeder einzelne Durchmesser wieder seine vorige Lage, die beiden Tangenten vertauschen ihre Lage, und zwar jede Richtung auf der einen mit der entgegengesetzt parallelen der andern.

Man kann also die Aussage machen:

Satz 12. Die Berührungspunkte zweier paralleler Tangenten eines Kreises liegen auf einem Durchmesser, nämlich auf derjenigen Geraden durch den Kreismittelpunkt und durch die Mittelpunkte aller zu den Tangenten parallelen Sehnen, welche die beiden Tangenten in den Berührungspunkten senkrecht trifft.

Frage 29. Zu welchem Ergebnisse führt eine Umdrehung der Figur MBT oder MBS um den Kreismittelpunkt M als Umdrehungsmittelpunkt?

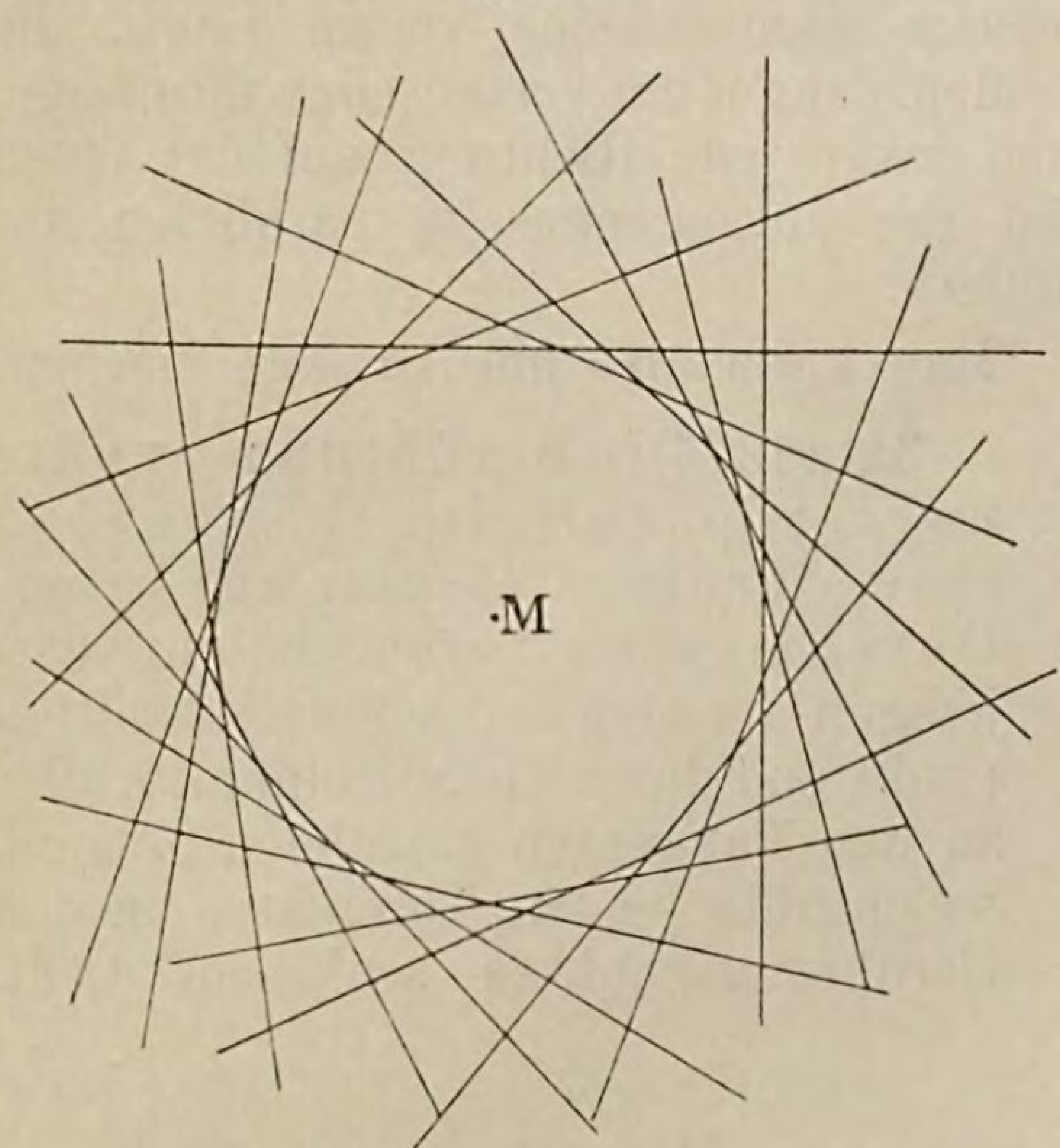
Erkl. 61. Die im Nebenstehenden entwickelte Anschauung der Erzeugung eines Kreises als Liniengebilde durch die Bewegung einer

Antwort. Wenn die aus den Strecken MB und BT in Figur 20, bezw. aus MA und S_1S_2 oder aus MB und T_1T_2 in Figur 21 gebildete Figur um den Kreismittelpunkt M beliebig weit herum-

Geraden (vergl. Erkl. 2 im III. Teile) findet auch ganz allgemein Anwendung auf Erzeugung beliebiger krummer Linien durch eine bewegte Gerade. Diese Gerade bleibt stets Tangente der Kurve und durch die Gesamtheit dieser Tangenten wird die Kurve eingehüllt, die Kurve entsteht als „Umhüllungsfigur“ ihrer Tangenten (vergl. auch Erkl. 307).

Jede dieser einhüllenden Geraden hat mit jeder der beiden unendlich nahe benachbarten Tangenten einen Schnittpunkt gemein, mit der eingehüllten Kurve aber zwei zusammenfallende Punkte, einen Doppelpunkt, ein Linienelement, nämlich den Schnittpunkt mit der nächstvorhergehenden und denjenigen mit der nächstfolgenden Geraden. Diese Schnittpunkte bilden bei der als Liniengebilde erzeugten Kurve ebenso die auf der Kurve liegenden Kurvenpunkte, wie durch die von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Punkten gebildeten Linienelemente der als Punktgebilde erzeugten Kurve die Kurventangenten bestimmt werden.

Figur 22.



gedreht wird, so durchlaufen die Strecken MA oder MB die verschiedenen Lagen der Kreisradien, die Endpunkte A oder B selbst durchlaufen die Kreisperipherie, das im Berührungspunkt dem Kreis und der Geraden gemeinsame Linienelement bleibt stets beiden Gebilden gemeinsam, der Abstand der Geraden T_1T_2 bleibt stets gleich der Länge der Senkrechten, also stets gleich dem Radius (vergl. Abschnitt B 3 des III. Teiles), folglich bleibt T_1T_2 stets Tangente an den Kreis.

Man gelangt daher zu der Vorstellung, dass irgend eine Gerade T_1T_2, wenn sie sich um irgend einen Punkt M als Umdrehungsmittelpunkt herumdreht, stets Tangente eines Kreises bleibt, dessen Mittelpunkt der Umdrehungsmittelpunkt M ist, und dessen Radius die senkrechte Abstandsstrecke der Geraden vom Mittelpunkte ist. Man sagt, dieser Kreis werde als Liniengebilde von der Geraden erzeugt, er werde von der Geraden umhüllt oder eingehüllt, und man fasst den Kreis auf als Inbegriff aller ihn berührenden oder umhüllenden Geraden, gerade so, wie er angesehen werden kann als Inbegriff der auf ihm liegenden Punkte.

Frage 30. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei beliebigen von denjenigen Lagen, welche die Tangente bei der Erzeugung eines Kreises annehmen kann?

Erkl. 62. Bei der Drehung einer Geraden aus der Lage der Tangente im Punkte A nach jener der Tangente im Punkte B gelangt der Tangentenabschnitt AS selbst nicht mit dem achsig-symmetrischen Tangentenabschnitt BS zur Deckung, sondern da Punkt A auf Punkt B und die Richtung von A nach S auf die Richtung von S nach B kommt, so

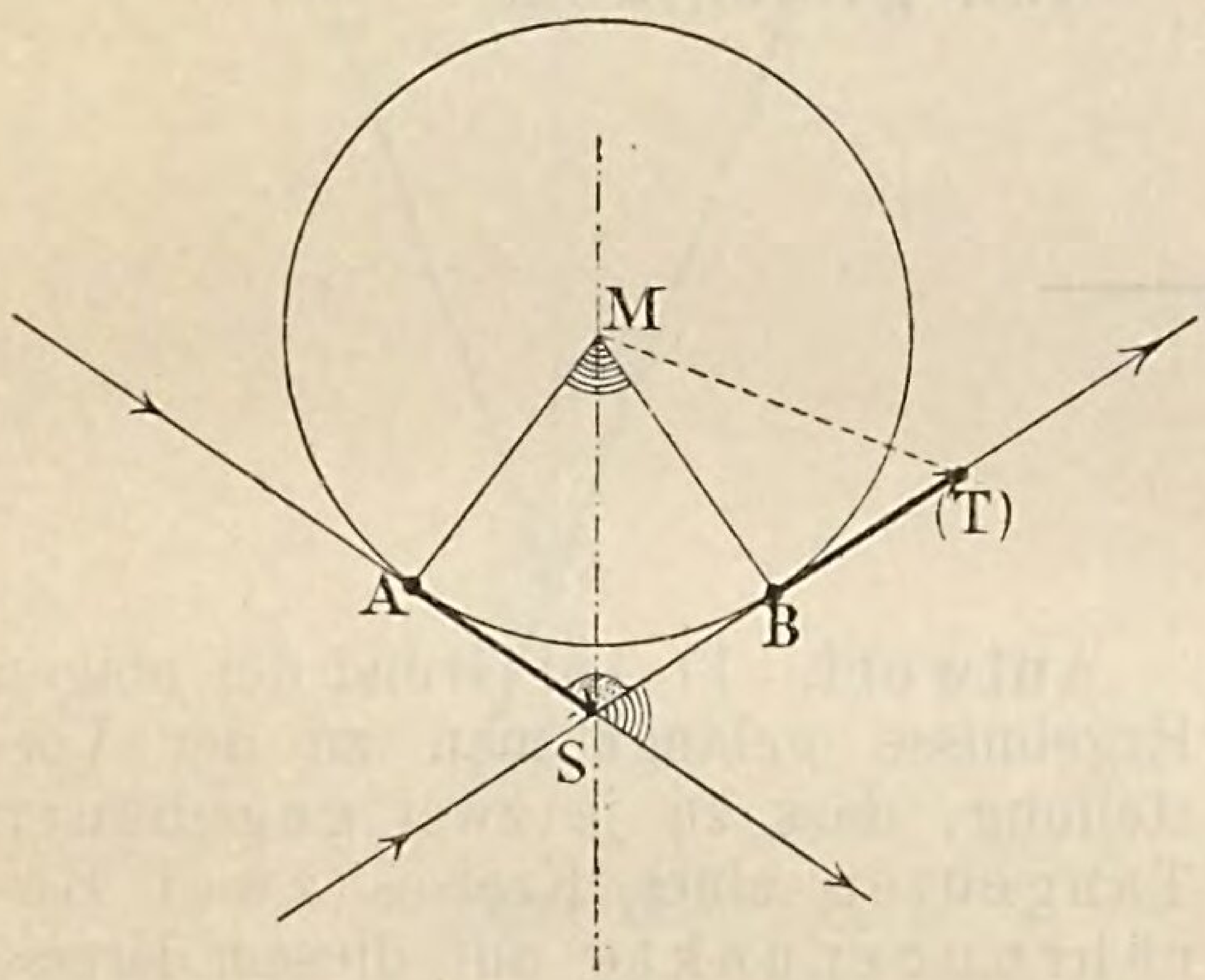
Antwort. Werden unter den vielen Lagen der Tangenten an einen Kreis in Figur 22 irgend zwei ausgewählt, und ihre Berührungspunkte A und B mit dem Kreismittelpunkte verbunden, so sind (s. Figur 23) MA und MB Radien, also gleichlang, $\sphericalangle MAS$ und $\sphericalangle MBS$ sind nach Satz 11c beide rechte Winkel, $\sphericalangle ASB$ ist nach Antwort der Frage 45 des II. Teiles ein „Tangenten-

fällt AS in eine von B aus jenseits des Berührungspunktes auf der Richtung SB gelegene Strecke BT, für welche dann auch:

$$MA = MB, \; \sphericalangle MAS = \sphericalangle MBT = 90^0,$$
$$AS = BT, \; MS = MT.$$

Bei der Umklappung um MS als Achse aber gelangen zur Deckung die gleichen Winkelhälften $AMS = BMS$ und $ASM = BSM$, sowie die gleichen Strecken $MA = MB$ und $AS = BS$. Diese letztere, aus der achsigen Symmetrie folgende Gleichheit, welche in den Betrachtungen über die Umdrehung allein (im III. Teile) nur nebensächlich erschien, tritt jetzt unter dem wichtigen Gesichtspunkte der Tangentenabschnitte in Vordergrund.

Figur 23.
(Vergl. Figur 42 des III. Teiles.)



winkel". Nun ist M der Umdrehungsmittelpunkt, um welchen die Gerade AS gedreht werden muss, um mit der Richtung SB zur Deckung zu kommen. Daher treten die Sätze 36 und 37 des III. Teiles in Geltung, und es wird der Winkel der Richtungen AS und SB, also der Nebenwinkel des Winkels ASB als Winkel der Anfangs- und Endlage der gedrehten Tangente gleich dem Winkel der durchlaufenen Drehung, nämlich gleich $\sphericalangle AMB$, beide gleich $180^0 - \sphericalangle ASB$; die Linie MS halbiert den Winkel ASB und den Winkel AMB: die Linie MS ist Symmetrieachse für die aus den Tangenten und ihren zugehörigen Radien gebildete Figur, folglich nicht nur als Durchmesser Symmetrieachse für den Kreis, sondern auch für die beiden Strecken AS und BS auf den Tangenten.

Diese Strecken SA und SB auf den von einem Punkte S an einen Kreis gehenden Tangenten zwischen S und den Berührungspunkten mit dem Kreise heissen Tangentenabschnitte; MA und MB heissen die Berührungsradien der den Tangentenwinkel ASB bildenden Abschnitte.

Frage 31. Welche Aussagen über zwei Tangenten ergeben sich aus voriger Antwort?

Erkl. 63. Der Beweis für die nebenstehenden Sätze 13 und 14 kann ohne Unterlegung der Sätze des vorigen Teiles dieses Lehrbuches auch unmittelbar geführt werden, wie folgt:

Wenn AS und BS Tangenten vom Punkte S aus an den Kreis um M sind, so sind die Radien $MA = MB$ und die rechten Winkel $MAS = MBS$. Wird also um die Halbierungslinie des Winkels AMB umgeklappt, so fällt MA auf MB, Punkt A auf B, der rechte Winkel MAS auf den rechten Winkel MBS, die Schenkelrichtung AS auf die Schenkelrichtung BS; also ist auch ihr Schnittpunkt S als Schnittpunkt achsig-symmetrischer Geraden ein sich selbstentsprechender, ein Achsen-Punkt: folglich geht die Achse durch Punkt S, und es fällt auch Strecke AS auf Strecke BS und Winkel ASM auf Winkel BSM, d. h. MS halbiert nicht nur $\sphericalangle AMB$, sondern auch ASB.

Antwort. Auf Grund der vorigen Antwort lassen sich über zwei Tangenten folgende Aussagen machen:

Satz 13. Ein Tangentenwinkel und der Mittelpunktswinkel der zugehörigen Berührungsradien sind supplementär; die Verbindungslinie der beiden Scheitelpunkte ist gemeinsame Halbierungslinie beider Winkel.

Oder:

Satz 13a. Die Halbierungslinie eines Tangentenwinkels geht durch den Kreismittelpunkt und halbiert den zum ersteren supplementären Winkel der zugehörigen Berührungsradien.

Erkl. 64. Dass die Winkel AMB und ASB supplementär sind, lässt sich auf verschiedene Art nachweisen:

1) Nach Antwort der Frage 156 des III. Teiles ist das Viereck $AMBS$ ein Deltoid; da dasselbe zwei rechte Winkel hat, so sind seine andern Winkel supplementär.

2) Die Schenkelrichtungen des Nebenwinkels zu $\sphericalangle ASB$ stehen senkrecht zu den Schenkeln des Winkels AMB, folglich ist dieser Nebenwinkel $= AMB = 180^0 - ASB$.

3) Im rechtwinkligen Dreieck MAS ist:

$$\sphericalangle ASM = 90^0 - AMS = 90^0 - \frac{AMB}{2}.$$

Winkel ASB aber ist gleich:

$$2 \cdot \sphericalangle ASM = 2\left(90^0 - \frac{AMB}{2}\right) = 180^0 - AMB.$$

Da der Mittelpunktswinkel ebensoviel Winkelgrade hat, als sein zugehöriger Kreisbogen Bogengrade, so kann man auch sagen, dass die Gradzahlen des Tangentenwinkels und seines zugehörigen Bogens zusammen 180 geben.

Und umgekehrt:

Satz 13b. Ein Mittelpunktswinkel und der Tangentenwinkel der zu seinen Radien zugehörigen Tangenten sind suppplementär, und die Halbierungslinie des Mittelpunktswinkels geht durch den Tangentenschnittpunkt und halbiert den Tangentenwinkel.

Ferner erhält man die Aussage:

Satz 14. Die Tangentenabschnitte auf zwei vom gleichen Punkte an einen Kreis gehenden Tangenten sind gleichlang.

Frage 32. Zu welchen Vorstellungen über die Beziehungen zweier Tangenten zu den Elementen des von ihnen berührten Kreises gelangt man auf Grund der vorigen Sätze?

Erkl. 65. Bei der beliebigen Geraden AB als Schnittlinie des Kreises lassen sich nach Erkl. 52 und 56 die Schnittwinkel mit dem Kreise aufsuchen. Da nämlich AS und AB die in den Schnittpunkten A und B gezogenen Tangenten sind, so stellen die Winkel zwischen AB und diesen Tangenten auch die Schnittwinkel der Geraden AB mit dem Kreise dar. Wie nun am Schnittpunkt zweier Geraden zweierlei supplementäre Winkelgrössen entstehen, deren jede zweimal auftritt in der Lage zweier Scheitelwinkel, so entstehen auch zwischen einem Kreise und einer Geraden an jedem Schnittpunkte vier Winkel, gemessen durch die vier Winkel zwischen dieser Geraden und der Tangente. Man hat nämlich (siehe Figur 25):

1) den Winkel der Richtung $\overline{AB}$ mit dem Kreisbogen $\widehat{AX}$, gemessen durch den geradlinigen Winkel BAS,

2) den Winkel der Richtung $\overline{AB}$ mit dem Kreisbogen $\widehat{AY}$, gemessen durch den geradlinigen Winkel BAT,

3) den Winkel der Richtung $\overline{AD}$ mit dem Kreisbogen $\widehat{AX}$, gemessen durch den geradlinigen Winkel DAS,

4) den Winkel der Richtung $\overline{AD}$ mit dem Kreisbogen $\widehat{AY}$, gemessen durch den geradlinigen Winkel DAT.

Antwort. 1) Auf Grund der obigen Ergebnisse gelangt man zu der Vorstellung, dass zu je zwei gegebenen Tangenten eines Kreises zwei Berührungspunkte auf diesem Kreise gehören, also auch zwei bestimmte Kreisbogen und eine bestimmte Sehne als Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten. Diese Sehne wird die zum Tangentenschnittpunkte oder zum Tangentenwinkel zugehörige Berührungssehne genannt.

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass zu einer beliebigen Sehne eines Kreises ausser den beiden Radien, den Kreisbogen und dem Mittelpunktswinkel auch zwei ganz bestimmte Tangenten des Kreises gehören und ein bestimmter Tangentenschnittpunkt mit einem Tangentenwinkel, zu welchen jene Sehne Berührungssehne ist.

3) Man gelangt zu der Vorstellung, dass bei einer Umdrehung der aus einem Mittelpunktswinkel und den zugehörigen Bogen, Sehnen, Tangenten,

sowie dem Tangentenschnittpunkt und Tangentenwinkel gebildeten Figur um den Mittelpunkt des Kreises die sämtlichen Elemente dieser Figur die gleiche Grösse behalten, dass also an allen Stellen eines und desselben Kreises wieder gleiche Sehnen, Tangentenabschnitte und Tangentenwinkel entstehen.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass wenn umgekehrt an einem Kreise durch zwei verschiedene Paare von Tangenten gleiche Tangentenwinkel oder gleichgrosse Tangentenabschnitte gebildet werden — dann diese Tangentenschnittpunkte und Tangentenwinkel zur Deckung gebracht werden können durch Umdrehung um den Kreismittelpunkt: ebenso wie gleiche Sehnen, Bogen oder Mittelpunktswinkel durch solche Umdrehung zur Deckung gebracht werden konnten.

5) Man gelangt zu der Vorstellung, dass bei einer Umklappung um die Linie SM als Symmetrieachse zur Deckung kommen müssen ausser (siehe Erkl. 63):

den Tangentenabschnitten SA und SB,

den gleichen Hälften des Tangentenwinkels ASM und BSM,

und den Berührungspunkten A und B, — auch:

die gleichen Hälften der Sehne AB, nämlich AC und BC,

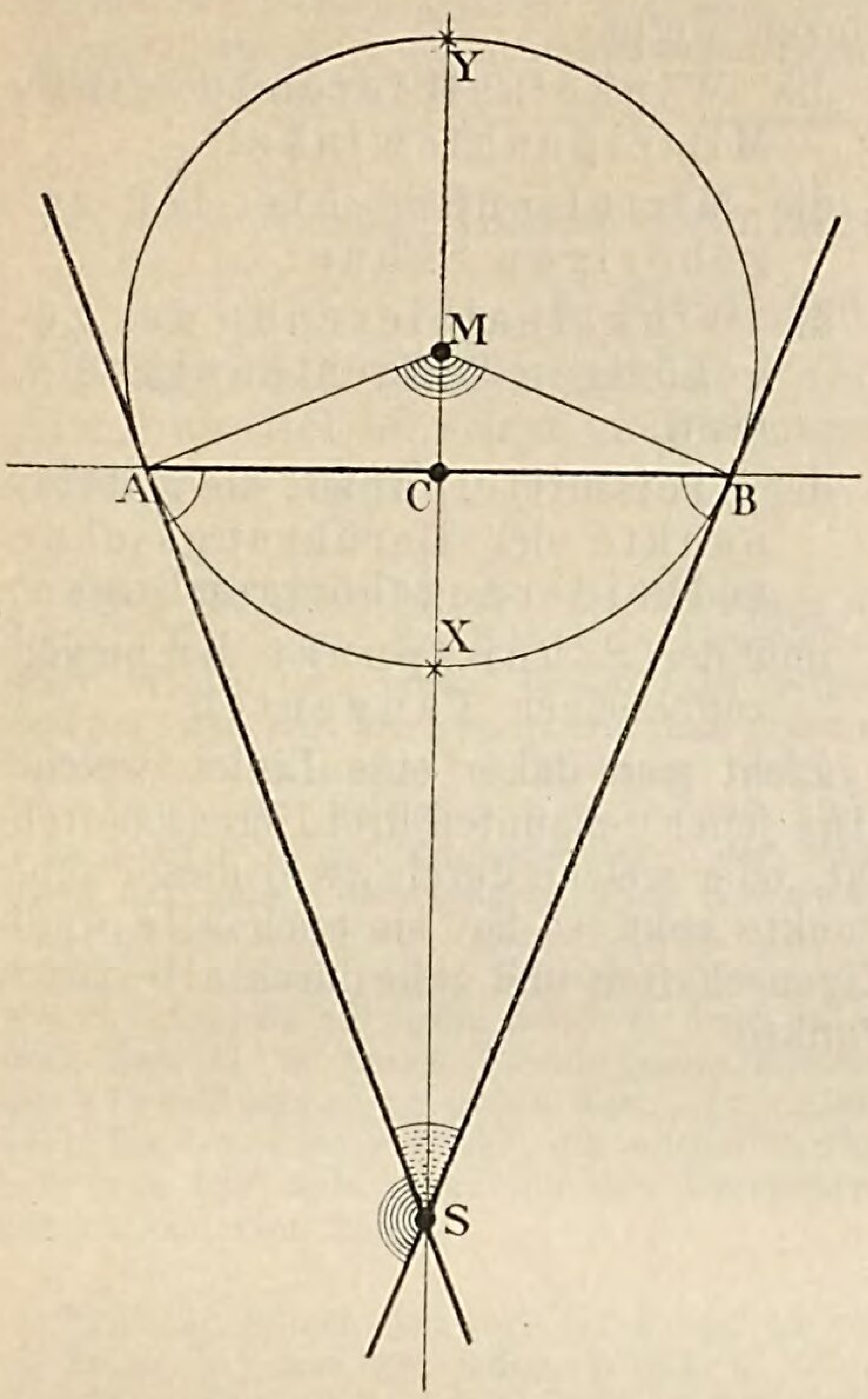
die rechten Winkel in C, nämlich ACS und BCS, sowie ACM und BCM,

die Winkel zwischen Berührungssehne und Tangenten SAC und SBC, sowie deren Nebenwinkel,

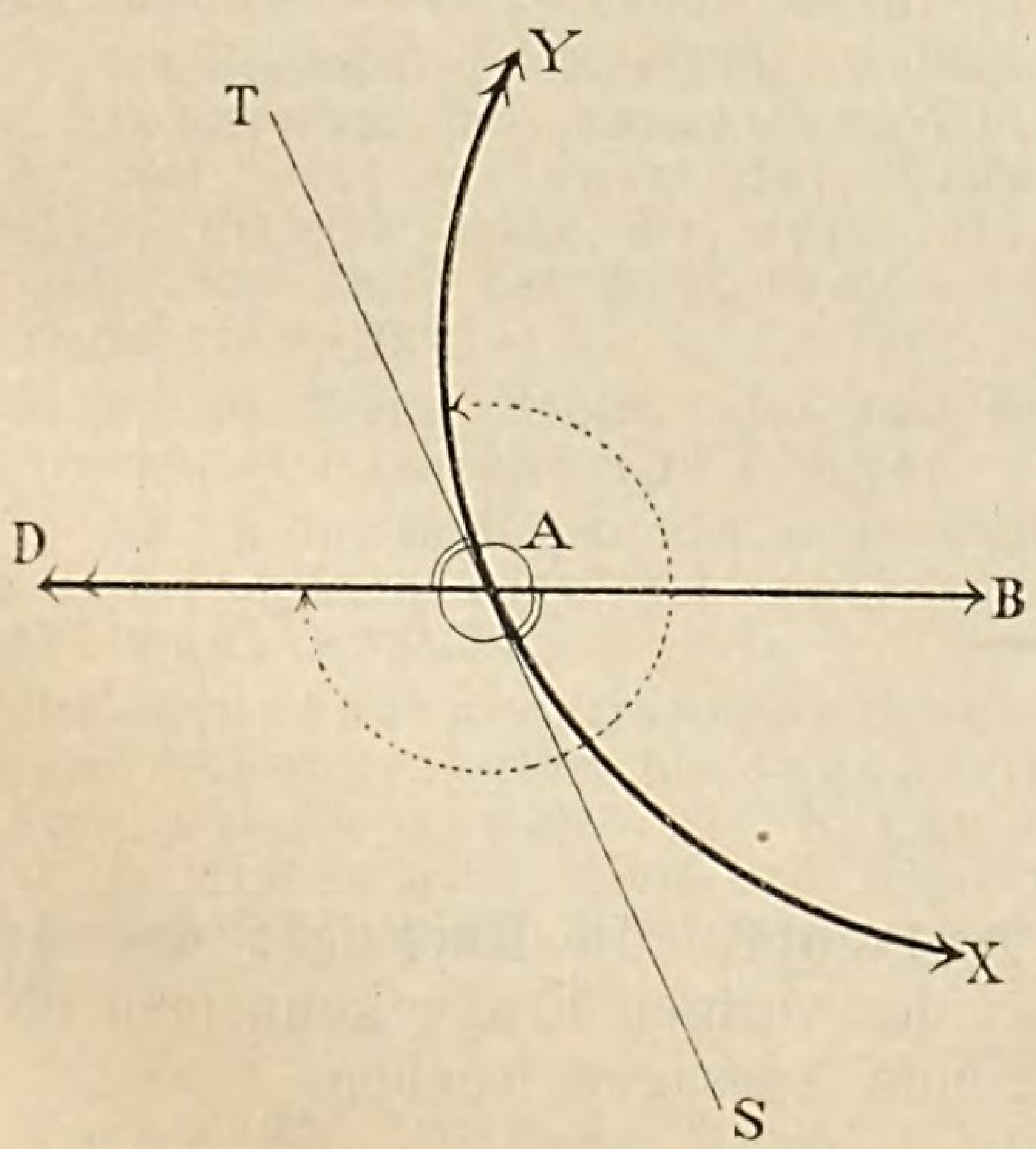
die Kreisbogen AX und BX, sowie AY und BY.

6) Man gelangt zu der Vorstellung, dass bei einem Kreise zusammenfallen in bezw. auf eine und dieselbe gerade Linie $YMCXS$ als Sym-

Figur 24.



Figur 25.



Erkl. 66. Nach der vorigen Erkl. 65 sind also an Figur 25 als gleichgross anzusehen der Winkel der Richtung $\overline{AB}$ mit Bogen $\widehat{AX}$ und derjenige der Richtung $\overline{AD}$ mit dem Bogen $\widehat{AY}$, und ebenso als gleichgross und dem vorigen Winkel supplementär der Winkel

zwischen Richtung $\overline{AB}$ und Bogen $\widehat{AY}$ mit dem Winkel zwischen Richtung $\overline{AD}$ und Bogen $\widehat{AX}$.

Man könnte auch hier je einen überstumpfen Schnittwinkel betrachten zwischen einer der Richtungen AB oder AD mit jedem der benachbarten Kreisbogen, z. B. den in Figur 25 durch das punktierte Bögchen angedeuteten Winkel DAY, jedoch werden bei Besprechung von Winkeln zwischen einem Kreis und einer Geraden stets nur hohle, und auch hier in der Regel nur spitze Winkel unter den vier vorhandenen in Betracht gezogen.

Erkl. 67. Wie aus der Symmetrie der Figur 24 hervorgeht, schneidet eine Sekante einen Kreis in ihren beiden Schnittpunkten auch unter zwei gleichgrossen Schnittwinkeln; es werden nämlich in Figur 24 durch die geradlinigen Winkel SAB und SBA die Schnittwinkel der Geraden AB mit dem Kreise angegeben. Und wie die Richtungen CA und CB und die Kreisbogen AX und BX oder AY und BY symmetrisch sind, so sind auch alle zwischen der Geraden AB an den beiderseitigen Schnittpunkten mit diesen Kreisbogen gebildeten Winkel symmetrisch gleich.

Erkl. 68. Es besteht nicht nur zwischen den Winkeln AMB und ASB die auf Grund des Satzes 13 vorhandene Beziehung, sondern wegen der rechtwinkligen Dreiecke ACM und ACS und MAS lassen sich alle vorhandenen Winkelgrössen auf eine einzige, z. B. CMA, zurückführen. So ist:

$$\sphericalangle CAM = 90^0 - CMA,$$

$$\sphericalangle CAS = 90^0 - \sphericalangle CAM = 90^0 - (90^0 - CMA) = \sphericalangle CMA,$$

$$\sphericalangle CSA = 90^0 - \sphericalangle CAS = 90^0 - CMA = \frac{180 - AMB}{2};$$

u. s. w.

Weitere Ausführungen über diese Winkelgrössen findet man im Abschnitt über Peripheriewinkel.

metrieachse sämtlicher Elemente der ganzen Figur:

die Winkelhalbierende eines Mittelpunktswinkels,

die Mittelsenkrechte der zugehörigen Sehne,

die Winkelhalbierende des zugehörigen Tangentenwinkels, bezw.

der Kreismittelpunkt, die Mittelpunkte der Berührungssehne und beider zugehörigen Bogen,

und der Schnittpunkt der beiden zugehörigen Tangenten.

Zieht man daher eine Linie, welche eine jener genannten drei Eigenschaften hat, oder welche durch zwei dieser fünf Punkte geht, so hat sie auch alle drei Eigenschaften und geht durch alle fünf Punkte.

Frage 33. Welche Aussagen über die Berührungssehne zweier Tangenten ergeben sich noch aus der Antwort der vorigen Frage?

Antwort. In Rücksicht der Antwort der vorigen Frage kann man noch folgende Aussagen machen:

Satz 15. Zwei Tangenten eines Kreises bilden mit ihrer Berührungssehne beiderseits gleichgrosse Winkel; die Mittelsenkrechte der Sehne geht durch den Schnittpunkt der beiden zugehörigen Tan-

Erkl. 69. Sowohl die spitzen Winkel SAB und SBA, als auch deren stumpfe Nebenwinkel zwischen den Tangenten und der Sehne sind gleichgross, die Sehne wird Grundseite in dem gleichschenkligen Dreieck der Tangentenabschnitte.

Wird der Bogen $\widehat{AXB}$ und mit ihm die Sehne $\overline{AB}$ immer grösser, so fällt zuletzt $\overline{AB}$

mit dem Durchmesser zusammen, die Tangenten *AS* und *BS* werden parallel, und man erhält als besonderen Fall des nebenstehenden Satzes wieder den Satz 12.

genten und halbiert den Winkel derselben.

3) Ueber einen Kreis und einen Winkel.

a) Ueber den Peripheriewinkel.

Frage 34. Ueber welche Peripheriewinkel ist schon im Bisherigen gehandelt worden?

Erkl. 70. Nach der Antwort der Frage 44 des II. Teiles ist ein Peripheriewinkel jeder Winkel bei einem Kreise, der seinen Scheitel auf der Kreisperipherie hat. Dabei können dann entweder beide Schenkel Sehnen sein, oder ein Schenkel Sehne und einer Tangente. Ein Peripheriewinkel der letzteren Art heisst insbesondere auch Sehnentangentenwinkel oder Berührungswinkel. Dass beide Schenkel Tangenten wären, ist nicht allgemein möglich, denn da es nach Satz 11 in einem Punkte eines Kreises nur eine Tangente geben kann, so müsste dann der betrachtete Winkel ein solcher von 0⁰ oder von 180⁰ sein, was nur bei Grenzübergängen eintreten kann.

Erkl. 71. Nach Antwort der Frage 46 des II. Teiles hat man bei jedem Winkel beim Kreise, also auch sowohl beim allgemeinen Peripheriewinkel, wie beim Sehnentangentenwinkel zu unterscheiden:

1) den Bogenteil der Kreislinie, welcher in den Innenraum des betrachteten Winkels fällt, oder „auf welchem der Winkel steht“; derselbe heisst der zugehörige Bogen oder auch der Standbogen des Peripheriewinkels;

2) die zu diesem Bogen, also auch zum Peripheriewinkel zugehörige Sehne;

3) den zu diesem Bogen und seiner Sehne, also auch zum Peripheriewinkel zugehörigen Mittelpunktswinkel.

Bei einem Sehnentangentenwinkel ist der eine Schenkel selbst die zugehörige Sehne; und der zugehörige Bogen beginnt im Winkelscheitel selbst und reicht bis zum andern Schnittpunkt dieser Sehne mit dem Kreise.

Antwort. Von den im Bisherigen behandelten Winkeln beim Kreise sind Peripheriewinkel:

1) der Winkel *SAM* oder *SBM* in Figur 24, denn derselbe hat seinen Scheitel *A* bezw. *B* auf der Peripherie des Kreises. Um seinen zugehörigen Bogen zu finden, hat man seinen Schenkel *AM* bezw. *BM* zum Schnitt mit dem Kreise zu verlängern. Da dieser Schenkel aber Radius ist, so schneidet er bei seiner Verlängerung einen Halbkreis aus. Für den Peripheriewinkel *SAM* ist also die zugehörige Sehne ein Durchmesser, dessen Mittelpunktswinkel ein gestreckter von 180⁰, der zugehörige Bogen ein Halbkreis, oder ein Bogen von 180⁰, und die Grösse des Winkels selbst ist nach Satz 11 ein rechter Winkel oder 90⁰.

2) Der in der Antwort der Frage 32 und in Erkl. 68 betrachtete Winkel *SAB* bezw. *SBA* ist ebenfalls ein Peripheriewinkel, und zwar ebenso wie der ebengenannte von der besondern Art der Sehnentangentenwinkel. Seine zugehörige Sehne ist beidemale $\overline{AB}$, der Standbogen ist $\overset{\frown}{AXB}$, dessen Mittelpunktswinkel ist *AMB*, und die Grösse des Winkels *SAB* ist nach Erkl. 68 gleich *CMA*, also gleich der Hälfte des Mittelpunktswinkels *AMB*.

Frage 35. Welche Aussage über die im Bisherigen betrachteten Peripheriewinkel kann man in Rücksicht der vorigen Antwort aufstellen?

Erkl. 72. Es ist der Gegenstand der folgenden Fragen und Antworten, die allgemeine

Antwort. Auf Grund der Antwort der vorigen Frage ergibt sich die Aussage:

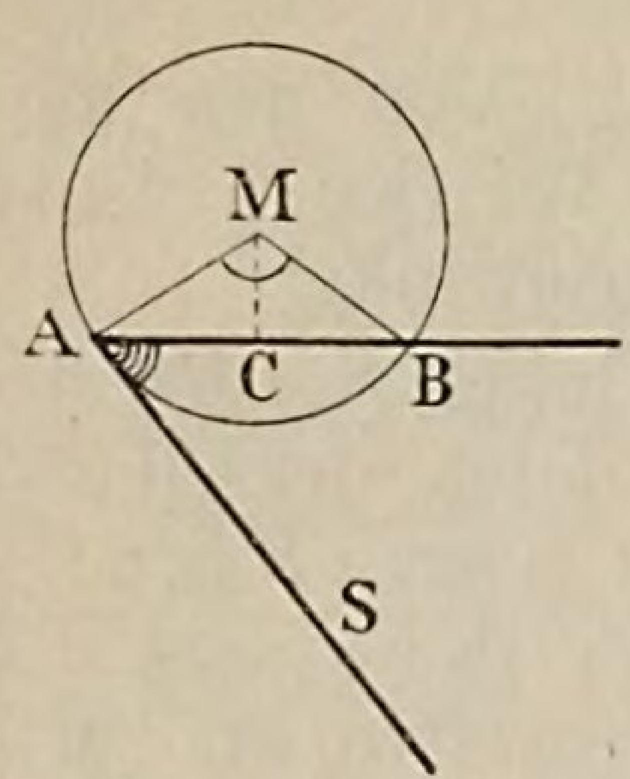
Satz 16. Der Peripheriewinkel ist halb so gross als der mit

Gültigkeit der nebenstehenden Behauptung für alle Arten von Peripheriewinkeln vollständig nachzuweisen.

ihm über demselben Bogen (oder über derselben Sehne) stehende Mittelpunktswinkel.

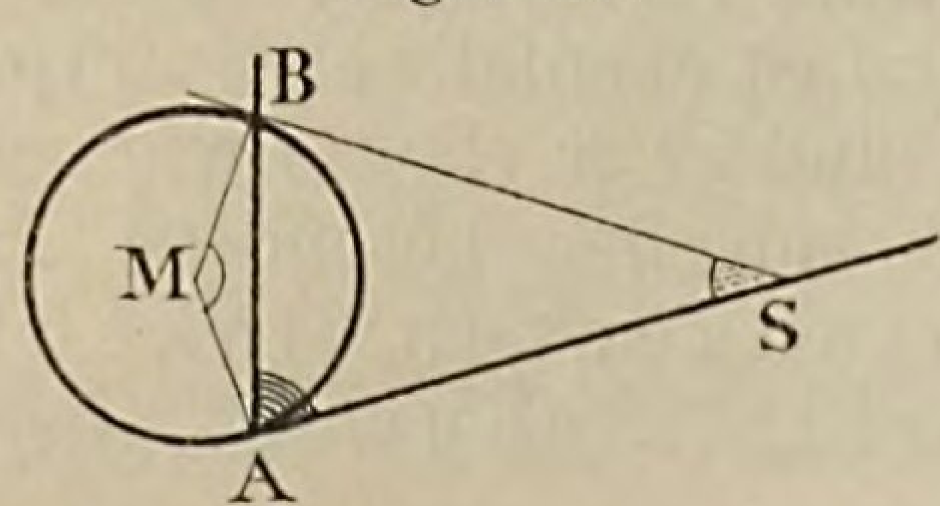
Frage 36. Wie lässt sich die allgemeine Richtigkeit des Satzes 16 für alle Sehnentangentenwinkel beweisen?

Figur 26.



Erkl. 73. Von den nebenstehenden Beweisen des Satzes 16 ist der erste derjenige, welcher die einfachsten Hilfsmittel benutzt. Der fünfte beruht auf dem von der Kreislehre ebenfalls unabhängigen Satze über die Gleichheit von Winkeln mit paarweise senkrechten Schenkeln, der zweite benutzt die Sätze 13 und 15 über den Tangentenwinkel. Im dritten und vierten Beweis aber ist der Satz 60 des III. Teiles zu Grunde gelegt, welcher selbst ein besonders einfacher Fall des allgemeinen Peripheriewinkelsatzes ist. Andere Beweise des Satzes über den Sehnentangentenwinkel benutzen den Satz über den allgemeinen Peripheriewinkel zweier Sehnen als Grundlage und können daher erst nach diesem Satze behandelt werden.

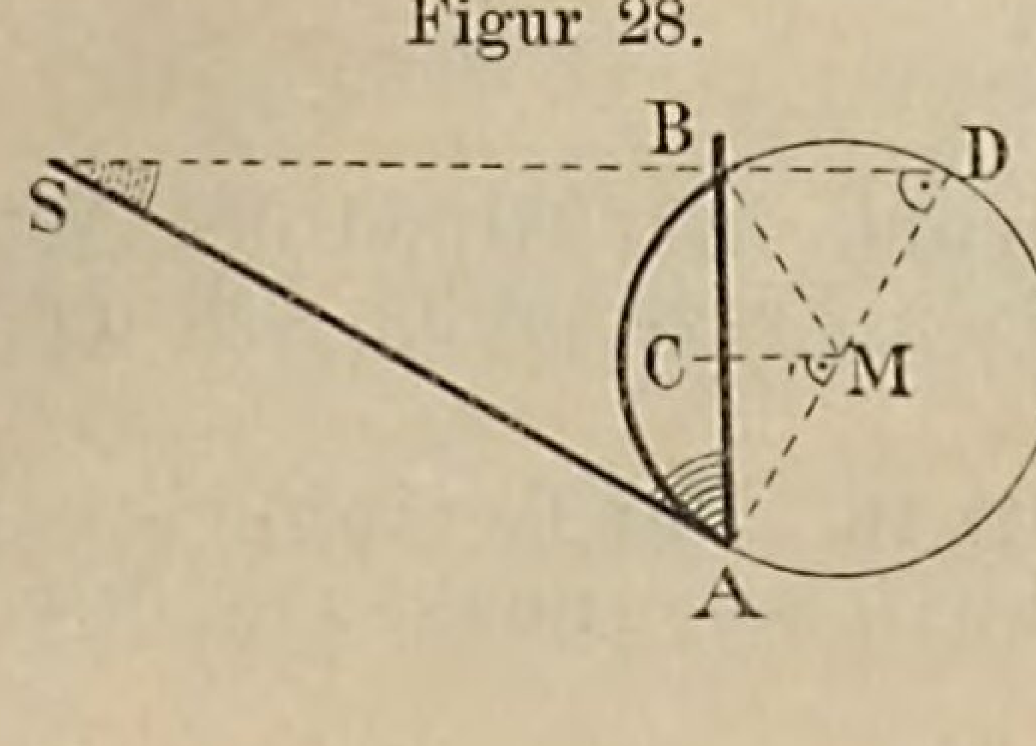
Figur 27.



Erkl. 74. Im gleichschenkligen Dreieck ist ein Basiswinkel die Hälfte des Supplementwinkels zum Winkel an der Spitze des Dreiecks, also in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise:

$$\alpha = \beta = \frac{180 - \gamma}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}.$$

Figur 28.



Antwort. Die allgemeine Richtigkeit des Satzes 16 lässt sich für Sehnentangentenwinkel oder Berührungswinkel auf folgende verschiedene Arten beweisen:

Beweis I.

Ist AS in Figur 26 eine beliebige Tangente und AB eine beliebige Sehne durch ihren Berührungspunkt, so ist $\widehat{AB}$ der zum Berührungswinkel SAB zugehörige Bogen und AMB der zugehörige Mittelpunktswinkel. Fällt man nun vom Mittelpunkte M auf die Sehne AB eine Senkrechte MC, so halbiert diese nach Satz 5 den Mittelpunktswinkel AMB, so dass $\sphericalangle AMC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$. In dem rechtwinkligen Dreieck MAC ist nun derselbe Winkel AMC Komplementwinkel zum $\sphericalangle MAC$, also:

$$1) \ldots \sphericalangle AMC = 90^0 - \sphericalangle MAC$$

Da aber ferner nach Satz 11 auch der Winkel MAS ein Rechter sein muss, so ist auch der zu untersuchende Berührungswinkel:

$$2) \ldots \sphericalangle SAB = 90^0 - \sphericalangle MAC$$

Durch Zusammenfassung der beiden Gleichungen 1) und 2) erhält man daher:

$$\sphericalangle SAB = \sphericalangle AMC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Beweis II.

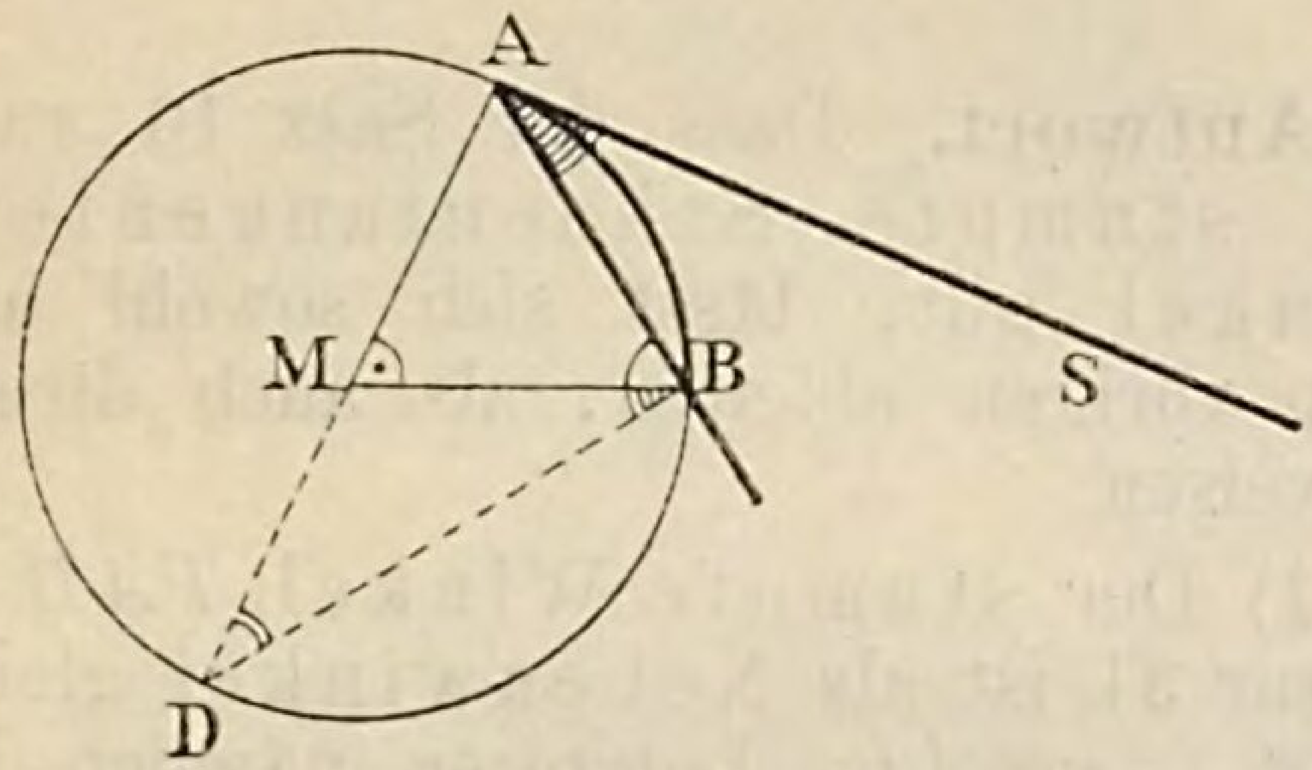
Zieht man in Figur 27 im andern Endpunkte der Sehne AB auch noch die zweite zugehörige Tangente BS, so wird nach Satz 15 der Winkel $ASB = 180^0 - AMB$. Da aber nach Satz 15 das Dreieck ASB ein gleichschenkliges ist, so wird als Basiswinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks der untersuchte Berührungswinkel:

$$\sphericalangle SAB = \frac{180^0 - ASB}{2} = \frac{180^0 - (180^0 - AMB)}{2} = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Erkl. 75. In dem rechtwinkligen Dreieck SAD in Figur 28 ist SD die Hypotenuse, AB die Höhe auf dieselbe, also der spitze Winkel BAS zwischen Höhe und der einen Kathete gleich dem spitzen Winkel ADS zwischen der andern Kathete und der Hypotenuse.

Die Gerade AD schneidet die beiden Parallelen DB und MC unter den Winkeln ADB und AMC. Da aber letztere ihrer Lage nach korrespondierende Winkel sind, so sind sie gleichgross.

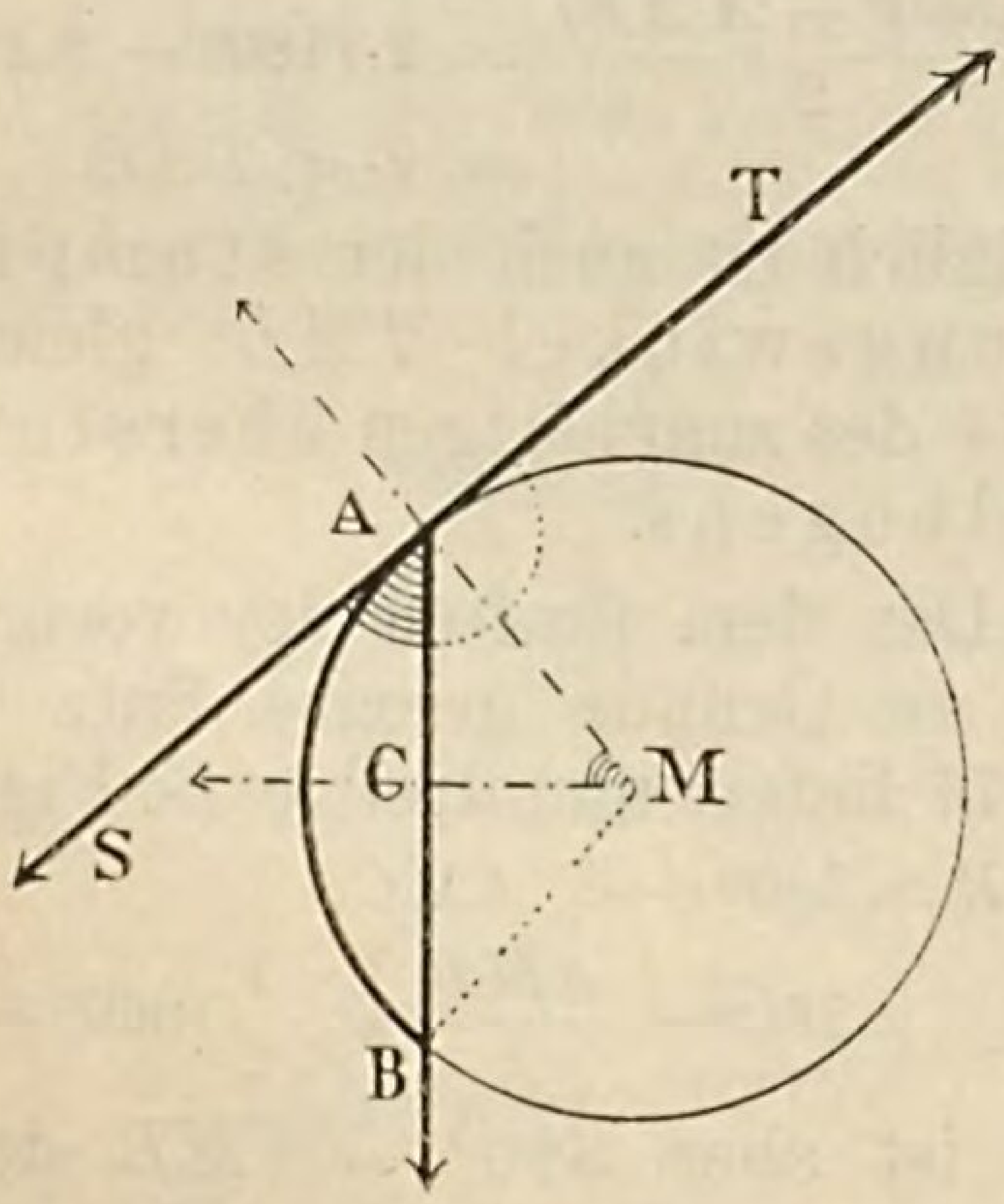
Figur 29.



Erkl. 76. Beim gleichschenkligen Dreieck ist nach Antwort der Frage 96 des III. Teiles der Aussenwinkel an der Spitze gleich der Summe der beiden gleichgrossen Basiswinkel, also doppelt so gross wie ein einzelner der letzteren.

Umgekehrt ist also ein einzelner Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks halb so gross als der Aussenwinkel an der Spitze desselben. (Vergl. Aufgabe 51 der Aufgabensammlung am Schlusse des II. Teiles.)

Figur 30.



Erkl. 77. Lehrsatz 39 des II. Teiles hat nach Erkl. 129 daselbst folgenden vollständigen Inhalt:

Der Winkel zweier Senkrechten zu den Schenkeln eines Winkels ist diesem gleich oder supplementär, je nachdem die rechten Winkel im gleichen oder entgegengesetzten Drehungssinne von den Schenkeln durchlaufen sind.

Beweis III.

Zieht man in Figur 28 den Durchmesser AMD durch den Winkelscheitel A, so wird nach Satz 60 des III. Teiles der Winkel ABD ein rechter. Verlängert man also DB zum Schnittpunkt S mit der Tangente und zieht zu DS die Parallele MC durch M, so wird auch diese letztere senkrecht zu AB, halbiert also den Mittelpunktswinkel AMB, so dass $AMC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$ und auch als korrespondierender Winkel $= \sphericalangle ADB$. Nun gehört aber der Winkel ASB sowohl dem (bei B) rechtwinkligen Dreieck ABS an, als dem (bei A) rechtwinkligen Dreieck DAS, folglich ist:

$$\sphericalangle SAB = 90^0 - \sphericalangle ASD = \sphericalangle ADB$$
$$= \sphericalangle AMC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Beweis IV.

Zieht man in Figur 29 den Durchmesser AD und verbindet B mit M und D, so ist wegen Satz 60 des III. Teiles das Dreieck ABD bei D rechtwinklig, also $\sphericalangle ADB$ das Komplement zu $\sphericalangle BAD$ und wegen Satz 11 ebenso $\sphericalangle SAB$ Komplement zu $\sphericalangle BAD$, also:

$$1) \ldots \sphericalangle SAB = \sphericalangle ADB.$$

Nun ist aber MBD ein gleichschenkliges Dreieck, AMB der Aussenwinkel an dessen Spitze, also nach Antwort der Frage 96 des III. Teiles als Basiswinkel desselben:

$$2) \ldots \sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt wiederum:

$$\sphericalangle SAB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Beweis V.

Zeichnet man in Figur 30 zu dem Sehnentangentenwinkel SAB den zugehörigen Mittelpunktswinkel AMB und den Radius MC, welcher diesen halbiert, so ist MC nach Satz 5 senkrecht zu AB. Es ist also jeder Schenkel des Winkels AMC senkrecht auf einem der Schenkel des Winkels SAB, nämlich $AM \perp SA$ und $MC \perp AB$: folglich ist nach Satz 39

In Figur 30 ist die eine Senkrechte AM gerade im Scheitel des einen Winkels senkrecht auf dessen Schenkel AS.

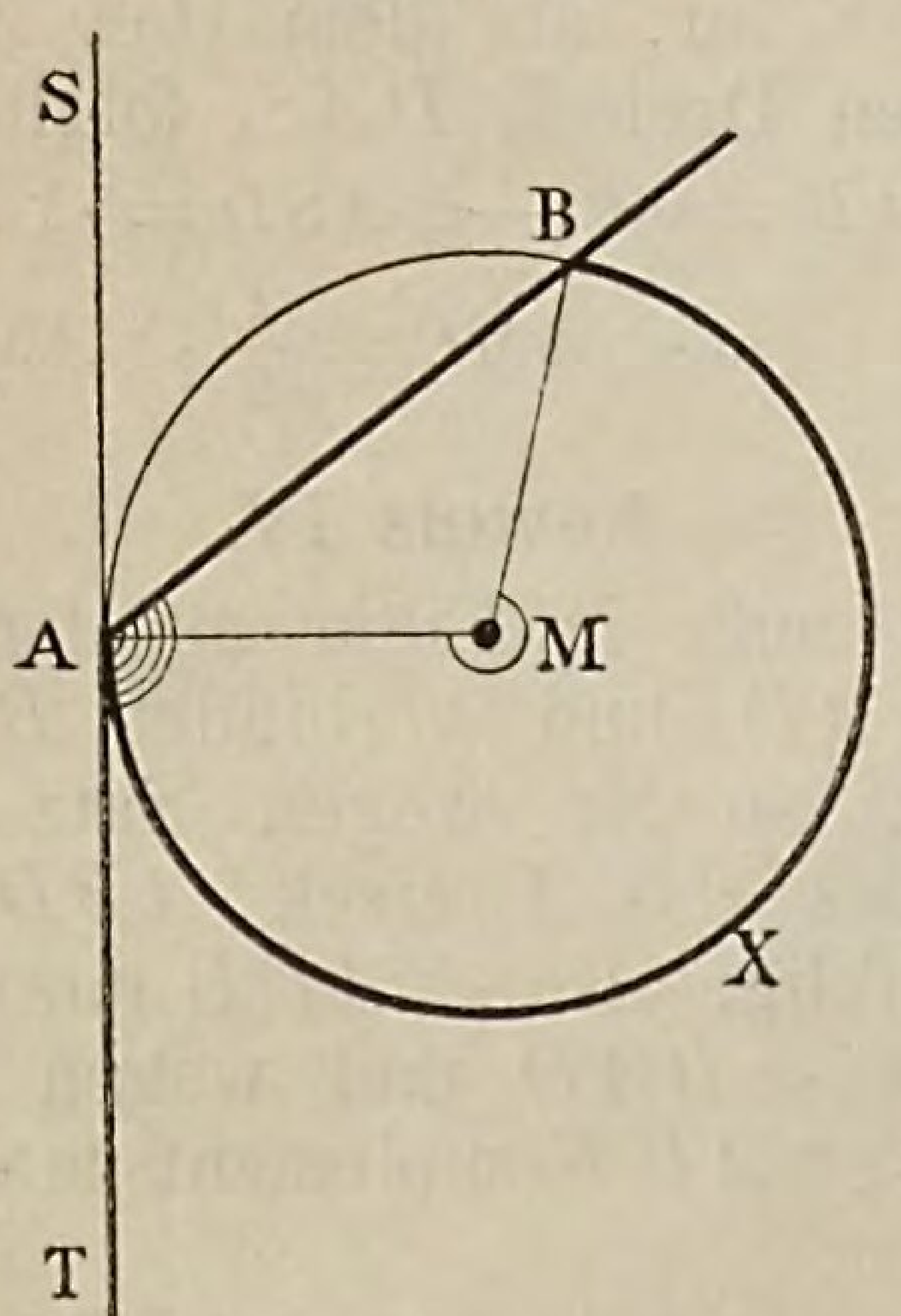
des II. Teiles auch der Winkel der ersten Richtungen gleich dem der zweiten, nämlich:

$$\sphericalangle SAB = \sphericalangle AMC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB.$$

Weitere Beweise desselben Satzes findet man in der Antwort der Frage 39.

Frage 37. Besteht die in Satz 16 ausgesprochene Beziehung auch für den stumpfen Winkel zwischen einer Tangente und einer Sehne?

Figur 31.



Antwort. Dass der Satz 16 auch für stumpfe Sehnentangentenwinkel gilt, lässt sich sowohl aus dem vorigen ableiten, als auch direkt beweisen.

1) Der stumpfe Winkel TAB in Figur 31 ist als Nebenwinkel gleich $180^0 - \sphericalangle SAB$. Letzterer, nämlich der spitze Winkel SAB, ist nach den vorigen Beweisen gleich der Hälfte des stumpfen Mittelpunktswinkels AMB. Zu dem stumpfen Berührungswinkel TAB gehört aber als zugehöriger Kreisbogen der grosse Bogen $\overset{\frown}{AXB}$ und als zugehöriger Mittelpunktswinkel der überstumpfe Winkel AMB. Letzterer ist gleich $360^0 - \sphericalangle AMB$, also gleich:

$$\frac{2\,(360^0 - AMB)}{2} = 2 \cdot (180^0 - SAB)$$
$$= 2 \cdot \sphericalangle TAB.$$

Folglich ist auch der stumpfe Berührungswinkel TAB gleich der Hälfte des zugehörigen überstumpfen Standbogens.

2) Der dem fünften der vorigen Beweise zu Grunde gelegte Satz in der Erkl. 77 liefert unmittelbar (s. Figur 30):

$$\sphericalangle TAB = 180^0 - \sphericalangle AMC$$
$$= 180^0 - \frac{AMB}{2} = \frac{1}{2}(360^0 - AMB).$$

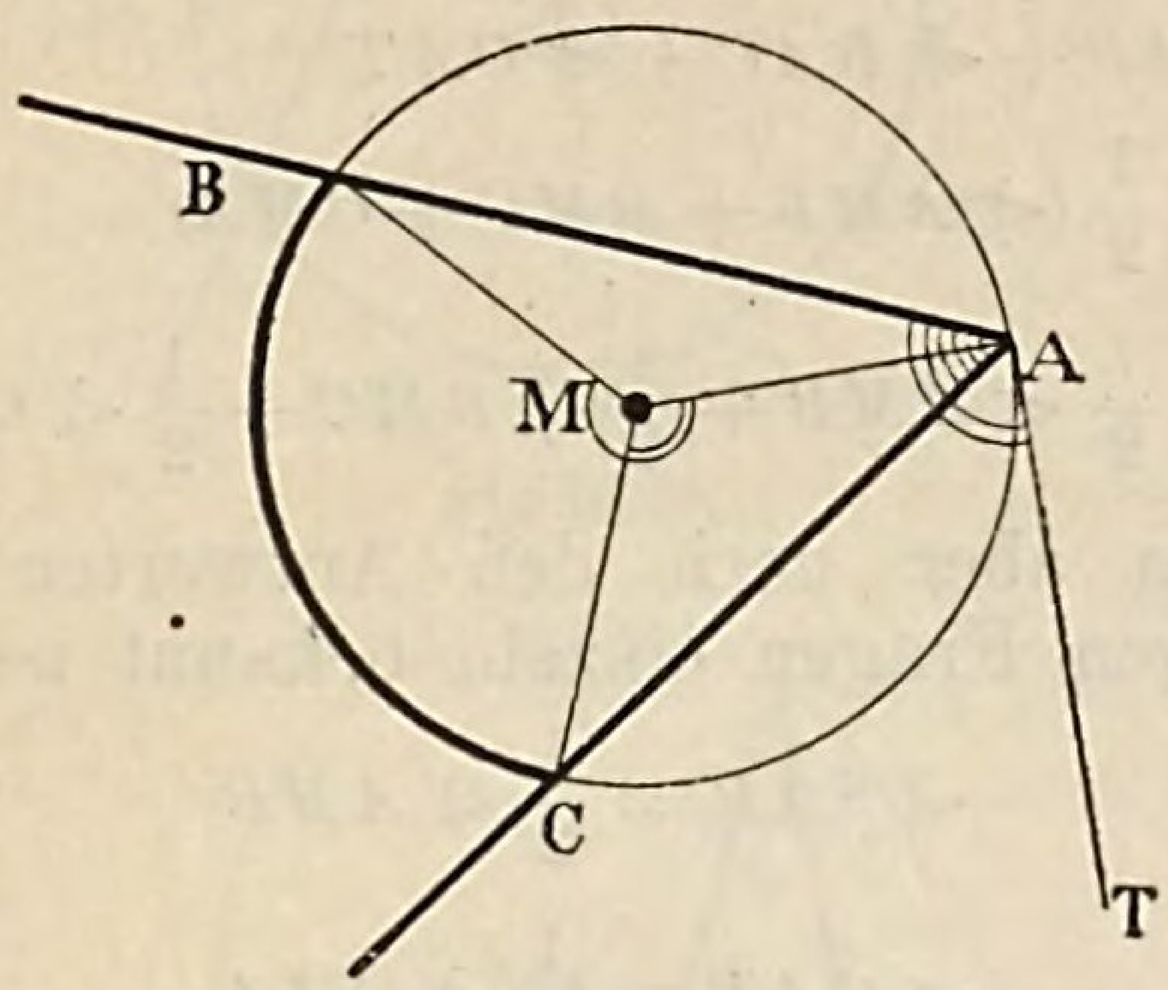
Es ist aber $360^0 - AMB$ der zum Berührungswinkel TAB gehörige Mittelpunktswinkel.

Erkl. 78. Als Grenzlage zwischen dem spitzen und stumpfen Berührungswinkel erscheint wieder der rechte Winkel zwischen Tangente und Radius. Während zum spitzen Berührungswinkel ein hohler Mittelpunktswinkel und ein Standbogen im ersten oder zweiten Quadranten gehört, so gehört zum stumpfen Sehnentangentenwinkel ein überstumpfer Mittelpunktswinkel und ein Standbogen im dritten oder vierten Quadranten. Zum rechten Winkel zwischen Tangente und Radius aber gehört der gestreckte Mittelpunktswinkel gleich dem Durchmesser, und als Standbogen der Halbkreis.

Erkl. 79. Während in Figur 30 der rechte Winkel zwischen den Richtungen der Winkelschenkel AS gegen MA bezw. AB gegen MC beidemale gegen den Uhrzeiger gemessen sind, wird der Winkel AT gegen MA im negativen Drehungssinne durchlaufen, während AB gegen MC positiv bleibt. Daher ist auch jetzt der Winkel bei M nicht mehr gleichgross, sondern supplementär dem Winkel TAB.

Frage 38. Wie lässt sich die allgemeine Richtigkeit des Satzes 16 für solche Peripheriewinkel beweisen, die nicht Sehnentangentenwinkel sind?

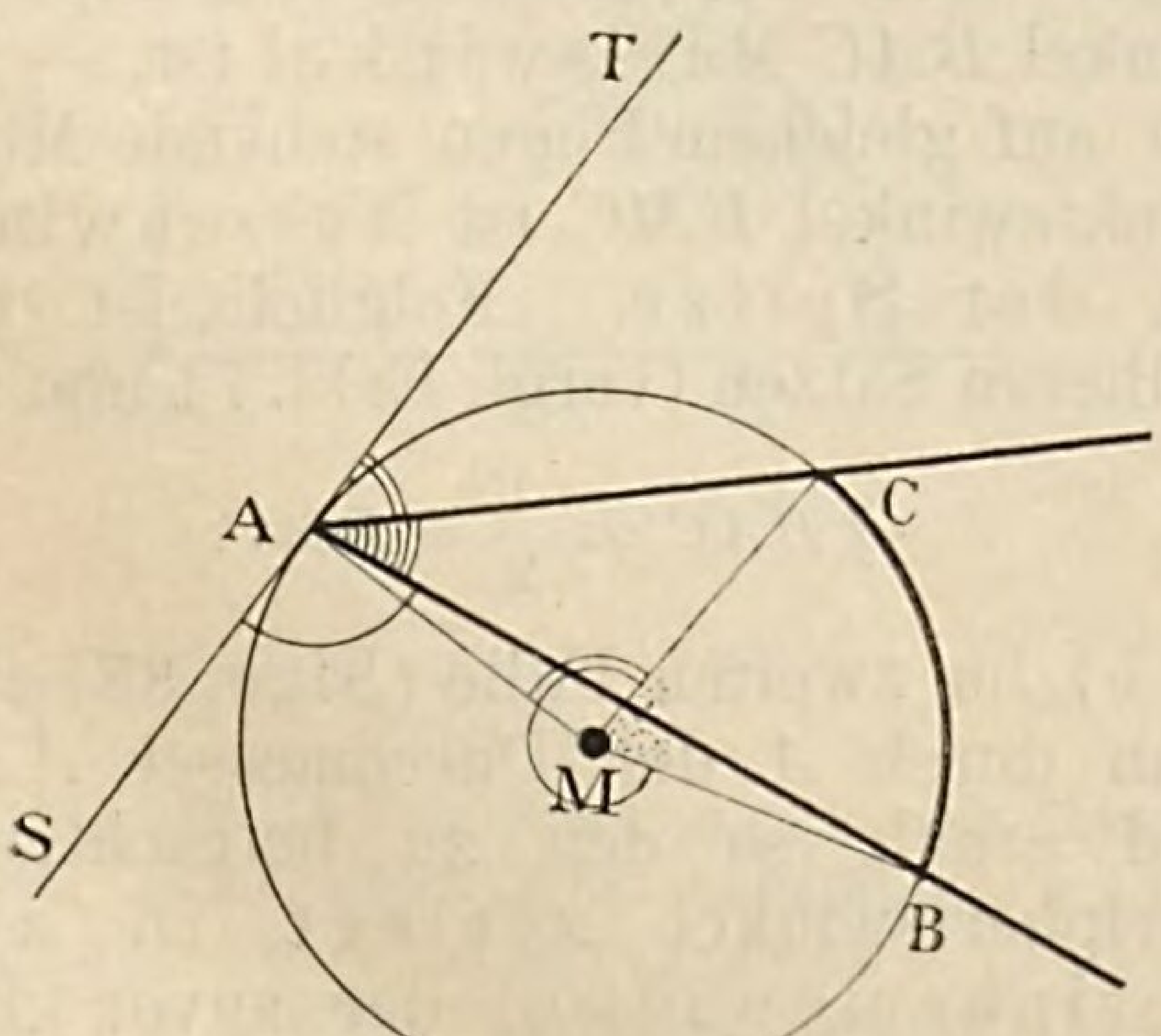
Figur 32.



Erkl. 80. Von den nebenstehenden Beweisen des Satzes 16 für allgemeine Peripheriewinkel sind der erste und zweite gestützt auf die Kenntnis desselben Satzes für den Sehnentangentenwinkel und können daher nur nach Durchführung dieses ersteren erbracht werden. Der dritte, vierte und fünfte dagegen sind von jenem unabhängig und können daher auch für sich selbständig aufgestellt werden. Darunter enthält der dritte die ursprünglichsten Hilfsmittel, entnommen der Lehre vom gleichschenkligen Dreieck; der vierte dagegen stützt sich auf den Satz 60 des III. Teiles, welcher selbst ein besonderer Fall dieses selben Satzes ist.

Der letzte Beweis aber beruht, wie der letzte der Beweise in der Antwort der Fragen 36 und 37, nur auf dem Satze von der gleichen bezw. supplementären Grösse von Winkeln mit gleichgerichtet oder ungleichgerichtet senkrechten Schenkeln.

Figur 33.



Antwort. Die Richtigkeit des Satzes 16 lässt sich für allgemeine Peripheriewinkel auf folgende verschiedene Arten beweisen:

Beweis I.

Sind AB und AC in Figur 32 zwei beliebige Sehnen durch denselben Kreispunkt A, so ist der Winkel BAC der zu betrachtende Peripheriewinkel, Bogen $\widehat{BC}$ der zugehörige Bogen oder Standbogen und $\sphericalangle BMC$ der zugehörige Mittelpunktswinkel. Zieht man nun im Punkte A den Radius und die Tangente nach der einen Richtung, z. B. AT, so bildet diese Tangente mit jedem Schenkel des Peripheriewinkels einen Sehnentangentenwinkel, und der Peripheriewinkel BAC wird die Differenz der beiden Sehnentangentenwinkel TAB und TAC, also:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle TAB - TAC.$$

Nun ist nach den Antworten der beiden vorigen Fragen der Sehnentangentenwinkel TAB gleich der Hälfte des überstumpfen Mittelpunktswinkels AMB, der Sehnentangentenwinkel TAC gleich der Hälfte des stumpfen Mittelpunktswinkels AMC, also ist $\sphericalangle BAC$ als Differenz der beiden Sehnentangentenwinkel auch gleich der Differenz der Hälften dieser Mittelpunktswinkel, also gleich der halben Differenz des überstumpfen Winkels AMB und des Winkels AMC, also gleich der Hälfte des Winkels BMC.

Beweis II.

Zieht man im Punkte A (Figur 33) die Tangente nach beiden Richtungen, so entstehen im Punkte A drei Peripheriewinkel, nämlich ausser dem betrachteten Peripheriewinkel BAC über Bogen BC noch beiderseits je ein Sehnentangentenwinkel: $\sphericalangle TAC$ über Bogen AC, und $\sphericalangle SAB$ über Bogen AB. Ueber denselben Bogenstücken BC, AC, AB stehen auch die drei Mittelpunktswinkel BMC,

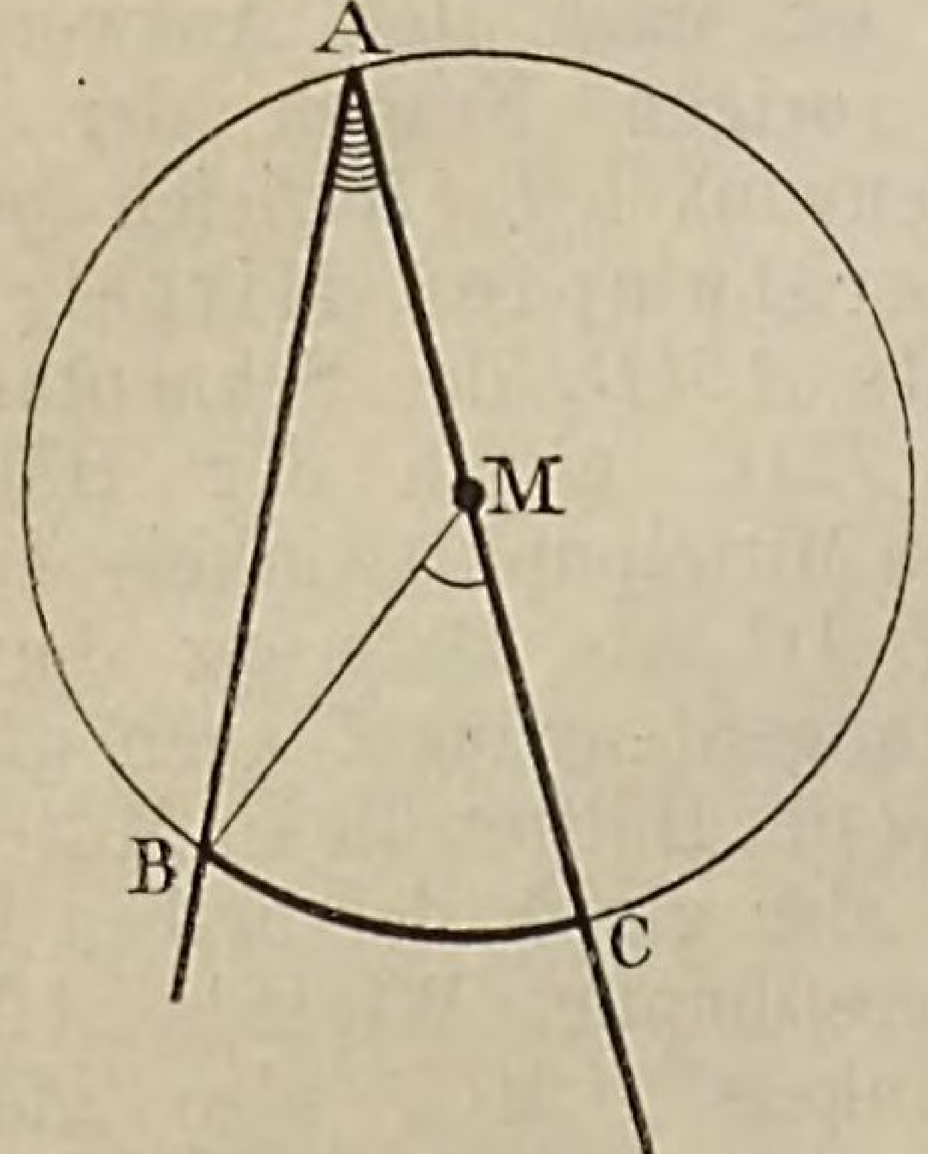
Erkl. 81. Auch im Beweis I hätte man bei Figur 32 statt der Richtung AT der Tangente die Richtung AS wählen können; dann wäre der Sehnentangentenwinkel SAC ein stumpfer, und dessen zugehöriger Mittelpunktswinkel AMC überstumpf geworden.

Wird in Figur 32 der Beweis II durchgeführt, so sind die beiden Sehnentangentenwinkel SAB und TAC spitze, und es treten keine überstumpfen Mittelpunktswinkel auf.

Wird dagegen an Figur 33 der Beweis I durchgeführt, so entstehen bei der Wahl der Tangentenrichtung AT ebenfalls nur zwei spitze Sehnentangentenwinkel, also keine überstumpfen Mittelpunktswinkel; bei der Wahl der Tangentenrichtung AS aber würden sowohl SAB als SAC stumpfe Sehnentangentenwinkel werden, und ihre beiden zugehörigen Mittelpunktswinkel auf den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{ABC}$ zu überstumpfen Winkeln werden.

Will man daher das Auftreten überstumpfer Winkel etwa ganz vermeiden, so hätte man den Beweis I anzuwenden für Figuren wie Figur 33, wo der Kreismittelpunkt ausserhalb des Winkels liegt; dagegen den Beweis II für Figuren wie Figur 32, wo der Kreismittelpunkt im Innern des betrachteten Peripheriewinkels liegt.

Figur 34.



Erkl. 82. Für die Beweise I und II bringt der Fall der Figur 34 keine besonderen Umstände mit sich. Man erhält für den Winkel SAB in Figur 33 einen rechten Winkel, die Radien MA und MB daselbst fallen mit dem Winkelschenkel AB zusammen, aber der Gang beider Beweise bleibt völlig ungeändert.

AMC und der überstumpfe AMB. Jene drei Peripheriewinkel bei A bilden zusammen einen gestreckten Winkel von 180^0, diese drei Mittelpunktswinkel zusammen einen Vollwinkel von 360^0. Es ist also jedenfalls die Summe:

$$\sphericalangle SAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAT$$
$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle AMB + BMC + CMA)$$
$$= \frac{1}{2}\sphericalangle AMB + \frac{1}{2}\sphericalangle BMC + \frac{1}{2}\sphericalangle CMA.$$

Da aber nach den Antworten der vorigen Fragen einzeln bekannt ist:

$$\sphericalangle SAB = \frac{1}{2}\sphericalangle AMB$$

und

$$\sphericalangle CAT = \frac{1}{2}\sphericalangle CMA,$$

so kann man auf beiden Seiten der vorigen Gleichung das erste und dritte Glied als beiderseits gleichgrosse Glieder wegnehmen, und man behält übrig:

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BMC.$$

Beweis III.

Man betrachte getrennt von einander die drei Fälle, dass der Kreismittelpunkt a) auf einem der Schenkel (Figur 34), b) zwischen beiden Schenkeln (Figur 35), c) ausserhalb der Schenkel (Figur 36) des betrachteten Peripheriewinkels liege.

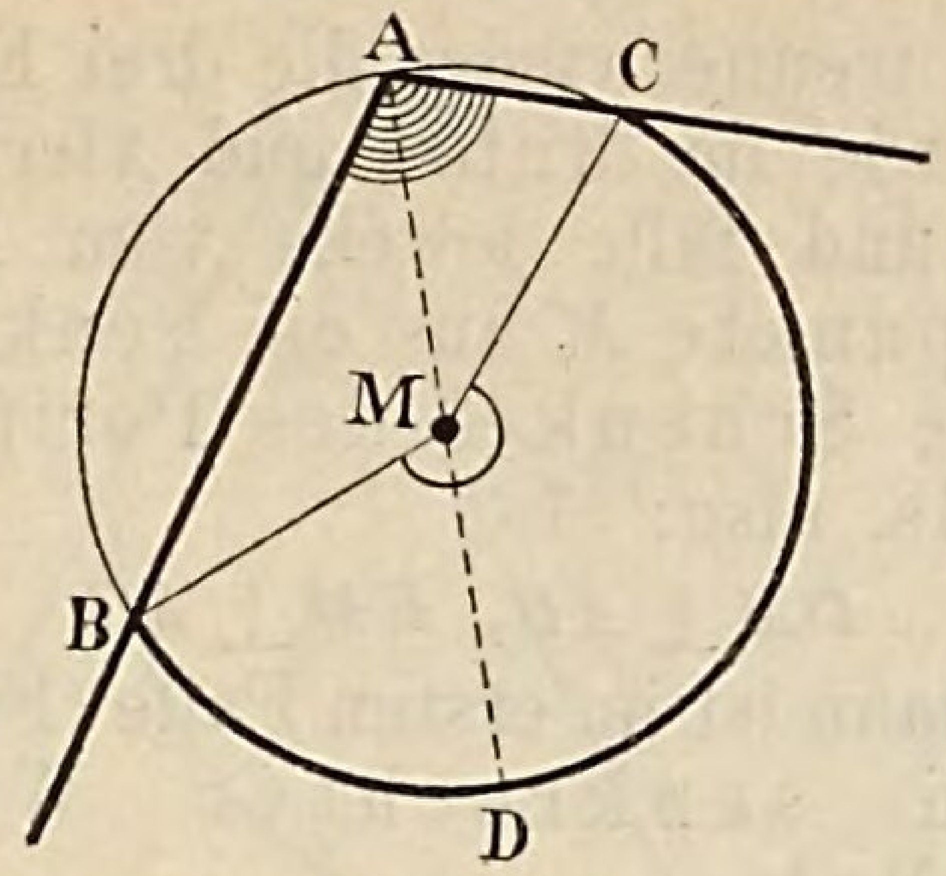
a) Im ersten Falle (Figur 34) ist ABM ein gleichschenkliges Dreieck, worin der betrachtete Peripheriewinkel BAC Basiswinkel ist, — und der auf gleichem Bogen stehende Mittelpunktswinkel BMC ist Aussenwinkel an der Spitze. Folglich ist nach früheren Sätzen (vergl. Erkl. 74 und 76):

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BMC.$$

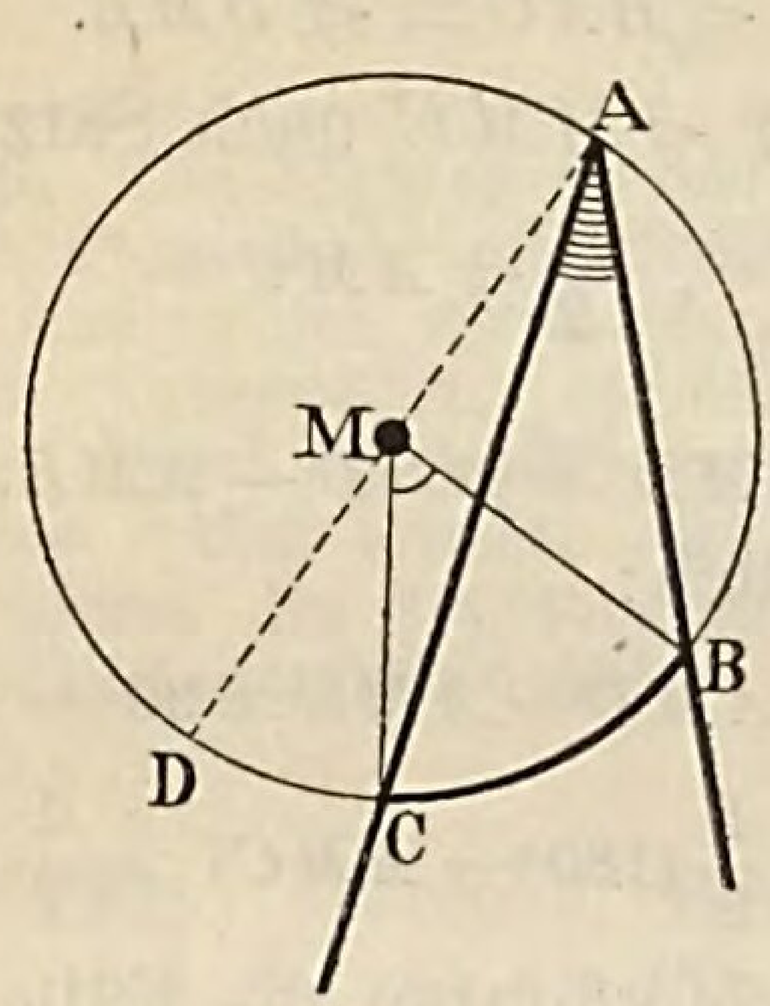
b) Im zweiten Falle (Figur 35) ziehe man durch A den Durchmesser AMD, und erhält so den zu betrachtenden Peripheriewinkel zerlegt in zwei Peripheriewinkel der zuvor in a) betrachteten Art, nämlich:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC.$$

Figur 35.

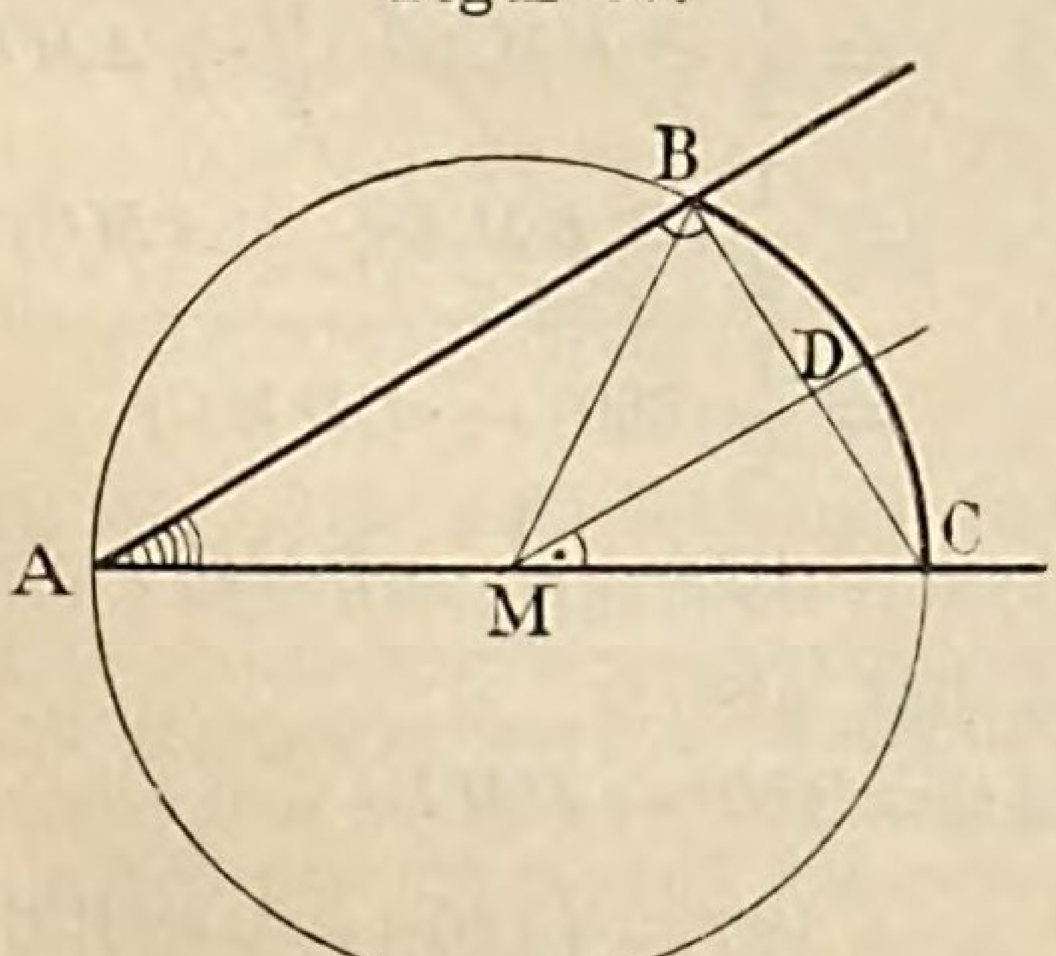


Figur 36.



Erkl. 83. In den Figuren zum Beweis I und II sind die beiden Fälle (*b*) und (*c*) dargestellt, nämlich in Figur 32 Fall (*b*), in Figur 33 Fall (*c*), jedoch ist beidemale zum Zwecke der Allgemeinheit des Beweises gerade derjenige Fall in der Figur gewählt, der den Beweis eher erschwert als erleichtert (vergl. Erkl. 81). Man würde daher von obigen beiden ersten Beweisen am leichtsten anwenden bei Figur 35 den zweiten, bei Figur 36 den ersten mit der Tangentenrichtung am Bogen $\overset{\frown}{AB}$, also von A aus mit der Uhrzeigerdrehung gemessen.

Figur 37.



Erkl. 84. Der mehrfach angezogene Satz 60 des III. Teiles ist daselbst vollständig unabhängig von der Kreislehre gefunden worden als Ausdruck einer allgemeinen Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks. Wenn nämlich in Figur 37:

$$MA = MB = MC$$

Hierin ist aber nach dem soeben vorangegangenen:

$$\sphericalangle BAM = \frac{1}{2} \sphericalangle BMD,$$

$$\sphericalangle MAC = \frac{1}{2} \sphericalangle DMC,$$

folglich:

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BMD + \frac{1}{2} \sphericalangle DMC$$

$$= \frac{1}{2} (\sphericalangle BMD + DMC) = \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

c) Im dritten Falle (Figur 36) ziehe man wieder durch A den Durchmesser AMD, und erhält so den zu betrachtenden Peripheriewinkel dargestellt als Differenz zweier Peripheriewinkel der zuvor in a) betrachteten Art, nämlich:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM - \sphericalangle CAM.$$

Hierin ist aber nach a):

$$\sphericalangle BAM = \frac{1}{2} \sphericalangle BMD$$

und

$$\sphericalangle CAM = \frac{1}{2} \sphericalangle CMD,$$

folglich:

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BMD - \frac{1}{2} \sphericalangle CMD$$

$$= \frac{1}{2} (\sphericalangle BMD - \sphericalangle CMD) = \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

Beweis IV.

Betrachtet man wieder zuerst den ersten der drei vorigen Fälle und zieht (Figur 37) die Sehne BC und zum Schenkel AB die Parallele MD durch M, so ist nach Satz 60 des III. Teiles $\sphericalangle ABC$ ein Rechter, also auch $MD \perp BC$; folglich ist nach Satz 5:

$$\sphericalangle DMC = \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

Da aber als korrespondierender Winkel $\sphericalangle BAC = DMC$ ist, so ist auch:

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} BMC.$$

Hiernach ergibt sich die Gültigkeit für die Fälle b) und c) der Lage des Kreismittelpunktes in derselben Weise durch Darstellung als Summe oder Differenz zweier Peripheriewinkel dieser ersten Art.

ist, so wird $\triangle AMB$ und $\triangle CMB$ gleichschenklig, also:

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA \text{ und } \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB;$$

da aber im $\triangle ABC$ die Winkelsumme:

$$180^0 = BAM + MCB + (ABM + CBM),$$

so folgt durch Einsetzung der gleichen Werte:

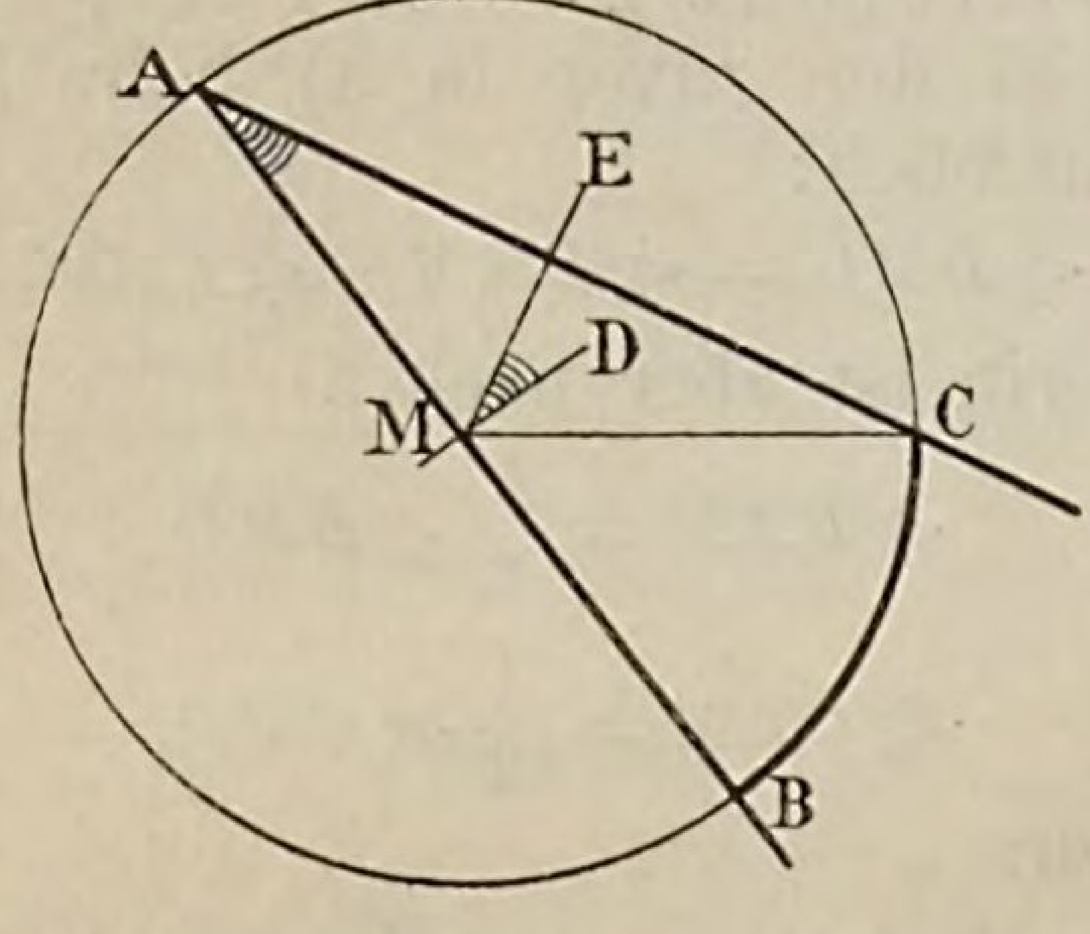
$$180^0 = ABM + CBM + MBA + CBM$$
$$= 2(ABM + CBM) = 2 \cdot \sphericalangle ABC;$$

also:

$$\sphericalangle ABC = 90^0.$$

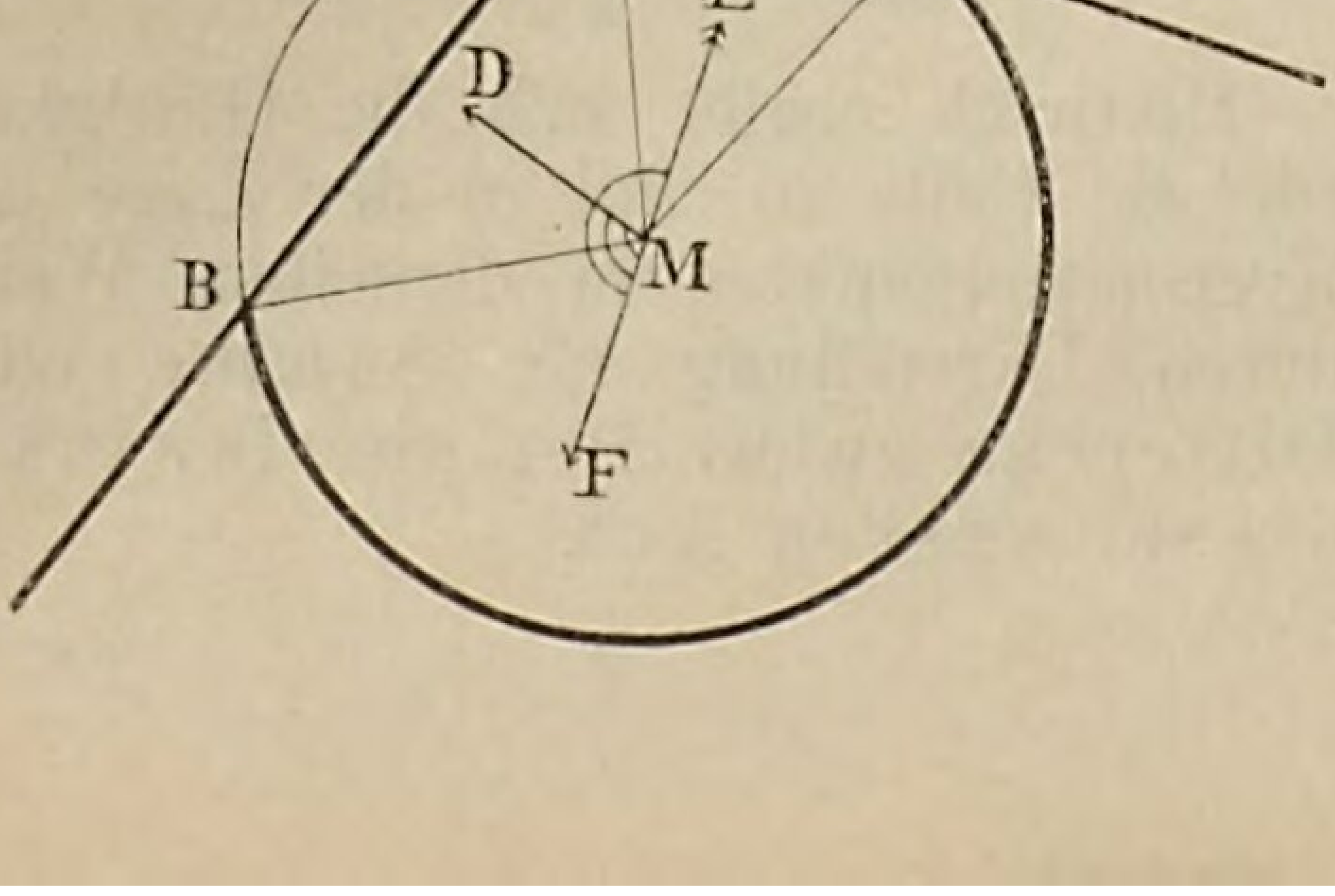
In der That ist $\sphericalangle ABC$ Peripheriewinkel über dem Halbkreis oder über dem Durchmesser, also der zugehörige Mittelpunktswinkel ein gestreckter, der Peripheriewinkel als Hälfte eines gestreckten Winkels ein Rechter.

Figur 38.



Erkl. 85. Der fünfte der nebenstehenden Beweise ist genau analog dem fünften der in Antwort der Frage 36 geführten Beweise. Wie dort in Figur 30, so wird hier in den Figuren 38 bis 40 jeweils vom Mittelpunkt M aus auf jeden Schenkel des betrachteten Winkels eine Senkrechte gefällt. Während aber in Figur 30 die eine dieser Senkrechten (MA) durch den Scheitel A des betrachteten Winkels selbst geht, und nur die andere als Halbierende des zur Sehne AB gehörigen Mittelpunktswinkels in Betracht kommt, so sind unter den Figuren 38 bis 40 nur die erste von ähnlicher Einfachheit, bei beiden andern treten die Senkrechten einzeln in der Eigenschaft als Winkelhalbierende von Mittelpunktswinkeln auf, wie dies nur bei der einen (MC) in Figur 30 der Fall war.

Figur 39.



Beweis V.

Man trenne wieder die drei Fälle a), b), c) wie im dritten und vierten Beweise, und fälle jeweils vom Kreismittelpunkte M aus die Senkrechte auf die Schenkel des Peripheriewinkels, also:

$$DM \perp AB, \quad EM \perp AC.$$

a) Dann ist im ersten Falle (Figur 38) wegen senkrechter Winkelschenkel:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DME.$$

Da aber $\sphericalangle AME$ nach Satz 5 gleich:

$$\frac{1}{2} \sphericalangle AMC$$

ist, und

$$EMD = AMD - AME,$$

so wird auch:

$$\sphericalangle BAC = AMD - AME = 90^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle AMC$$
$$= \frac{1}{2}(180^0 - AMC) = \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

Hiernach könnten die Fälle b) und c) durch Addition und Subtraktion gebildet werden, wie im Beweis III und IV, oder aber auch direkt, dem vorigen analog, wie folgt:

b) Im zweiten Falle (bei Figur 39) ist wegen gleichwendig bezw. ungleichwendig senkrechter Schenkel:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DMF = 180^0 - \sphericalangle DME.$$

Es ist aber:

$$\sphericalangle DME = \sphericalangle DMA + \sphericalangle EMA$$
$$= \frac{1}{2} \sphericalangle BMA + \frac{1}{2} \sphericalangle AMC$$
$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle BMA + \sphericalangle AMC)$$
$$= \frac{1}{2}(360^0 - \sphericalangle BMC)$$
$$= 180^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

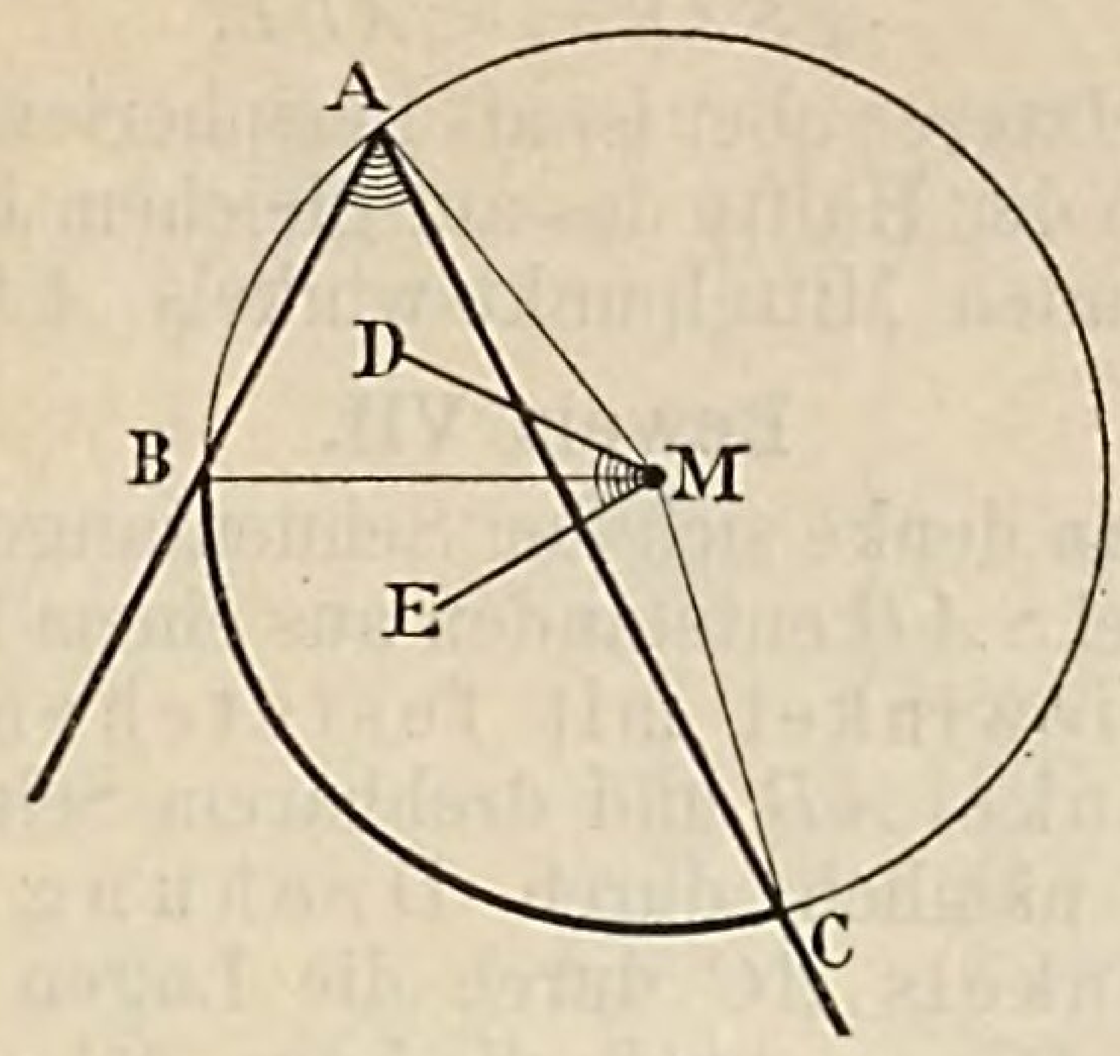
Man hat also:

$$\sphericalangle BAC = 180^0 - DME$$
$$= 180^0 - \left(180^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle BMC\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

c) Im dritten Falle (bei Figur 40) ist wieder wegen gleichwendig senkrechter Winkelschenkel:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DME.$$

Figur 40.



Darin ist aber:

$$\sphericalangle DME = \sphericalangle AME - \sphericalangle AMD$$

und

$$\sphericalangle AMD = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$$

und

$$\sphericalangle AME = \frac{1}{2} \sphericalangle AMC.$$

Folglich wird:

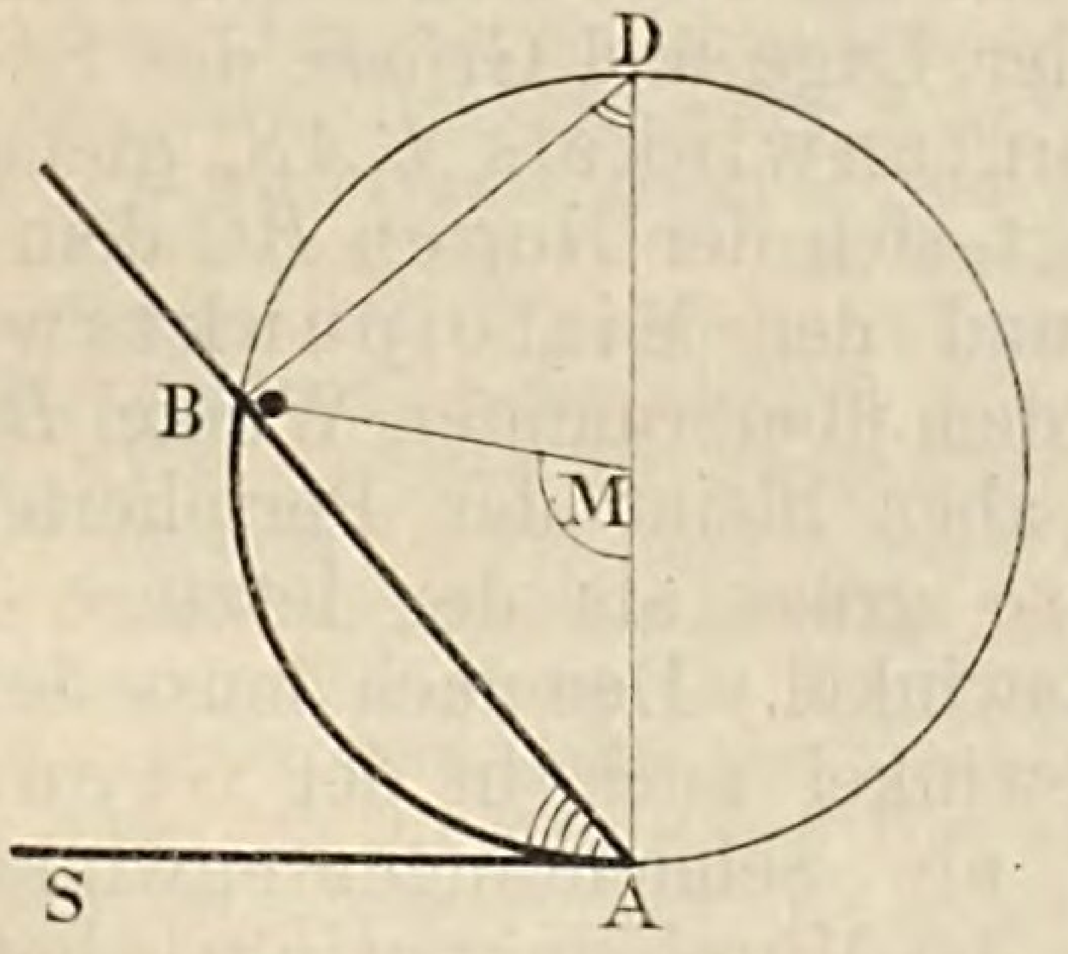
$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMC - \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$$
$$= \frac{1}{2} (\sphericalangle AMC - \sphericalangle AMB)$$
$$= \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

Erkl. 86. Die Figuren 32 bis 40, welche sämtlich die Darstellung des Peripheriewinkels bezwecken, sind in den verschiedensten Lagenverhältnissen ausgewählt, so dass sich die mannigfachen Arten des Auftretens dieser Winkel einprägen. Man beachte also jeweils die Lage und Grösse des Standbogens, sowie des zugehörigen Mittelpunktswinkels.

Frage 39. Welche Beweise der Gültigkeit des Satzes 16 für Sehnentangentenwinkel lassen sich noch angeben auf Grund einer der drei letzten Beweisführungen in voriger Antwort 38?

Antwort. Wenn auf eine der drei letzten Beweisarten in Antwort 38 der Satz 16 für den allgemeinen Peripheriewinkel bewiesen wird, unabhängig von den in Antwort 37 vorhergehenden Beweisen für den Sehnentangentenwinkel, so kann man für letzteren selber noch folgende Beweisführungen aufstellen:

Figur 41.



Erkl. 87. Der nebenstehende Beweis VI könnte auch als selbständiger Beweis für die später in Satz 16c ausgesprochene Ausdrucksform des Satzes 16 angesehen werden. Denn der Beweis führt unmittelbar aus, dass ein Sehnentangentenwinkel gleich ist einem auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel; da jedoch sowohl vom Peripheriewinkel als auch vom Sehnentangentenwinkel einzeln nachgewiesen wird, dass jeder gleich der Hälfte der auf gleichem Bogen stehenden Mittelpunktwinkel sei, so ist auch ohne solchen besonderen Beweis die Gleichheit solcher zwei Winkelgrössen ersichtlich. Man hat eben nur den Sehnentangentenwinkel als besonderen Fall des Peripheriewinkels aufzufassen

Beweis VI.

Zieht man den Durchmesser vom Scheitel des Berührungswinkels SAB (s. Figur 41) und die Sehne BD, so ist der Winkel ABD ein Rechter — entweder als Peripheriewinkel über den Halbkreis AD mit dem gestreckten Mittelpunktswinkel AMD, oder nach Satz 60 des III. Teiles — und $\sphericalangle ADB$ ist ein Peripheriewinkel über demselben Bogen AB, wie der Sehnentangentenwinkel SAB. Nun ist wegen des rechten Winkels SAD zwischen Tangente SA und Radius AM:

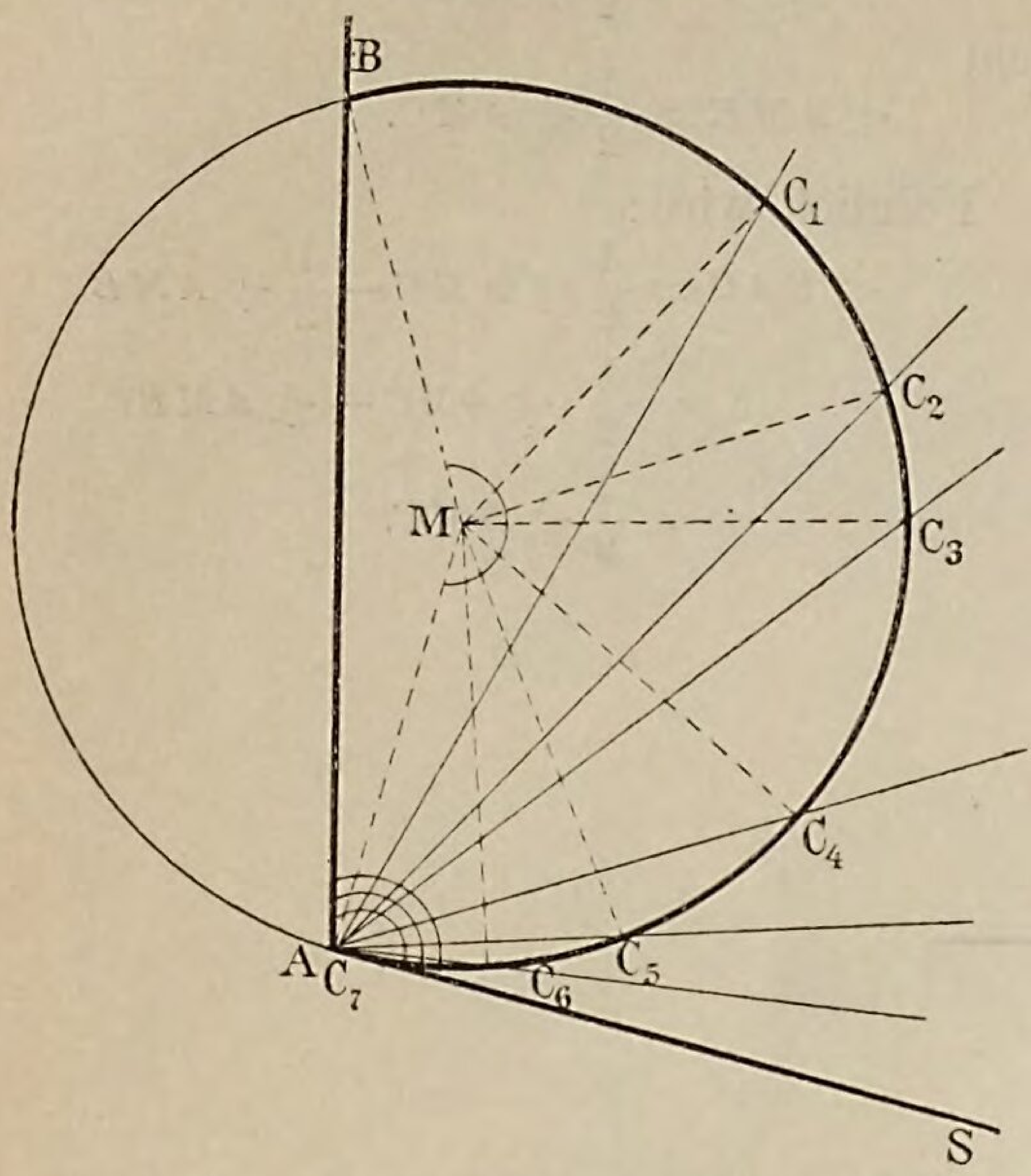
$$\sphericalangle SAB = 90^0 - BAD;$$

und wegen des rechtwinkligen Dreiecks ABD ist auch:

$$\sphericalangle ADB = 90^0 - BAD.$$

und für beide Winkelgattungen den Satz 16 in aller Allgemeinheit anzuwenden.

Figur 42.



Erkl. 88. Beweise von der Art der nebenstehenden werden genannt Beweise durch Grenzübergang oder durch Grenzbetrachtung. Bei solchen ist es von Wichtigkeit, nachzuweisen, dass der Uebergang 1) vollständig stattfindet, und dass er 2) ohne einen Sprung im Augenblicke des Uebergangs stattfindet. Es ist daher im nebenstehenden Beweise ausdrücklich hervorgehoben, dass der Uebergang aus dem Peripheriewinkel BAC in den Sehnentangentenwinkel BAS 1) unbegrenzt nahe stattfindet, und dass er 2) unmittelbar stattfindet; d. h. der Winkel BAC nimmt ohne Eintreffen eines Zwischenzustandes oder einer Zwischengrösse und ohne einen sprungweisen Wechsel im letzten Augenblicke der Annäherung die Grösse und Lage des Winkels BAS an. Und ebenso unbegrenzt und unmittelbar nähert sich auch der Bogen BC dem Bogen BA und der Mittelpunktswinkel BMC dem überstumpfen Mittelpunktswinkel BMA.

Folglich ist:

$$\sphericalangle SAB = \sphericalangle ADB.$$

Letzterer aber ist als Peripheriewinkel gleich der Hälfte des auf gleichem Bogen stehenden Mittelpunktswinkels AMB.

Beweis VII.

Man denke sich den Sehnentangentenwinkel SAB entstanden aus einem Peripheriewinkel mit feststehendem Schenkel AB und drehbarem Schenkel AC, nämlich durch Drehung des Schenkels AC durch die Lagen AC_1, AC_2, AC_3 ··· bis in die Lage $AC_7 = AS$. Dann hat man nach dem vorigen:

$$\sphericalangle BAC_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle BMC_1,$$

$$\sphericalangle BAC_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle BMC_2 \text{ u. s. w.}$$

Dabei wird der Winkel BAC stets grösser, mit ihm auch der Winkel BMC stets grösser, aber immer bleibt:

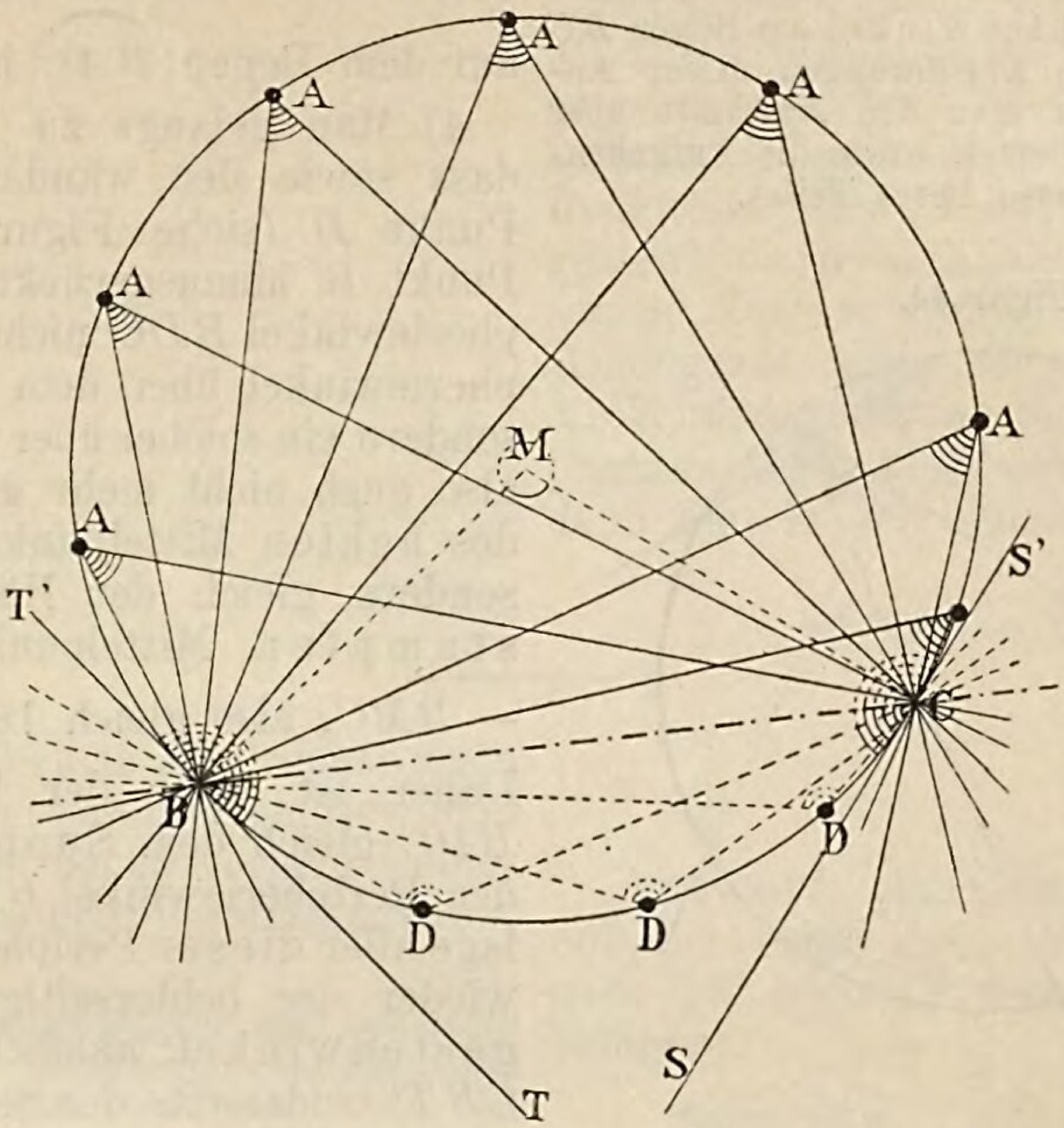
$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BMC.$$

Rückt also der Winkelschenkel AC durch die Lagen AC_5, AC_6 und die weiteren bis in die Lage AC_7, so nähert sich der Peripheriewinkel BAC unbegrenzt nahe und unmittelbar der Lage und Grösse des Sehnentangentenwinkels BAS, gleichzeitig nähert sich der Bogen BC dem Bogen BA und der Mittelpunktswinkel BMC dem überstumpfen Winkel BMA — stets aber bleibt der Peripheriewinkel halb so gross als der letztere Mittelpunktswinkel. Demnach muss der Peripheriewinkel auch in der Grenzlage BAS als Sehnentangentenwinkel die Hälfte des Mittelpunktswinkels betragen.

Frage 40. Zu welchen Vorstellungen gelangt man auf Grund des Vorhergehenden, sowie in Rücksicht der zentrischen Symmetrie des Kreises und des Lehrsatzes 21 im II. Teile?

Antwort. 1) Man gelangt zu der Vorstellung, dass beliebig verschieden liegende Peripheriewinkel eines Kreises, wenn deren Schenkel nur durch dieselben beiden Kreispunkte B und C gehen, auch gleichgross sein müssen. Denn zum Bogen BDC (siehe Figur 43)

Figur 43.



Erkl. 89. Denkt man sich als wandernden Punkt das Auge eines Menschen, so muss dieses in einer gewissen Richtung vom Punkte A nach B sehen, und muss sich um einen bestimmten Winkel α drehen, um aus der Sehrichtung AB in die Sehrichtung AC überzugehen. Dieser Winkel α zwischen den Gesichtslinien nach den beiden äussersten Punkten einer Strecke oder eines Körpers wird (besonders in der Astronomie) die „scheinbare Grösse“ der Strecke BC oder des Bogens BDC genannt, und man sagt auch, das Auge sehe die Strecke BC unter dem Winkel α, oder die Strecke BC „erscheine“ aus dem Punkte A unter dem Winkel α.

Nach der nebenstehenden Antwort kann man also erkennen, dass wenn ein Auge auf einer Kreislinie wandert, dann eine bestimmte Sehne oder ein bestimmter Bogen desselben Kreises stets unter dem gleichbleibenden Winkel α von demselben gesehen wird, nämlich unter einem Winkel α gleich dem Peripheriewinkel in diesem Kreise über diesem Bogen oder gleich dem Sehnentangentenwinkel, welcher durch die Sehne und Tangente dieses Bogens gebildet wird. — Sowie aber das Auge über den Punkt B oder C weggeht, sieht es die Sehne BC unter einem zum vorigen Gesichtswinkel supplementären Winkel.

Umgekehrt kann man also auch sagen, wenn ein Auge die zwischen zwei Punkten B und C liegende Strecke BC unter einem bestimmten Winkel α sehen soll, dass es dann sich befinden muss, bezw. dass es noch freie Bewegung hat auf einem Kreis-

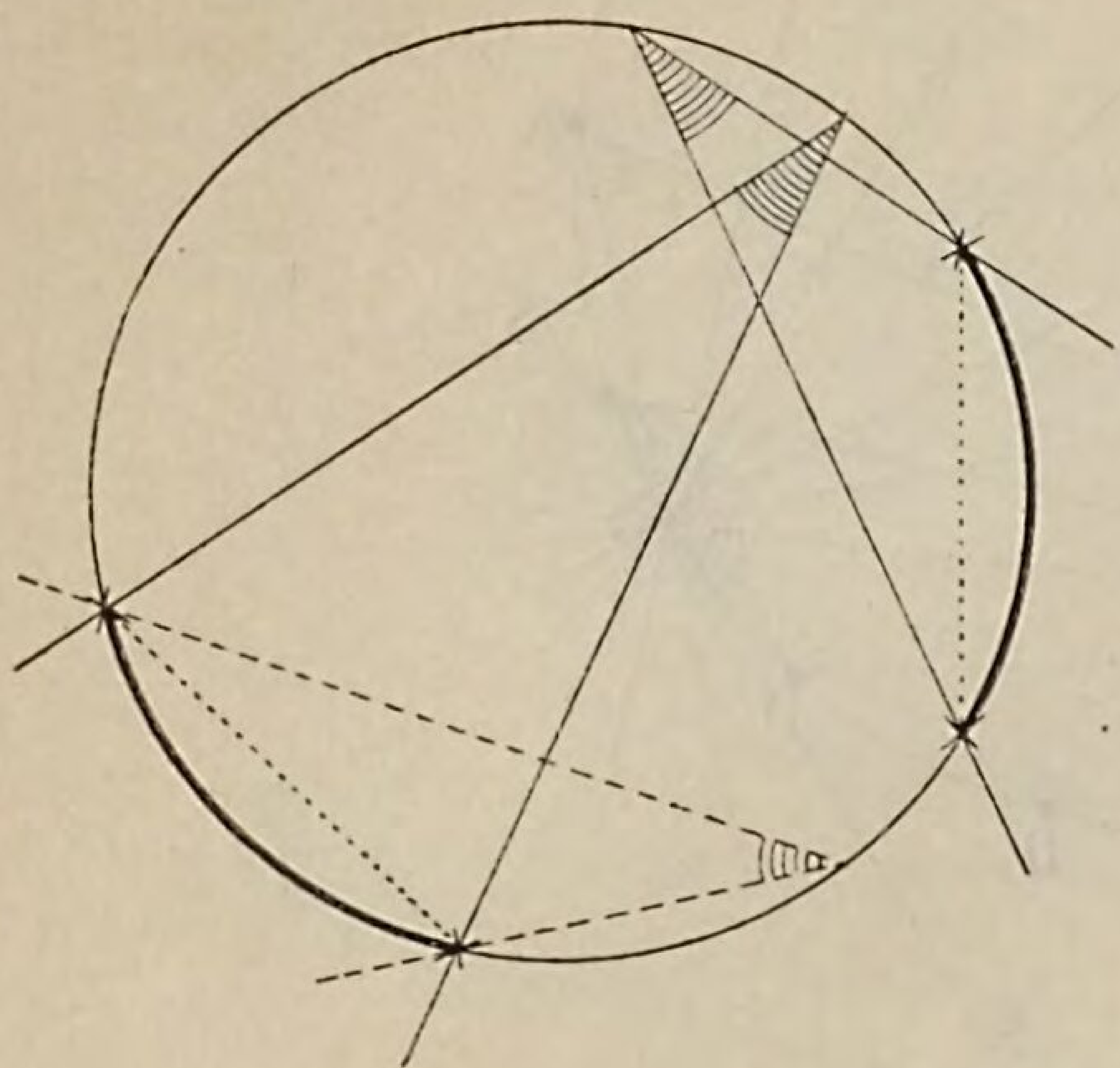
gehört nach Satz 4 nur der einzige Mittelpunktswinkel BMC, also liefert der Beweis für jeglichen der auf demselben Bogen BDC stehenden Peripheriewinkel dieselbe Grösse.

2) Man gelangt zu der Vorstellung, dass wenn man einen Punkt A auf der Kreisperipherie wandern lässt, während er stets mit denselben zwei festen Kreispunkten B und C verbunden bleibt — dann der Winkel BAC stets dieselbe Grösse behält, bis der Punkt A in einen der beiden festen Punkte B oder C selbst hineingerückt ist. Bevor der Punkt A in B ankommt, erhält die Sehne AB eine stets kleiner werdende Grösse (vergleiche Figur 18 und die Antwort der Frage 26), die schliesslich zu 0 wird, die Lage der Sehne AB aber wird zur Lage der Tangente.

3) Man gelangt daher zu der Vorstellung, dass in Figur 43 die beiden spitzen Sehnentangentenwinkel BCS und CBT beiderseits der Sehne BC und des Bogens BAC wirklich die beiden äussersten und letzten derjenigen Peripheriewinkel sind, welche auf dem

bogen BAC, für welchen der Winkel α der Peripheriewinkel über der Strecke BC oder der Sehnentangentenwinkel am Bogen BC ist. Ueber weitere Ausführungen dieser Anschauung vergleiche man den Abschnitt über die geometrischen Oerter, sowie die Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Figur 44.



Erkl. 90. Für besondere Grössen des Standbogens oder der Sehne wird man nach nebenstehendem auch die besondern Grössen des Peripheriewinkels bezw. Sehnentangentenwinkels zu erwarten haben.

Hat z. B. der Kreisbogen die Länge von $\frac{1}{3}$ Umfang oder 120⁰, so hat der Peripheriewinkel die Grösse von $\frac{1}{6}$ Vollwinkel oder 60⁰.

Erhält der Kreisbogen die Länge 0, rückt also die Sehne BC in Figur 43 soweit in den Bogen BDC herab, dass ihre Länge 0 wird, so wird auch der Peripheriewinkel BAC immer kleiner bis 0, und der Sehnentangentenwinkel TBC wird ebenfalls immer kleiner bis 0, denn die Sehne von der Länge 0 ist selbst mit der Tangente zusammengefallen.

Erhält der Kreisbogen die Länge 360⁰, rückt also die Sehne BC in Figur 43 soweit in den Bogen BAC hinauf, dass ihre Länge wieder 0 wird, so wird der Peripheriewinkel BAC immer grösser bis 180⁰, und auch der Sehnentangentenwinkel TBC wird immer stumpfer bis zu 180⁰, da die Sehne in diesem Grenzfalle wieder mit der Tangente zusammenfällt.

Bogen $\overset{\frown}{BDC}$ stehen und ihre Scheitel auf dem Bogen $\overset{\frown}{BAC}$ haben.

4) Man gelangt zu der Vorstellung, dass sowie der wandernde Punkt als Punkt D (siehe Figur 43) über den Punkt B hinausgerückt ist, der Peripheriewinkel BDC nicht mehr ein Peripheriewinkel über dem Bogen BDC ist, sondern ein solcher über dem Bogen BAC, also auch nicht mehr gleich der Hälfte des hohlen Mittelpunktswinkels BMC, sondern gleich der Hälfte des überstumpfen Mittelpunktswinkels $360^0 - BMC$, also gleich $180^0 - \frac{1}{2} \sphericalangle BMC$. Daher ist jeder der Peripheriewinkel BDC gleich dem Supplementwinkel der Peripheriewinkel BAC. Die Grenzlage aller dieser Peripheriewinkel bildet wieder der beiderseitige Sehnentangentenwinkel, nämlich nun BCS' und CBT' beiderseits der Sehne BC und des Bogens $\overset{\frown}{BDC}$, also die Nebenwinkel der vorigen Grenzwinkel BCS und CBT.

5) Man gelangt zu der Vorstellung (siehe Figur 44), dass wenn zwei beliebig liegende Peripheriewinkel eines Kreises an verschiedenen Stellen des Kreises gleichgrosse Bogenstücke oder gleiche Sehnen ausschneiden, dann durch Umdrehung des einen Winkels samt zugehörigem Bogen und Sehne um den Kreismittelpunkt-Bogen bezw. Sehne derselben mit Bogen bezw. Sehne des andern zur Deckung gebracht werden kann, so dass dann auch beide Winkel als Peripheriewinkel über demselben Bogen und derselben Sehne gleiche Grösse haben müssen — auch ohne dabei selbst zur Deckung zu gelangen (s. Figur 44).

6) Man gelangt zu der Vorstellung, da die Anzahl von Winkelgraden des Mittelpunktswinkels und die Anzahl von Bogengraden des zugehörigen Kreisbogens dieselbe ist, dass also der Peripheriewinkel bezw. der Sehnentangentenwinkel halb so viel Winkelgrade hat, als sein Standbogen Bogengrade. Macht man also die

Festsetzung, dass bei Nennung einer Winkelgrösse immer Winkelgrade und bei einer Bogengrösse stets nur Bogengrade bezeichnet werden wollen, so kann man auch in minder pünktlicher Redeweise den Peripheriewinkel gleich seinem halben Standbogen setzen; denn ursprünglich werden ja die Bogengrade eines Bogens eben durch die Winkelgrade des zugehörigen Mittelpunktswinkels gemessen. Man schreibt dann dies in der einfachen Form:

$$\sphericalangle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2}.$$

Frage 41. Welche Ausdrucksweisen des Satzes 16 über den Peripheriewinkel ergeben sich aus den in vorigen Ueberlegungen gewonnenen Vorstellungen?

Erkl. 91. Die wichtigste der besondern Längen, welche der Standbogen oder die Sehne eines Peripheriewinkels annehmen kann, ist der Halbkreis bezw. der Durchmesser. Bei diesem ist die Gradzahl des Bogens 180°, also die Gradzahl des Peripheriewinkels 90°. In der That ist der Peripheriewinkel über dem Durchmesser nichts anderes, als der in Satz 60 des III. Teiles behandelte Winkel am Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks. Der Sehnentangentenwinkel zwischen einem Durchmesser und der Tangente im Endpunkt desselben ist nach Satz 11 ein Rechter, und zwar mit beiden Richtungen der Tangente und auf beiden Seiten des Durchmessers — in Uebereinstimmung mit Satz 12. Die beiden durch den Durchmesser als Sehne getrennten Bogen sind beide Halbkreise, der Peripheriewinkel also auch auf beiden Seiten ein Rechter. Auch dies ist in Uebereinstimmung mit Satz 16d, denn der rechte Winkel ist mit sich selbst supplementär.

Erkl. 92. In Benutzung der in Erkl. 89 entwickelten Anschauung kann man aussagen, dass jeder Durchmesser eines Kreises von jedem Punkte der Kreislinie aus unter einem rechten Winkel gesehen wird, oder unter einem rechten Winkel erscheint, oder die scheinbare Grösse von 90° hat.

Erkl. 93. Der Satz 16d kann auch so ausgesprochen werden, dass zwei Peripheriewinkel supplementär sind, wenn ihre Standbögen zusammen einen ganzen Kreis bilden. Entsprechend kann man auch aussagen, dass zwei Peripheriewinkel komplementär sein müssen, wenn die Summe ihrer Standbögen einen Halbkreis ergibt, oder wenn ihre Standbögen einander zu einem Halbkreis ergänzen.

Antwort. Auf Grund der Antworten auf die vorige Frage 40 kann man den Satz 16 auch in folgende Fassungen bringen:

Satz 16a. Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen oder über derselben Sehne eines Kreises sind gleichgross.

Satz 16b. Die Verbindungslinien jedes beliebigen Punktes auf einem gegebenen Kreisbogen mit den Endpunkten dieses Bogens bilden gleichgrosse Winkel.

Satz 16c. Jeder Peripheriewinkel ist gleich den beiden Sehnentangentenwinkeln, welche denselben Kreisbogen mit ihm ausschneiden.

Satz 16d. Zwei Peripheriewinkel über den beiden Kreisbogen, welche durch eine Sehne getrennt werden, sind supplementär.

Satz 16e. Peripheriewinkel oder Sehnentangentenwinkel über gleichgrossen Bogen desselben Kreises sind gleichgross.

Satz 16f. Jeder Peripheriewinkel hat halb so viel Grade als sein Standbogen.

Und als wichtigste Anwendung des letztern (vergl. Erkl. 11):

Satz 16g. Jeder Peripheriewinkel über einem Halbkreis oder über einem Durchmesser ist ein Rechter.

b) Ueber den Sehnen- und Sekantenwinkel.

Frage 42. Wie verändert sich die Winkelgrösse, wenn der wandernde Scheitel (nach Antwort der Frage 40) die Kreislinie nach innen oder aussen verlässt?

Erkl. 94. Da alle Peripheriewinkel über dem Bogen BC gleichgross sind, so ist es gleichgültig, welcher von ihnen zur Vergleichung mit dem Winkel bei P oder Q beigezogen wird. Man kann daher denjenigen von ihnen auswählen, dessen Scheitel durch den Schenkel des neuen Winkels oder dessen Verlängerung ausgeschnitten wird.

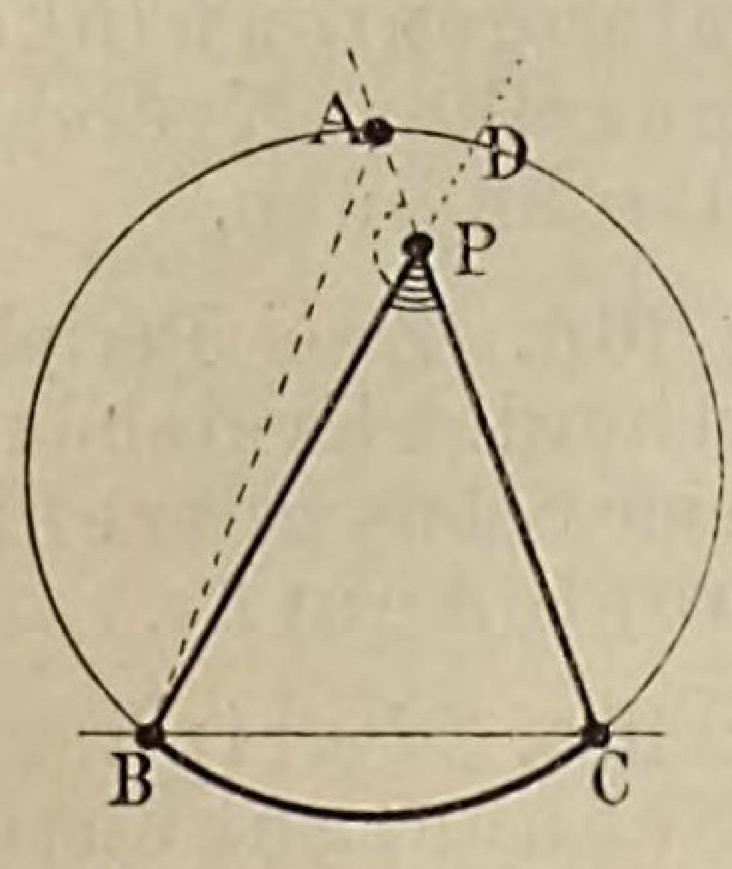
Erkl. 95. Der Winkel bei P ist nach Abschnitt AC des II. Teiles dieses Lehrbuches ein Sehnenwinkel, der Winkel bei Q ein Sekantenwinkel. Zu jedem von beiden ist nicht nur Bogen BC allein, sondern auch der zweite von den Schenkeln des Winkels oder deren Verlängerungen ausgeschnittene Bogen in Beziehung zu setzen.

Antwort. Rückt der wandernde Punkt A (siehe Figur 45) ins Innere des Kreises nach P, so ist der Winkel BPC Aussenwinkel des Dreiecks BAC, also ist $\sphericalangle BPC$ grösser als $\sphericalangle BAC$. Rückt der Punkt A ausserhalb des Kreises (siehe Figur 46) nach Q, so ist der Winkel BQC Dreieckswinkel im Dreieck BQC, und BAC ist Aussenwinkel, also $\sphericalangle BAC > BQC$ oder umgekehrt $BQC < BAC$.

Man kann daher ganz allgemein sagen, dass der Winkel der Verbindungslinien der Endpunkte eines Kreisbogens mit einem Punkte innerhalb des Kreises grösser ist, mit einem Punkte ausserhalb des Kreises kleiner ist, als der über demselben Bogen stehende Peripheriewinkel.

Frage 43. Welche Grössenbeziehung besteht zwischen einem Sehnenwinkel oder einem Sekantenwinkel und seinen zugehörigen Kreisbogen?

Figur 45.



Erkl. 96. Durch Benutzung der Sehne CD erhält man für denselben Winkel BPC als Aussenwinkel des Dreiecks CPD den gleichen Wert $\frac{\overset{\frown}{BC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$. Und ebenso mittels Sehne AD für den Winkel APB als Aussenwinkel des Dreiecks APD wieder den Wert $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$.

Antwort. 1) Um die Grössenbeziehung zwischen dem Sehnenwinkel bei P (siehe Figur 45) und seinen beiden zugehörigen Bogen BC und AD festzustellen, ziehe man eine der vier Sehnen zwischen den Kreispunkten $ABCD$, z. B. die Sehne AB. Dann ist der Winkel BPC als Aussenwinkel gleich:

$$\sphericalangle BAP + \sphericalangle ABP = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABD,$$

oder nach Antwort 6) der Frage 40 auch:

$$\sphericalangle BPC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}.$$

Ebenso erhielte man durch die Sehne BC für den Winkel APB als Aussenwinkel des Dreiecks BPC den Wert:

$$BCA + CBD = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}.$$

2) Um die Grössenbeziehung zwischen dem Sekantenwinkel bei Q (siehe

Erkl. 97. Auch für den Sekantenwinkel bei Q könnte man die Grösse des Nebenwinkels in Betracht ziehen. Dieser wird Aussenwinkel des Dreiecks BCQ, also:

$$\sphericalangle AQN = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBD$$
$$= \frac{\overset{\frown}{ADB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CAD}}{2}$$

oder einzeln:

$$= \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$$
$$= \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} + \overset{\frown}{AD}.$$

Und ebenso erhielte man mittels Benutzung der Sehne AD für denselben Winkel AQN als Aussenwinkel des Dreiecks ADQ die Grösse:

$$\sphericalangle QAD + QDA$$
$$= 180^0 - CAD + 180^0 - BDA$$
$$= 360^0 - \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{ACB}}{2}$$
$$= \frac{360 - \overset{\frown}{CBD}}{2} + \frac{360 - \overset{\frown}{ACB}}{2}$$
$$= \frac{\overset{\frown}{CAD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{ADB}}{2},$$

wie oben.

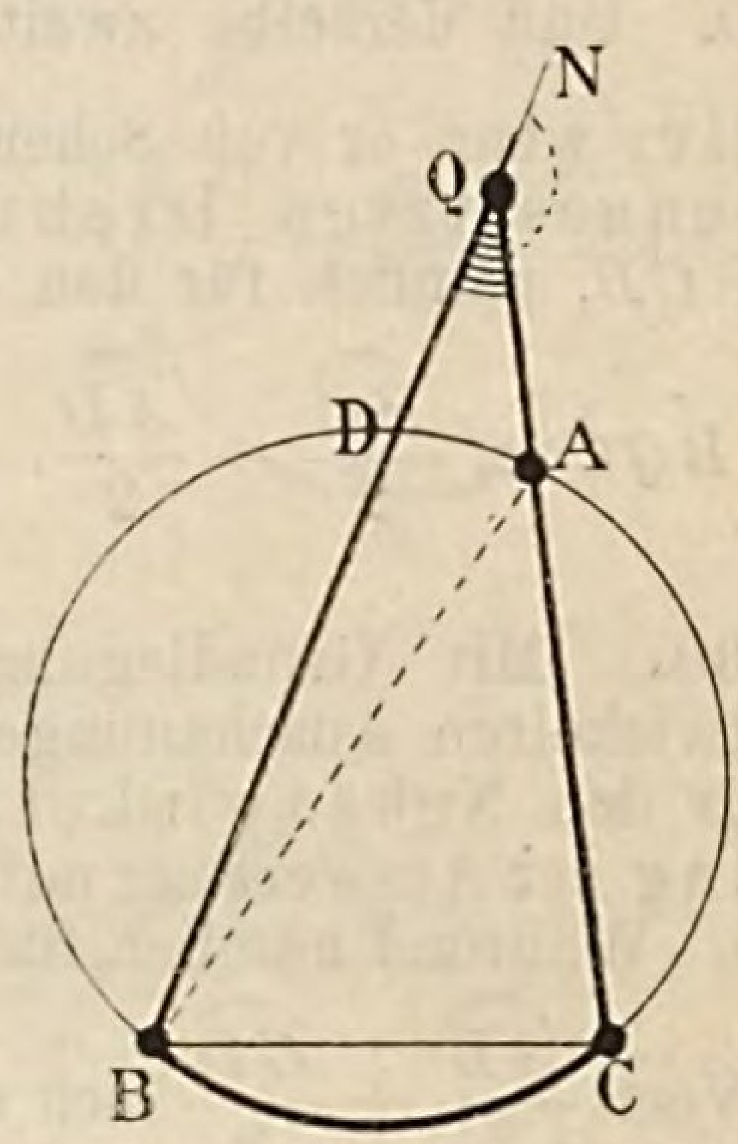
Figur 46) und seinen beiden zugehörigen Bogen BC und AD festzustellen, ziehe man die eine der beiden Sehnen AB oder CD. Durch erstere entsteht das Dreieck ABQ, für welches $\sphericalangle BAC$ als Aussenwinkel gleich ist:

$$\sphericalangle ABQ + \sphericalangle BQA = \sphericalangle ABD + \sphericalangle BQC.$$

Daher wird:

$$\sphericalangle BQC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABD = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}.$$

Figur 46.



Frage 44. Welche Aussagen ergeben sich aus der Antwort der vorigen Frage 43?

Antwort. Auf Grund dieser vorigen Ergebnisse kann man den Satz aussprechen:

Satz 17. Ein Sehnenwinkel ist gleich der Summe, ein Sekantenwinkel gleich der Differenz der auf seinen beiden zugehörigen Bogen stehenden Peripheriewinkel.

Oder nach Antwort 6 der Frage 40:

Satz 17a. Ein Sehnenwinkel hat soviel Grade, wie die halbe Summe, ein Sekantenwinkel soviel Grade, wie die halbe Differenz seiner zugehörigen Kreisbogen.

Erkl. 98. Während der im nebenstehenden für den Sehnenwinkel ausgesprochene Satz sowohl für den Winkel BPC, als auch für den Winkel BPA wörtlich gültig ist, trifft dies beim Sekantenwinkel nur für den $\sphericalangle BQC$ zu, denn der in Erkl. 97 für dessen Nebenwinkel AQN abgeleitete Wert lässt keine unmittelbaren Uebertragungen zu. Man vergleiche jedoch Erkl. 99.

Erkl. 99. Der Uebergang aus dem Sehnenwinkel in den Sekantenwinkel liefert eine ähnliche Grenzbetrachtung, wie die mittelparallele Strecke des Trapezes in Erkl. 291 des III. Teiles. Lässt man nämlich den Schenkel BP des Sehnenwinkels BPC sich um Punkt B drehen, so rückt der Kreisschnittpunkt D der Verlängerung des Schenkels BP gegen A hin, fällt mit A zusammen, wenn P auf die Peripherie kommt, und rückt über A hinaus in den Bogen BA, wenn der Winkelscheitel Q über die Peripherie hinausrückt. Für den Winkel BPC ist der Bogen AD in gleichem Drehungssinne gemessen vom Schenkel CA aus, wie Bogen CB von demselben Schenkel; für den Winkel BQC dagegen ist der Bogen AD in entgegengesetztem Dre-

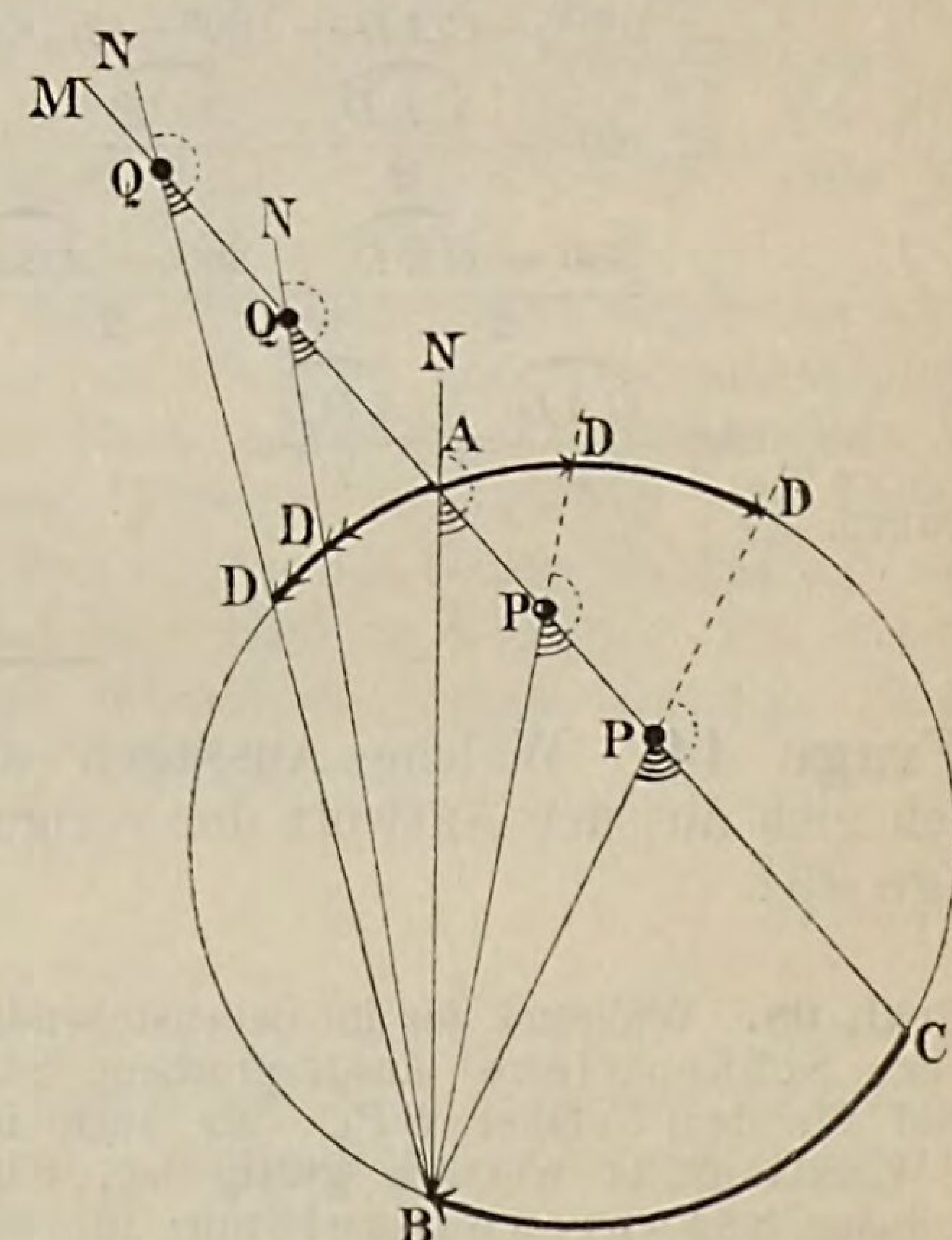
hungssinne gemessen vom Schenkel CA aus, wie Bogen CB von demselben Schenkel. Man kann also sagen, der Bogen AD sei für den Winkel BPC positiv, nehme ab bis zu Null und werde noch kleiner, nämlich negativ für den Winkel BQC. Dem entsprechend wird in dem Ausdruck für den Winkel $P = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ der zweite Teil $\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ erst positiv; er wird zu Null für $AD = 0$, also für denjenigen Winkel BAC, welcher als Peripheriewinkel gleich ist $\frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \pm 0$. Und derselbe zweite Teil $\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ wird negativ, wenn er von Schenkel CA aus im entgegengesetzten Drehungssinne ausgeht, als CB, nämlich für den Winkel:

$$BQC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}.$$

Erkl. 100. Mit Grundlegung dieser in Erkl. 99 entwickelten Anschauungen kann man nun auch für den Nebenwinkel die Uebereinstimmung der Auswertung mit dem Satz 17 herbeiführen. Während nämlich für den Winkel CPD der Wert $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ sich nach vorigem ergibt, so wird mit Verkleinerung des Bogens AD der Bogen CD immer grösser, wogegen AB gleichbleibt. Wird $AD = 0$, so wird $CD = CA$, und der Winkel CAN erhält den Wert $\frac{\overset{\frown}{BA}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2} = 180 - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$. Letzteres aber ist der richtige Wert für den Nebenwinkel des Peripheriewinkels BAC. Es ist Bogen $\overset{\frown}{AB}$, gemessen vom Schenkel CA aus bis zum einen Schnittpunkt B des Schenkels AB, und Bogen $\overset{\frown}{CA}$ ebenfalls vom Schenkel CA aus in gleicher Richtung mit dem vorigen bis zum andern Schnittpunkt A des zweiten Schenkels AB.

Rückt nun Q über den Kreis hinaus, so sind immer noch die Schnittpunkte des einen Schenkels A und C, die des andern B und D. Aber die Bogenstrecken von A und C in der gleichen Drehungsrichtung von diesem Schenkel QC aus, in welcher durch diesen der Winkel CQN beschrieben wird, bis zu den Punkten B und D sind jetzt $\overset{\frown}{ADB}$ und $\overset{\frown}{CAD}$: und deren halbe Summe liefert die Grösse des Winkels CQN. Ebenso wird der Scheitelwinkel BQM beschrieben vom Schenkel QB in derselben Drehungsrichtung, in welcher man gelangt von B nach A durch den Bogen $\overset{\frown}{BDA}$, und von D nach C durch Bogen $\overset{\frown}{DAC}$. Wieder erhält man daher als Wert des Winkels $BQM = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BDA} + \overset{\frown}{DAC})$, wie

Figur 47.



zuvor für den gleichgrossen Scheitelwinkel CQN. Wenn daher überhaupt von den zugehörigen Kreisbogen eines Winkels von der Lage CQN oder BQM gesprochen werden soll, so sind als solche zu bezeichnen die beiden Bogen, durch welche man von dem Schnittpunkte des einen Schenkels in gleicher Umlaufsrichtung, wie der Winkel selbst, zu denen des andern Schenkels (oder seiner Verlängerung) gelangt.

Erkl. 101. Auch für Satz 17 hat man die bemerkenswerten Grenzfälle des Sehnenwinkels und des Sekantenwinkels. Rückt nämlich der Punkt P in den Kreismittelpunkt selbst, so wird nach Satz 21 des II. Teiles der Sehnenwinkel als Mittelpunktswinkel gleich seinem Bogen. Dies stimmt mit Satz 17 überein, wonach (siehe Figur 48 I) $\sphericalangle APB = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD})$ sein soll. Denn da für den Mittelpunktswinkel APB die Bogen $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ sind, so sind auch:

$$\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \cdot 2\,\widehat{AB} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\widehat{CD} = \widehat{AB} = \widehat{CD}.$$

Und ebenso ist $\sphericalangle BPC = \widehat{BC} = \widehat{AD}$.

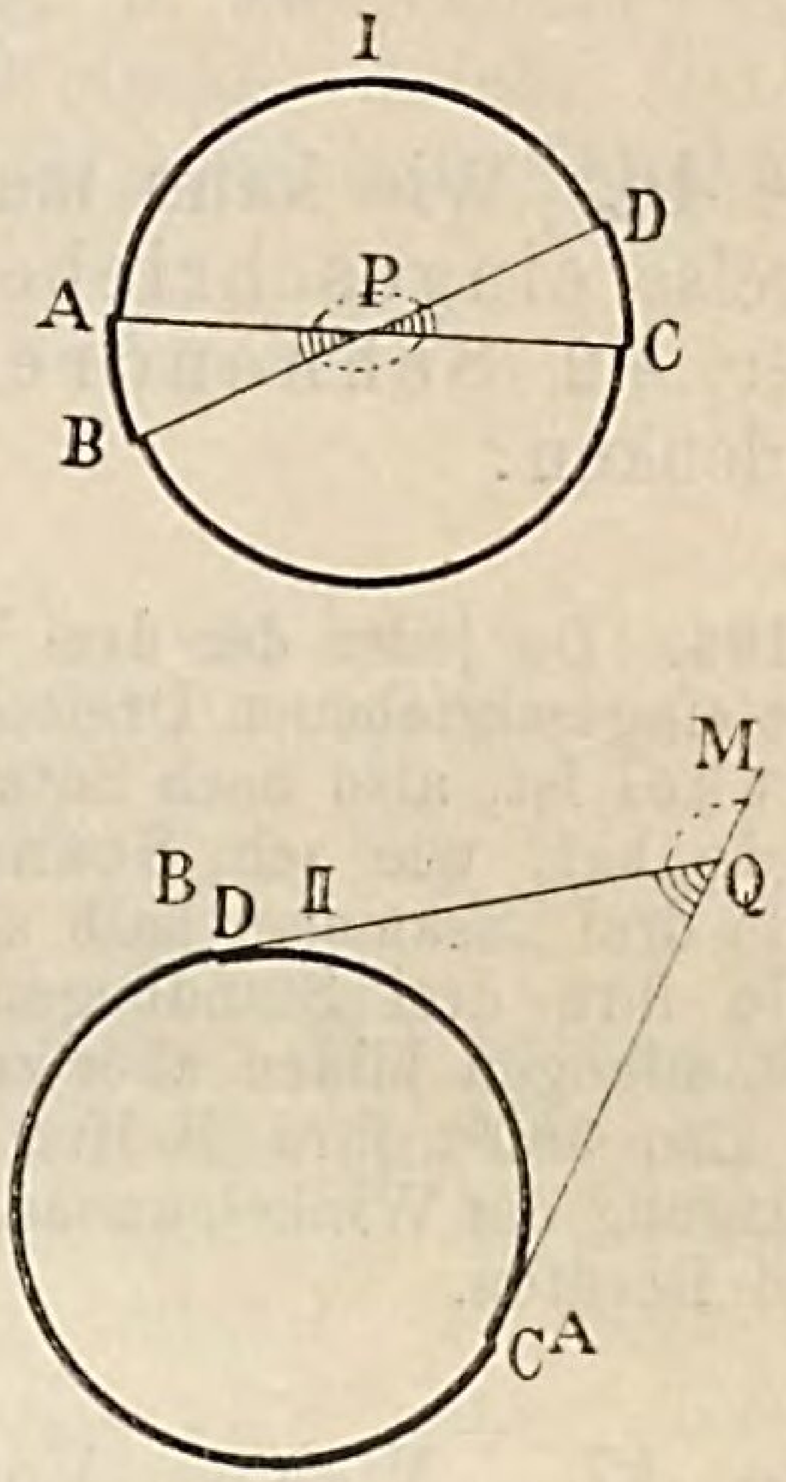
Werden dagegen die durch Punkt Q gehenden Sekanten zu Tangenten (siehe Figur 48 II), so fallen die Punkte B und D bezw. C und A zusammen, es wird $\sphericalangle BQC$ Tangentenwinkel, also nach Satz 13 der $\sphericalangle BQC$ gleich dem Supplement des kleineren Bogens $\widehat{DA}$, $\sphericalangle BQM$ gleich demselben Bogen $\widehat{DA}$ selbst. Auch dies stimmt mit Satz 17 überein, denn zum Winkel BQC gehören die beiden Bogen $\widehat{BC}$ und $\widehat{DA}$, und

$$\frac{1}{2}(\widehat{BC} - \widehat{DA}) = \frac{1}{2}(360^0 - \widehat{DA} - \widehat{DA})$$
$$= 180^0 - \widehat{DA}.$$

Und zum Winkel BQM gehört nach Erkl. 100 der Bogen AD selbst doppelt, also:

$$\sphericalangle BQM = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{AD}) = \widehat{AD}.$$

Figur 48.



4) Ueber einen Kreis in Verbindung mit einem Dreieck.

a) Ueber das einem Kreis eingeschriebene Dreieck oder über den einem Dreieck umgeschriebenen Kreis.

Frage 45. Wann heisst eine Figur einem Kreise eingeschrieben?

Antwort. Eine Figur heisst einem Kreise eingeschrieben, wenn ihre Eckpunkte Punkte der Kreislinie sind; der Kreis selbst heisst dieser Figur umgeschrieben.

Es ist also jede Sehne eine dem Kreis eingeschriebene Strecke, weil die Endpunkte der Strecke Kreis-

Erkl. 102. Auch bei andern geometrischen Gebilden, als beim Kreise, spricht man von ein- und umgeschriebenen Figuren. So wurde in der Aufgabe 102 der Aufgabensammlung am Schlusse des III. Teiles einem Dreieck ein ebensolches ein- bezw. umgeschrieben. Man vergleiche auch die Aufgaben 288 bis 309 daselbst über ein- und umgeschriebene Vierecke.

punkte sind. Ein Peripheriewinkel ist ein dem Kreise eingeschriebener Winkel, da sein Scheitelpunkt Kreispunkt ist.

Ein Dreieck oder Vieleck heisst einem Kreise eingeschrieben, wenn seine Eckpunkte auf der Kreislinie liegen, so dass also alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind. Daher nennt man ein einem Kreise eingeschriebenes Vieleck auch ein Sehnenvieleck.

Erkl. 103. Der Peripheriewinkel als ein Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Peripherie eines Kreises liegt, hat daher im französischen ausdrücklich seinen Namen „angle inscrit“, also wörtlich „eingeschriebener Winkel“.

Frage 46. Wie kann man sich ein einem Kreise eingeschriebenes Dreieck oder ein Sehnendreieck entstanden denken?

Antwort. Ein einem Kreise eingeschriebenes Dreieck kann man sich entstanden denken entweder durch Verbindung dreier auf der Kreislinie beliebig ausgewählter Kreispunkte, oder durch Schnitt dreier Sehnen, deren je zwei vom gleichen Kreispunkte ausgehen.

Jede Seite des Dreiecks ist also eine Kreissehne, jeder Winkel ein Peripheriewinkel.

Erkl. 104. Da jeder der drei Winkel eines dem Kreise eingeschriebenen Dreiecks ein Peripheriewinkel ist, also nach Satz 16 halb so viel Grade hat, wie sein Standbogen, so müssen alle drei zusammen halb so viel Grade haben, wie ihre drei Standbogen zusammen. Die drei Standbogen bilden aber zusammen den Vollkreis, also 360°, ihre Hälfte 180° — also eine Bestätigung der Winkelsumme des Dreiecks gleich zwei Rechten.

Frage 47. Welche Vorstellungen über die Beziehungen zwischen den Seiten, Kreisbogen, Mittelpunktswinkeln eines eingeschriebenen Dreiecks ergeben sich aus den Sätzen 4 und 9?

Antwort. Da jede Seite eines eingeschriebenen Dreiecks (siehe die Figuren 49 und 50) eine Sehne ist, so gehören zu jeder derselben ein Mittelpunktswinkel, ein Kreisbogen, eine Abstandsstrecke vom Mittelpunkt; und man erhält folgende Vorstellungen:

1) Durch die Radien nach den drei Eckpunkten eines eingeschriebenen Dreiecks entstehen drei gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Spitze im Kreismittelpunkt.

2) Von diesen drei gleichschenkligen Dreiecken haben die Längen der Grundseiten dieselbe Grössenfolge wie die Grössen der Mittelpunktswinkel, der Kreisbogen, der Kreisausschnitte und Kreisabschnitte.

3) Der Durchmesser eines Kreises ist die grösstmögliche Seitenlänge eines diesem Kreise eingeschriebenen Dreiecks.

Erkl. 105. Während zu einer beliebigen Sehne zwei Kreisbogen gehören, ist zu einer Seite eines eingeschriebenen Dreiecks nur ein Kreisbogen zu rechnen, nämlich derjenige der beiden durch die Seite ausgeschnittenen, auf welchem die Gegenecke des Dreiecks nicht liegt.

Erkl. 106. Man hat nach Nebenstehendem in Figur 49 (und entsprechend auch in Figur 50, nur mit andern Buchstaben)

Dreiecksseiten:

$$BC > CA > AB,$$

Mittelpunktswinkel:

$$\sphericalangle BMC > CMA > AMB,$$

Kreisbogen, -ausschnitte und -abschnitte:

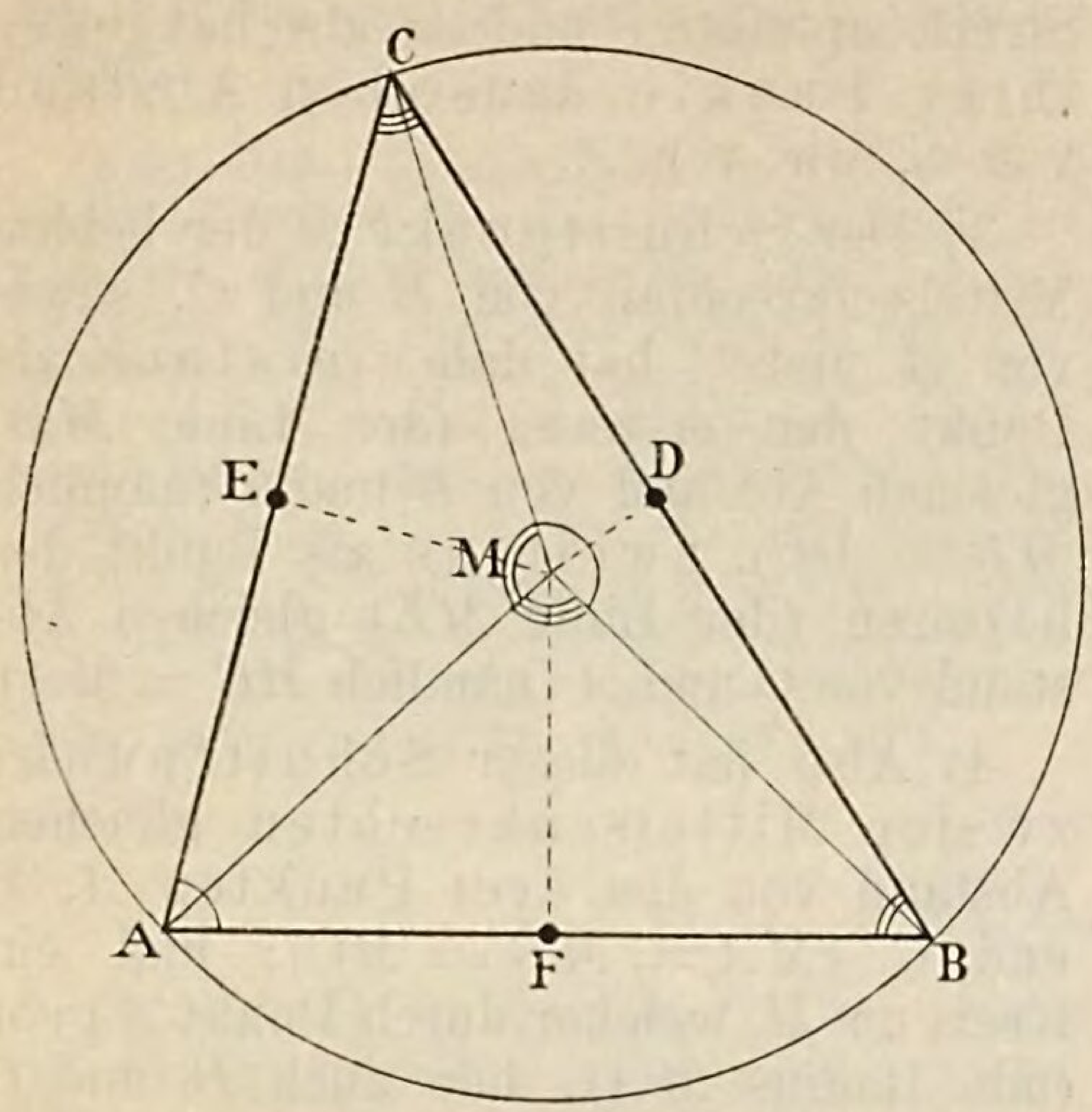
$$BDC > CEA > AFB,$$

dagegen:

Abstandsstrecken vom Mittelpunkt:

$$MD < ME < MF.$$

Figur 49.



4) Die Grössenfolge der Seitenstrecken eines eingeschriebenen Dreiecks ist gerade entgegengesetzt der Grössenfolge der Abstandsstrecken dieser Seiten vom Kreismittelpunkte.

5) Durch diese Abstandsstrecken selbst wird das ganze Dreieck zerlegt in drei Vierecke mit gemeinschaftlicher Spitze, deren jedes zwei rechte Winkel hat; jedes der gleichschenkligen Teildreiecke wird zerlegt in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, welche diese Mittelsenkrechte als gemeinsame Kathete haben.

Frage 48. Was folgt aus den Sätzen 5 über die Abstandsstrecken der Dreiecksseiten vom Kreismittelpunkte?

Erkl. 107. Aus den Sätzen 8 ebenso wie aus den Sätzen 4 und der Antwort auf die Frage 5 lässt sich auch als Bestätigung früher bewiesener Sätze die Folgerung ziehen, dass zu gleichen Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks auch gleiche Mittelpunktswinkel, Kreisbogen, Kreisaus- und -abschnitte, sowie gleiche Gegenwinkel und gleiche Abstandsstrecken der Seiten vom Kreismittelpunkte gehören.

Antwort. Da die Abstandsstrecken *MD*, *ME*, *MF* in Figur 49 nach Satz 5a Mittelsenkrechte der Dreiecksseiten sein müssen, so folgt, dass die drei Mittelsenkrechten eines einem Kreise eingeschriebenen Dreiecks durch denselben Punkt gehen, nämlich durch den Kreismittelpunkt, welcher selbst gleichen Abstand hat von den drei Ecken des Dreiecks als Kreispunkten.

Frage 49. Welches ist die gegenseitige Lage der Mittelsenkrechten eines beliebigen Dreiecks?

Erkl. 108. Statt zur Mittelsenkrechten *MD* die Mittelsenkrechte *ME* zuzufügen, hätte man auch die Mittelsenkrechte *MF* als zweite zu *MD* wählen können, und hätte wieder $MA = MB = MC$ gefunden. Und ebenso, wenn als erstes Paar die beiden Mittelsenkrechten *ME* und *MF* gewählt worden wären. Immer findet man, dass die Mittelsenkrechte der dritten Seite eines beliebigen Dreiecks durch denselben Punkt gehen muss, in welchem sich die beiden ersten schneiden.

Erkl. 109. Die der nebenstehenden Untersuchung zu Grunde liegenden Sätze aus der Lehre von der achsigen Symmetrie finden später noch ausführlichere Erörterung. Sie lauten:

Antwort. Da je zwei gegebene Punkte eine einzige Strecke bilden, und jede Strecke eine einzige Mittelsenkrechte besitzt, so entstehen durch die drei Punkte eines beliebigen Dreiecks im ganzen drei Mittelsenkrechte, und man erhält folgende Schlussreihe:

1) Zieht man in einem beliebigen Dreieck *ABC* (siehe Figur 49 oder 50) die Mittelsenkrechte der Punkte *B* und *C*, so ist dieselbe Symmetrieachse für die Streckenpunkte *B* und *C*; also hat jeder ihrer Punkte denselben Abstand von *B* wie von *C*.

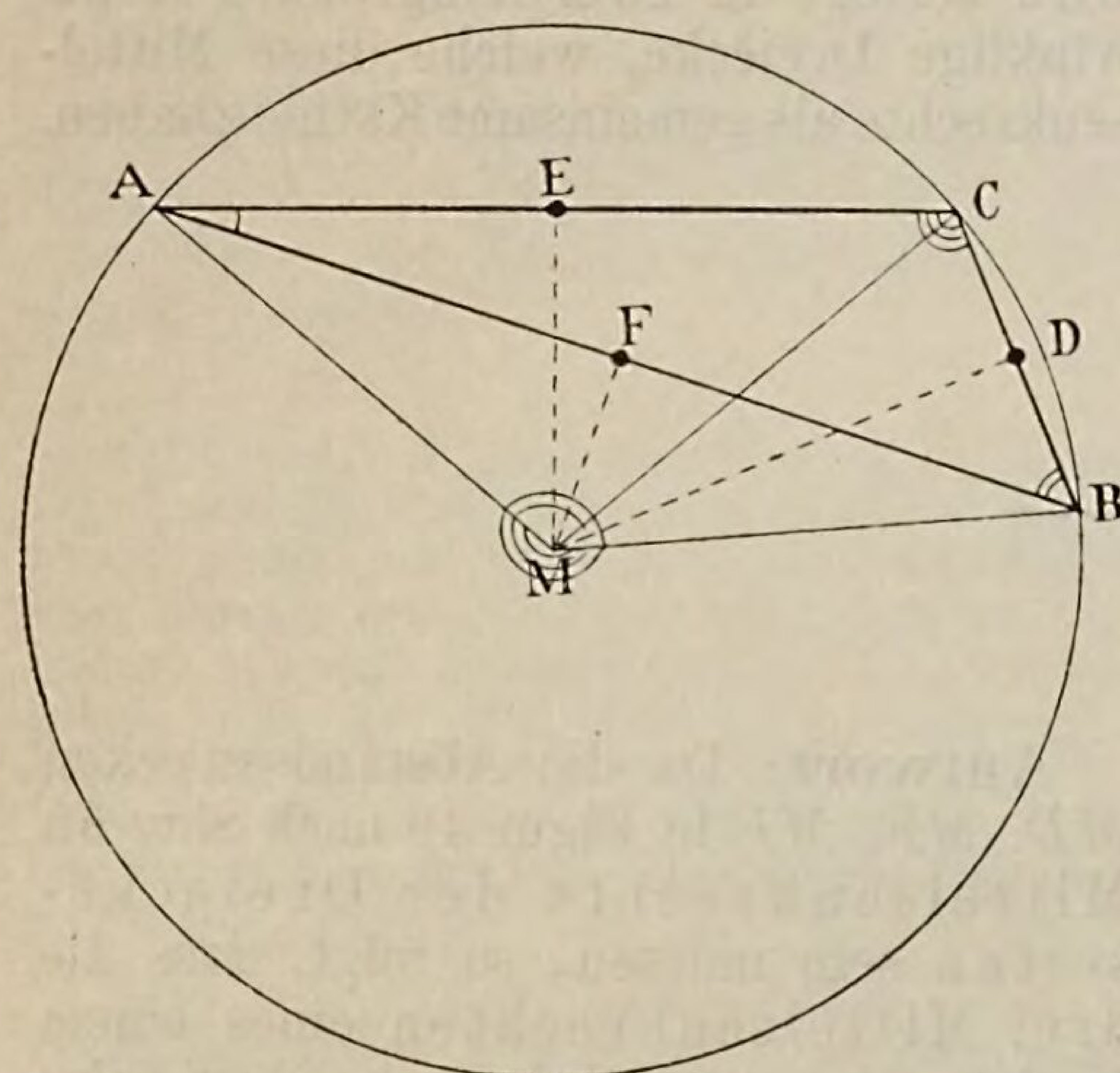
2) Zieht man dazu die Mittelsenkrechte der Punkte *C* und *A*, so ist

I. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten zweier Punkte hat gleichen Abstand von beiden.

II. Jeder Punkt mit gleichem Abstand von zwei Punkten liegt auf der Mittelsenkrechten derselben.

(Siehe die Sätze 14 und Erkl. 44b im Abschnitte über die Symmetrie im III. Teile und jene über geometrische Oerter und merkwürdige Punkte im Dreieck in diesem Teile dieses Lehrbuches).

Figur 50.



dieselbe Symmetrieachse für die Streckenpunkte C und A; also hat jeder ihrer Punkte denselben Abstand von C, wie von A.

3) Der Schnittpunkt M der beiden Mittelsenkrechten von B und C, sowie von A und C hat daher erstens als Punkt der ersteren (der Linie MD) gleichen Abstand von B und C (nämlich $MB = MC$), zweitens als Punkt der letzteren (der Linie ME) gleichen Abstand von C und A (nämlich $MC = MA$).

4) Also hat dieser Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten gleichen Abstand von den drei Punkten A, B und C ($MA = MB = MC$); und ein Kreis um M, welcher durch Punkt A geht (mit Radius MA), hat auch B und C als Kreispunkte.

5) Da hiernach für Punkt M auch $MA = MB$ ist, so müssen auch die Radien von M nach den Punkten A und B mit der Dreiecksseite AB ein gleichschenkliges Dreieck bilden: folglich muss auch die Mittelsenkrechte der Grundseite AB durch die Dreiecksspitze M gehen.

Frage 50. Zu welchen Aussagen führt die Antwort der vorigen Frage 49?

Erkl. 110. Die drei Mittelsenkrechten würden — wenn sie beliebige Geraden wären — ein Dreiseit bilden. Sie sind aber verknüpft durch die merkwürdige Eigenschaft, durch denselben Punkt zu gehen.

Erkl. 111. In Figur 49 und 50 sind zwei verschiedene Fälle des Dreiecks gezeichnet. Je stumpfer der eine Winkel des Dreiecks ist, desto weiter rückt der Mittelpunkt M von dem Dreieck fort. Und wenn die drei Punkte ABC gar kein Dreieck mehr bilden, sondern auf einer Geraden liegen, dann werden die drei Mittelsenkrechten parallel, sie schneiden einander im Unendlichen. Dann rückt also auch der Mittelpunkt M des den drei Punkten umgeschriebenen Kreises ins Unendliche, die drei gleichen Strecken $MA = MB = MC$ werden unendlich, und der Kreis mit unendlichem Radius fällt zusammen mit der Verbindungsgeraden der drei gegebenen Punkte. (Vergl. Erkl. 102 im II. Teile dieses Lehrbuches, woselbst die geradlinige Verschiebung aufgefasst wurde als besonderer Fall der Umdrehung um einen unendlich fernen Umdrehungsmittelpunkt,

Antwort. Auf Grund der vorigen Antwort kann man folgende Aussagen machen:

Satz 18. Die drei Mittelsenkrechten eines beliebigen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt. Derselbe hat gleichen Abstand von den drei Eckpunkten des Dreiecks, und ist daher Mittelpunkt eines durch diese drei Punkte gehenden Kreises, also Mittelpunkt eines dem Dreieck umgeschriebenen Kreises.

Satz 18a. Jedes beliebige Dreieck kann angesehen werden als ein einem Kreise eingeschriebenes Dreieck; oder für jedes beliebige Dreieck gibt es einen umgeschriebenen Kreis.

indem die Punkte sich bewegen auf Kreisen mit unendlich grossen Radien, also auf geraden Linien).

Erkl. 112. Entsprechend der Ueberlegung in Erkl. 108 braucht man, um den durch drei gegebene Punkte bestimmten Kreis zu konstruieren, nicht alle drei Verbindungsstrecken dieser drei Punkte zu untersuchen und alle drei Mittelsenkrechten desselben zu zeichnen, sondern zwei beliebige der Mittelsenkrechten genügen schon und liefern als ihren Schnittpunkt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Es wird also von praktischen Rücksichten abhängen, welche zwei man aus den drei möglichen Mittelsenkrechten auswählen will.

Oder:

Satz 18b. Durch drei beliebig gegebene Punkte lässt sich stets eine Kreislinie legen — oder:

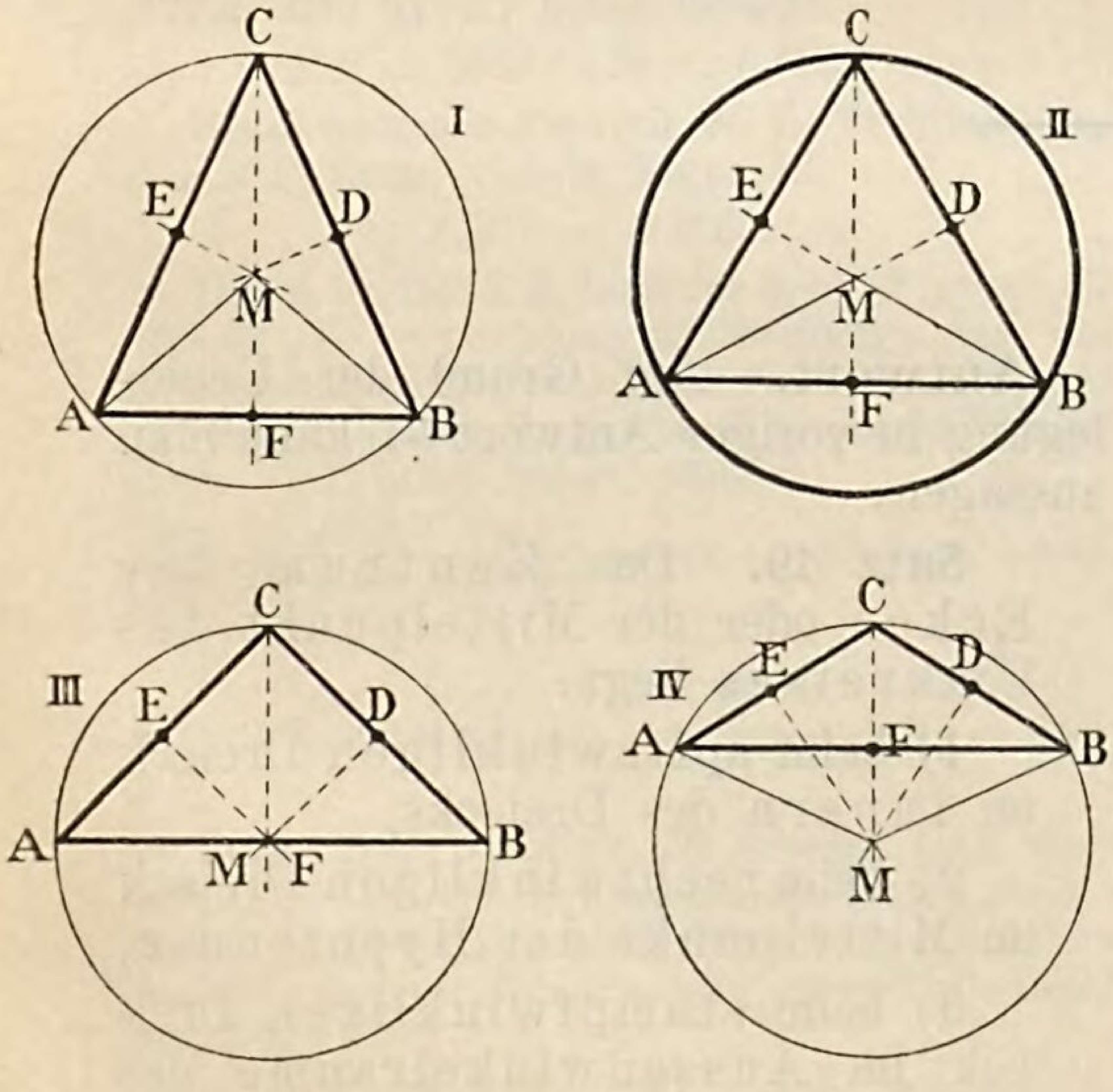
Drei beliebige Peripheriepunkte bestimmen stets eindeutig eine Kreislinie.

Und umgekehrt:

Satz 18c. Zwei Kreise, welche drei gemeinsame Punkte haben, fallen vollständig zusammen, also können zwei verschiedene Kreise einander höchstens in zwei Punkten schneiden.

Frage 51. Welche Lagen nimmt der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises bei Dreiecken mit verschiedenen Winkelgrössen an?

Figur 51.



Erkl. 113. Der dem Dreieck umgeschriebene Kreis wird auch der „Umkreis“ des Dreiecks genannt. Der Mittelpunkt des Umkreises wird auch das „Zentrum der Ecken“ genannt, weil er gleichen Abstand von den Eckpunkten hat.

Erkl. 114. Schon wegen der achsigen Symmetrie des Kreises und des gleichschenkligen Dreiecks muss der Mittelpunkt des Umkreises beim gleichschenkligen Dreieck stets auf der Achse liegen, also auf der Mittelsenkrechten der Grundseite und Halbierungslinie des Winkels an der Spitze. Die Beziehungen zwischen der

Antwort. Die verschiedenen Lagen des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises bei einem Dreieck können übersichtlich untersucht werden bei Dreiecken über derselben Grundseite, aber mit verschiedenen Winkelgrössen am Scheitel:

1) Ist der Winkel an der Spitze ein spitzer Winkel (s. Figur 51 I), und auch alle drei Dreieckswinkel spitze, so liegt der Kreismittelpunkt im Innern des Dreiecks, denn jeder Dreieckswinkel hat als spitzer Peripheriewinkel einen Standbogen unter 180⁰, folglich auch einen zugehörigen Mittelpunktswinkel unter einem gestreckten Winkel.

2) Ist das Dreieck ein recktwinkliges (s. Figur 51 III), so gehört zum rechten Peripheriewinkel bei C ein Halbkreis als Standbogen und ein gestreckter Winkel als Mittelpunktswinkel. Folglich fällt der Mittelpunkt auf die Gegenseite des rechten Winkels selbst, diese wird Durchmesser und ihr Mittelpunkt Schnittpunkt der zwei andern Mittelsenkrechten.

3) Ist der Winkel an der Spite ein stumpfer Winkel (s. Figur 51 IV), so gehört zu dem stumpfen Peripheriewinkel ein grösserer Standbogen als ein Halbkreis, und ein überstumpfer Mittelpunktswinkel. Folglich muss die Gegenseite des stumpfen Winkels

Dreiecksgrundseite und Dreiecksspitze zum Mittelpunkt des Umkreises sind dann beim gleichschenkligen Dreieck dieselben, wie beim allgemeinen Dreieck mit beliebiger Seite als Grundseite und deren Gegenecke zum Mittelpunkt des Umkreises. Beim gleickschenkligen Dreieck aber wird die Untersuchung eben dadurch vereinfacht, dass der Radius MC mit der Mittelsenkrechten MF zusammenfällt (siehe Figur 51). Dennoch aber bleibt die Allgemeinheit der Untersuchung unbeschränkt, da die Lage des Mittelpunkts zu einer Seite nur immer von der Grösse des einen Dreieckswinkels abhängt, welcher der Gegenwinkel jener Seite ist.

Erkl. 115. Für die erste Gruppe der nebenstehenden Antwort ist der allgemeine Fall dargestellt in Figur 49, wo beim spitzwinkligen Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises ins Innere fällt; der dritte Fall ist allgemein dargestellt in Fig. 50, wo beim stumpfwinkligen Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises ausserhalb des Dreiecks fällt. Der zweite Fall ist die bereits mehrfach eingetroffene Bestätigung des Satzes 60 im III. Teile dieses Lehrbuches. Als Zwischenglied des ersten und zweiten zeigt Figur 51 II noch das Zusammenfallen des Zentrums der Ecken beim gleichseitigen Dreieck mit dem Schnittpunkt aller Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten.

zwischen Kreismittelpunkt und Dreiecksspitze hindurchgehen, der Kreismittelpunkt liegt ausserhalb des Dreiecks.

Frage 52. Welche Aussagen über die Lage des Zentrums der Ecken beim Dreieck ergeben sich aus der vorigen Ueberlegung?

Erkl. 116. Es lassen sich unschwer noch weitere Angaben finden über die Lage des Zentrums der Ecken: dasselbe liegt auf derjenigen Seite der Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels, welche den kleineren der beiden übrigen Dreieckswinkel enthält; — seine Abstände von den drei Dreiecksseiten haben die entgegengesetzte Grössenfolge, als diese Seiten selbst, so dass es also der kleinsten Seite am fernsten, der grössten am nächsten liegt. Man beachte die Bestätigung dieser Aussagen an den gleichschenkligen Dreiecken in Figur 51 und vergleiche hierüber die Aufgabe 89 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Antwort. Auf Grund der Ueberlegung in voriger Antwort 51 kann man aussagen:

Satz 19. Das Zentrum der Ecken oder der Mittelpunkt des Umkreises liegt:

1) beim spitzwinkligen Dreieck im Innern des Dreiecks,

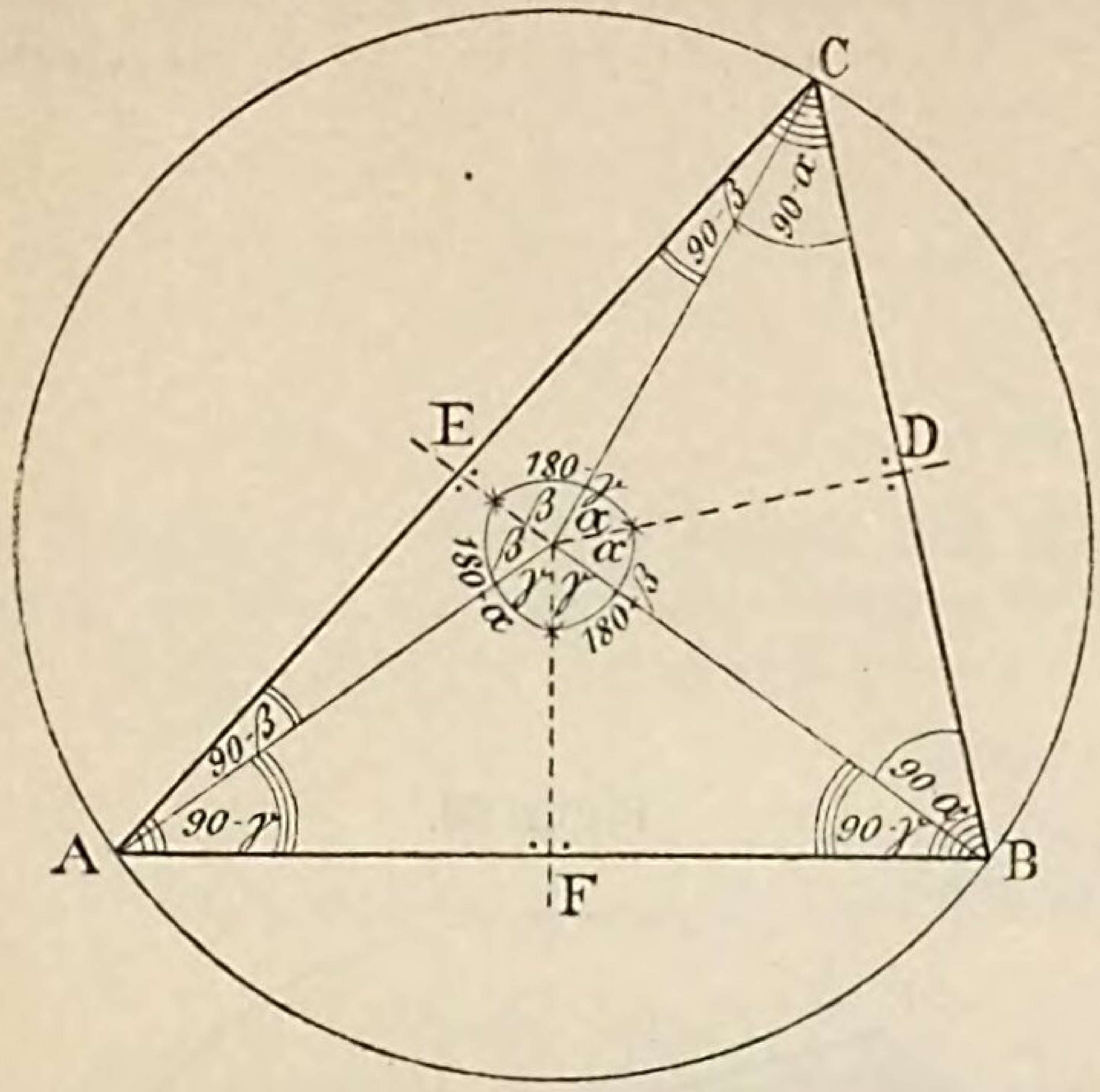
2) beim rechtwinkligen Dreieck im Mittelpunkt der Hypotenuse,

3) beim stumpfwinkligen Dreieck im Aussenwinkelraume des Dreiecks über der grössten Seite.

Frage 53. Welche Winkelgrössen entstehen zwischen den drei Radien des Umkreises und den Mittelsenkrechten und Seiten des Dreiecks?

Antwort. 1) Der Winkel zweier Kreisradien ist als Mittelpunktswinkel stets doppelt so gross als der auf gleichem Bogen stehende Peripherie-

Figur 52.



Erkl. 117. Besondere Beachtung erfordert die Auffassung der nebenstehenden Winkelbeziehungen beim stumpfwinkligen Dreieck. So ist in Figur 53 der Betrag $2\cdot\gamma$ grösser als 180^0, nämlich gleich dem überstumpfen Winkel AMB, also ist der hohle Winkel

$$AMB = 360^0 - 2\gamma = 2(180^0 - \gamma)$$

Bezeichnet man etwa mit MG die Verlängerung von MF, dann wird in Figur 53:

$$\sphericalangle AMG = BMG = \gamma.$$

Dabei ergibt sich dann für beide Figuren 52 und 53 die gemeinsame Erscheinung, dass am Kreismittelpunkte jeder Dreieckswinkel zweimal auftritt, und dass die Summe dieser sechs Winkel einen Vollwinkel liefert, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Figur 52: } AMF + BMF \\ \text{Figur 53: } AMG + BMG\end{array}\right\} + BMD + DMC + CME + EMA$$
$$= \gamma + \gamma + \alpha + \alpha + \beta + \beta$$
$$= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^0;\ \alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Erkl. 118. In Figur 52 erkennt man, dass durch die von den Kreisradien dargestellte Zerlegung der Dreieckswinkel jeder aus zwei Stücken besteht; und die Summe aller sechs Teilwinkel ist wieder:

$$(90 - \beta) + (90 - \gamma) + (90 - \gamma) + (90 - \alpha)$$
$$+ (90 - \alpha) + (90 - \beta)$$
$$= 2(90 - \alpha + 90 - \beta + 90 - \gamma)$$
$$= 2[270 - (\alpha + \beta + \gamma)] = 2(270 - 180)$$
$$= 2\cdot 90 = 180^0.$$

Ebenso ist die Summe je zweier Teilwinkel an einer Ecke:

$$(90 - \beta) + (90 - \gamma) = 180^0 - (\beta + \gamma) = \alpha,$$
$$(90 - \gamma) + (90 - \alpha) = 180^0 - (\gamma + \alpha) = \beta,$$
$$(90 - \alpha) + (90 - \beta) = 180^0 - (\alpha + \beta) = \gamma.$$

In Figur 53 tritt in den Eckpunkten A und B der Winkel $\gamma - 90^0$ auf, muss aber, um den winkel oder Dreieckswinkel, also in Figur 52 und 53:

$$\sphericalangle AMB = 2\gamma;\ \sphericalangle BMC = 2\alpha;\ \sphericalangle CMA = 2\beta.$$

2) Da der Winkel zweier Kreisradien nach Satz 5a je durch eine der Mittelsenkrechten halbiert wird, so ist der Winkel zwischen je einem Radius und einer Mittelsenkrechten gleich einem der Dreieckswinkel selbst, also in Figur 52:

$$\sphericalangle AMF = BMF = \gamma,\ \sphericalangle BMD = CMD = \alpha,$$
$$\sphericalangle CME = AME = \beta.$$

In Figur 53, wo der überstumpfe Winkel AMB gleich 2γ ist, wäre auch dessen Hälfte, gebildet durch die Verlängerung der Linie MF gleich γ zu setzen; es wird daher in diesem Falle:

$$\sphericalangle AMF = BMF = 180^0 - \gamma,$$

dagegen im übrigen wie zuvor:

$$\sphericalangle BMD = CMD = \alpha,\ \sphericalangle CME = AME = \beta.$$

3) In dem rechtwinkligen Dreieck, welches den eben betrachteten Winkel enthält, sind Katheten die Mittelsenkrechte der Sehne und die Hälfte der Dreiecksseite; Hypotenuse ist der Radius des Kreises. Also ist der Winkel zwischen Kreisradius und Dreiecksseite der Komplementwinkel zu dem Winkel zwischen Radius und Mittelsenkrechte, also komplementär je zu einem der Dreieckswinkel selbst. Man hat also an den drei Dreiecksseiten als Grundseiten der gleichschenkligen Dreiecke BMC, CMA und AMB folgende Winkel: in Figur 52 und Figur 53 gemeinsam:

$$\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB = 90^0 - \alpha,$$
$$\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC = 90^0 - \beta;$$

ferner in Figur 52 allein:

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 90^0 - \gamma,$$

dagegen in Figur 53:

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 90^0 - (180 - \gamma)$$
$$= \gamma - 90^0.$$

Dreieckswinkel zu liefern, von dem andern Teilwinkel abgezogen werden. Man erhält daher als Minuenden die Grösse $(\gamma - 90)$ und kann dafür wieder schreiben als Addenden die Grösse $(90 - \gamma)$, wie zuvor. Also:

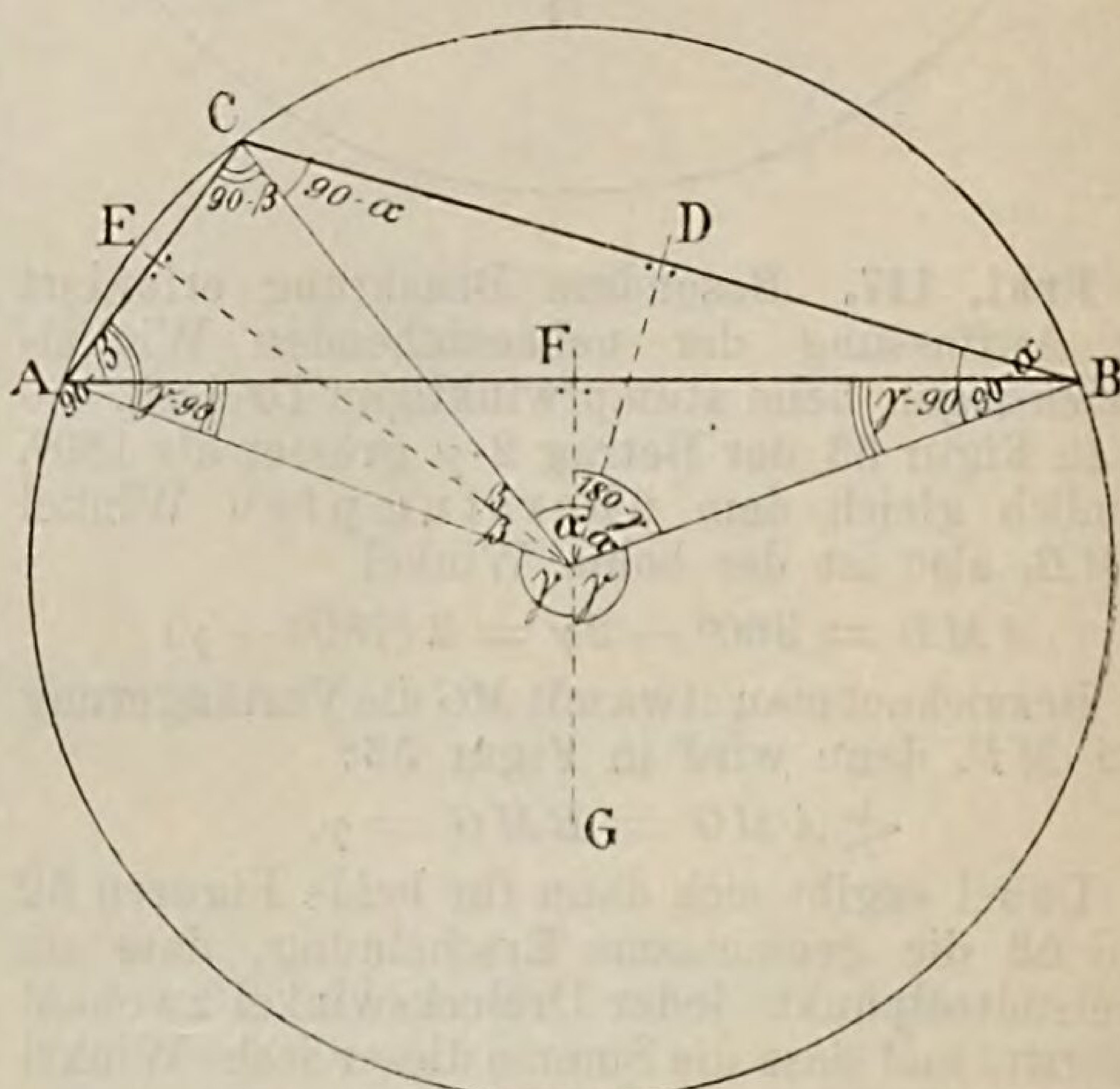
$$(90 - \beta) - (\gamma - 90) = (90 - \beta) + (90 - \gamma) = 180^0 - (\beta + \gamma) = \alpha$$

und

$$(90 - \alpha) - (\gamma - 90) = (90 - \alpha) + (90 - \gamma) = 180^0 - (\alpha + \gamma) = \beta.$$

Ebenso wären auch für die Summierung der drei Dreieckswinkel diese Winkel $(\gamma - 90)$ negativ einzusetzen, und liefern so wieder dasselbe Ergebnis wie oben in Figur 52, indem eben das Komplement des stumpfen Winkels als eine negative Grösse in die Rechnung eintritt.

Figur 53.



Erkl. 119. Um die Analogie der Figuren 52 und 53 aufrecht zu erhalten, nennt man auch in Figur 53 die Linien MA und MB Teilungslinien des Winkels CAB bezw. CBA. Und ebenso, wie nach Erkl. 77 des I. Teiles dieses Lehrbuches auf einer Strecke AB die von einem auf derselben Geraden liegenden Punkt P gebildeten Abschnitte AP und BP zwischen dem Teilpunkte P und den Streckenpunkten A und B als die Teilstrecken der Strecke bezeichnet werden, ebenso bezeichnet man nunmehr bei einem Winkel (b, c) die von einer durch denselben Winkelscheitelpunkt gehenden Geraden r gebildeten Winkel (b, r) und (c, r) zwischen der Teilungslinie und den Winkelschenkeln b und c als die Teilwinkel des Winkels.

Lag jener Punkt P innerhalb oder ausserhalb der Strecke AB, so waren die Teilstrecken AP und PB gleichgerichtet, lag P ausserhalb, so waren AP und PB von verschiedener Richtung. Ebenso geht in Figur 52 überall und in Figur 53 am Punkt C die Teilungslinie durch das Innere des Winkels, und erzeugt Teilwinkel (b, r) und (r, a) von gleicher Drehungsrichtung; an den Punkten A und B der Figur 53 dagegen geht die Teilungslinie nicht durch das Innere des Winkels, erzeugt also Teilwinkel (b, r) und (r, c) von ungleicher Drehungsrichtung. Daher muss der Winkel (r, c), wenn er in die Rechnung eintreten soll, als negative Grösse eingesetzt werden.

Frage 54. Wie lässt sich das Ergebnis der vorigen Antwort in Worte fassen?

Antwort. Auf Grund der vorigen Antwort kann man folgende Aussagen machen:

Satz 20. Verbindet man die Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Mittelpunkt seines Umkreises, so ist:

a) der Winkel zweier benachbarten Radien je gleich dem

Erkl. 120. Für nebenstehenden Satz 20 sind zwei Radien als benachbarte zu betrachten, wenn der dritte Radius nicht durch ihren Winkel geht. Dadurch gilt der Satz in Figur 53 nur für den überstumpfen Winkel AMB, nicht aber für den hohlen Winkel AMB. Ebenso ist das Komplement eines stumpfen Winkels als negative

Grösse anzusehen, und die Teilung eines Winkels durch eine Linie in seinen Nebenwinkel nach der in Erkl. 119 enthaltenen Auseinandersetzung aufzufassen.

doppelten Dreieckswinkel über der gleichen Dreiecksseite,

b) der Teilwinkel eines Dreieckswinkels zwischen einer Dreiecksseite und einem Radius gleich dem Komplement des an der andern Dreiecksseite liegenden Dreieckswinkels.

Frage 55. Wie bestätigen sich die Sätze 19 und 20 bei dem Umkreise der „besonderen Dreiecke“?

Antwort. 1) Beim gleichschenkligen Dreieck liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf der Symmetrieachse, also auf der Winkelhalbierenden an der Spitze, oder der Höhe des Dreiecks, und zwar, wie aus Figur 51 I, II, IV zu entnehmen ist, beim spitzwinkligen innerhalb der Grundseite, beim rechtwinkligen auf der Grundseite, beim stumpfwinkligen ausserhalb der Grundseite. Der eine der Radien ist Winkelhalbierende an der Spitze, also werden die Teilwinkel des Winkels an der Spitze beide gleichgross, jene an der Grundseite symmetrisch.

2) Beim gleichseitigen Dreieck liegt der Mittelpunkt des Umkreises sicherlich im Innern des Dreiecks, da dasselbe drei spitze Winkel hat. Wegen der dreifachen achsigen Symmetrie liegt der Punkt auf allen drei Achsen zugleich, also im Schnittpunkt der drei Höhen, Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten, Mittellinien des Dreiecks, und zwar nach Aufgabe 147 des III. Teiles in dem Teilpunkte zwischen dem untern und mittlern Drittel der Höhe. Daher ist beim gleichseitigen Dreieck der Radius des Umkreises gleich zwei Dritteilen der Höhe des Dreiecks. Alle Teilwinkel werden gleichgross.

3) Beim rechtwinkligen Dreieck liegt der Mittelpunkt auf der Hypotenuse, und zwar im Mittelpunkte derselben, da die Hypotenuse als die zum Halbkreis gehörige Sehne Durchmesser wird. Es ist dies eine Bestätigung des Satzes 60 im III. Teile dieses Lehrbuches, wonach bei jedem rechtwinkligen Dreieck der Abstand des Mittelpunktes der Hypotenuse vom Scheitel des rechten

Erkl. 121. Im gleichschenkligen Dreieck (s. Figur 51) ist ebenso wie in Figur 52 und 53:

$$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle ACB;$$
$$\sphericalangle AMC = BMC = 2 \cdot \sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BAC.$$

Im rechtwinklig gleichschenkligen insbesondere:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 45^0,$$

und

$$\sphericalangle AMC = BMC = 90^0.$$

Ferner in Figur 51 I und II:

$$\sphericalangle AMF = \sphericalangle BMF = ACB;$$

in Figur 51 IV:

$$\sphericalangle AMF = BMF = 180^0 - \sphericalangle ACB.$$

Und in allen vier Fällen der Figur 51:

$$\sphericalangle AME = \sphericalangle CME = \sphericalangle CMD = \sphericalangle BMD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC.$$

Endlich in Figur 51 I, II und III:

$$\sphericalangle MAF = MBF = 90^0 - \sphericalangle ACB,$$

nämlich im letzteren Falle gleich Null, da $\sphericalangle ACB$ selbst ein Rechter ist; in Figur 51 IV aber:

$$\sphericalangle MAF = \sphericalangle MBF = \sphericalangle ACB - 90^0.$$

Dagegen in allen vier Fällen der Figur 51:

$$\sphericalangle MAE = \sphericalangle MCE = \sphericalangle MCD = \sphericalangle MBD = 90^0 - ABC = 90^0 - BAC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ABC.$$

Erkl. 122. Im gleichseitigen Dreieck: (siehe Figur 51 II) ist:

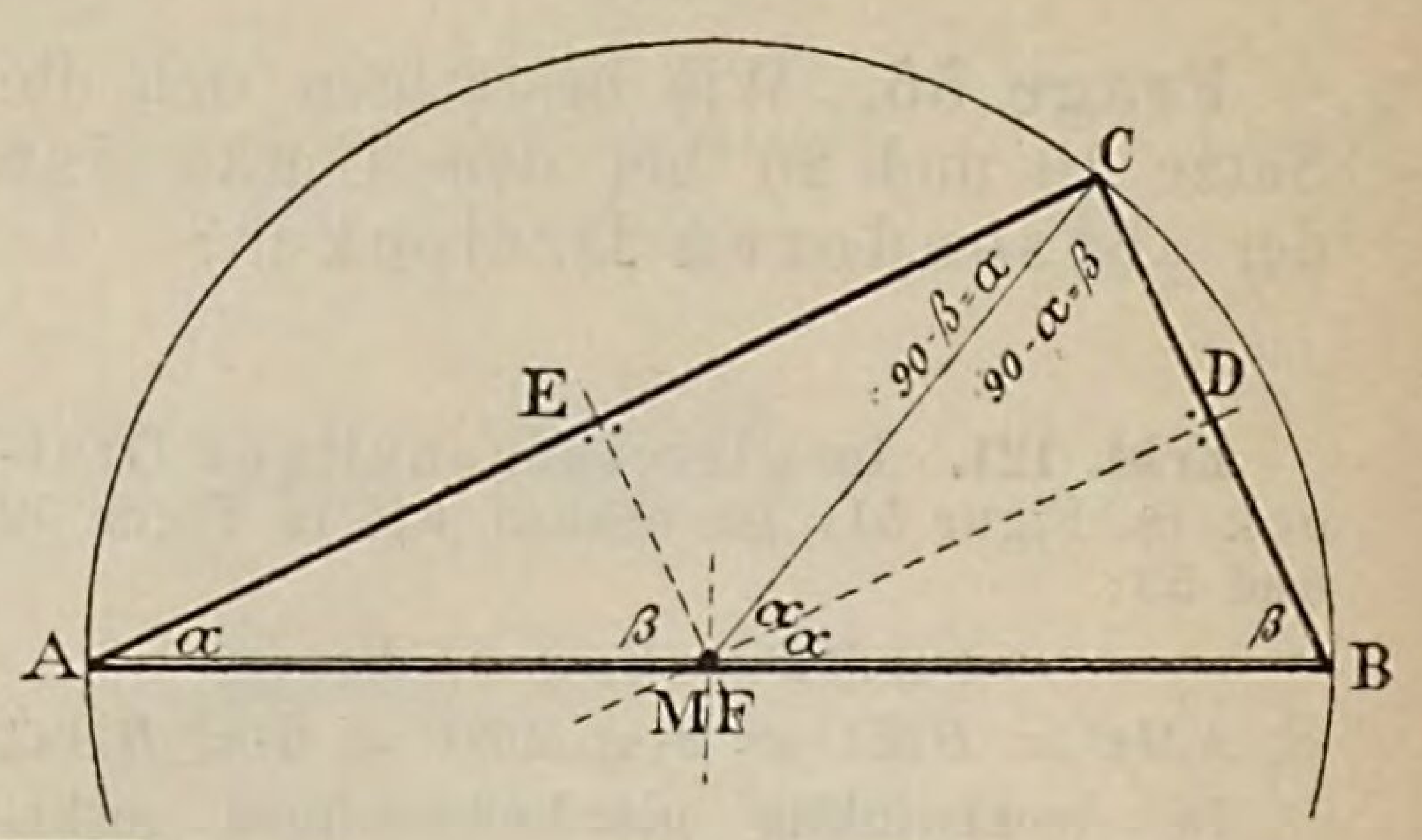
$$MA = MB = MC = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} CF;$$

und ferner:

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMA = 120^0;$$
$$\sphericalangle AMF = \sphericalangle BMF = \sphericalangle BMD = \sphericalangle CMD = \sphericalangle CME = \sphericalangle AME = 60^0;$$
$$\sphericalangle MAF = \sphericalangle MBF = \sphericalangle MBD = \sphericalangle MCD = \sphericalangle MCE = \sphericalangle MAE = 30^0.$$

Winkels gleich der halben Hypotenuse ist. Zwei Radien fallen mit der Hypotenuse zusammen, die Mittelsenkrechten jeder Kathete werden parallel der andern Kathete, die Mittelsenkrechte der Hypotenuse bis zum Kreismittelpunkte erhält die Länge Null (siehe Figur 54).

Figur 54.



Erkl. 123. Im rechtwinkligen Dreieck (siehe Figur 51 III und Figur 54) ist:

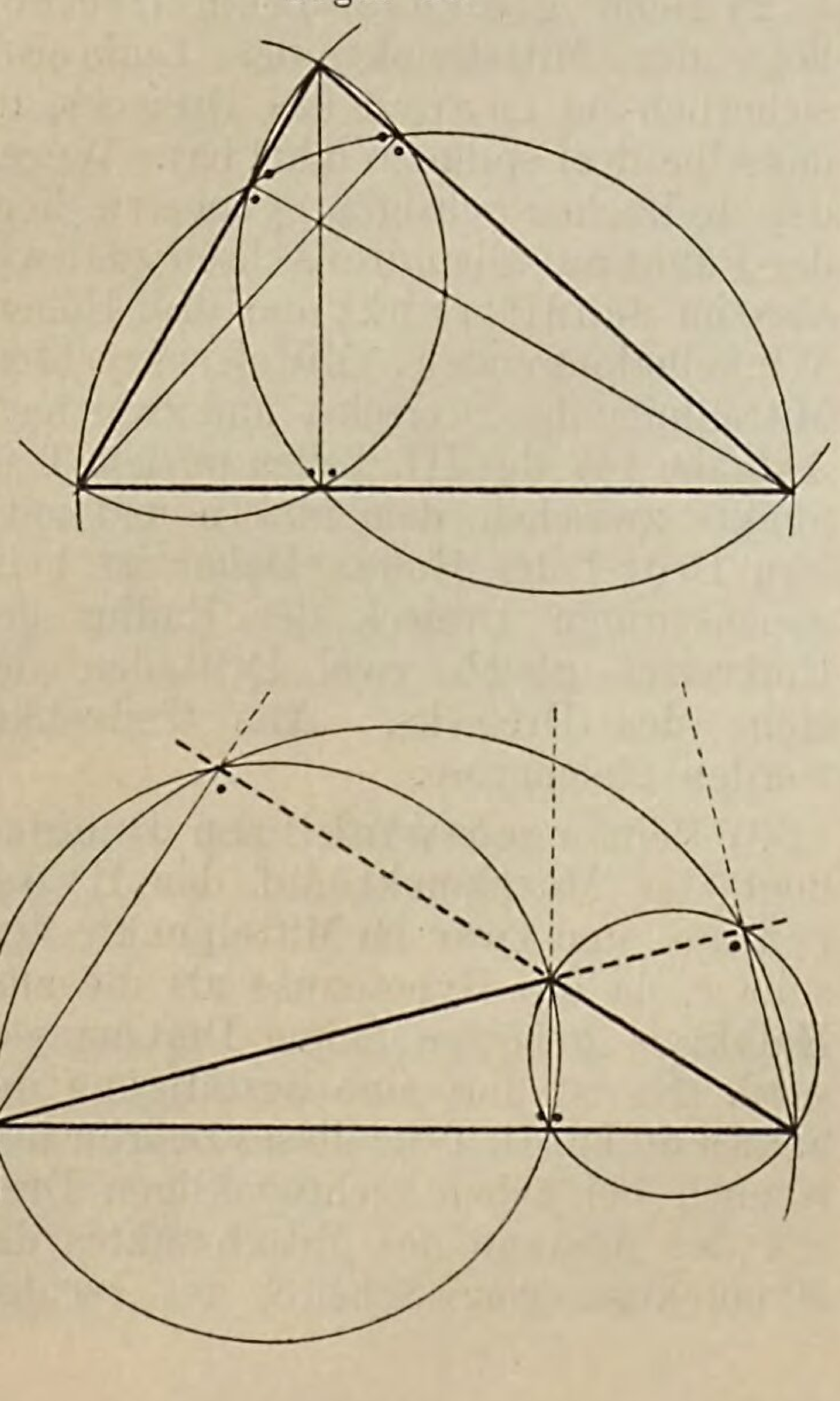
$$MA = MB = MC = \frac{1}{2} AB;$$

und ferner:

$$\sphericalangle AMC = 2 \cdot \sphericalangle ABC, \; \sphericalangle BMC = 2 \cdot \sphericalangle BAC,$$
$$\sphericalangle AMB = 180^0 = 2 \cdot ACB;$$
$$\sphericalangle AME = CME = \beta, \; \sphericalangle BMD = CMD = \alpha,$$
$$\sphericalangle AMF = BMF = ACB = 90^0;$$
$$\sphericalangle MAF = \sphericalangle MBF = 90^0 - 90^0 = 0^0,$$
$$\sphericalangle MAE = \sphericalangle MCE = 90^0 - \beta = \alpha,$$
$$\sphericalangle MBD = \sphericalangle MCD = 90^0 - \alpha = \beta.$$

Frage 56. Welche Folgerungen liefert die Antwort der vorigen Frage für die rechtwinkligen Dreiecke, welche in jedem beliebigen Dreieck durch die Höhen gebildet werden?

Figur 55.



Antwort. Die von zwei Eckpunkten eines beliebigen Dreiecks ausgehenden Höhen bilden über der Verbindungsstrecke dieser Eckpunkte als Hypotenuse je ein rechtwinkliges Dreieck: dessen Katheten sind die Höhe selbst und das von der andern Seite abgeschnittene Stück (die Projektion der Verbindungsstrecke auf die entsprechende andere Dreiecksseite). Daher muss der Halbkreis über einer Dreiecksseite als Durchmesser durch den Scheitel des rechten Winkels gehen, also je durch den Fusspunkt der beiden Höhen. Man kann daher die Höhenfusspunkte finden, indem man über den Dreiecksseiten Halbkreise errichtet. Je zwei dieser Halbkreise schneiden einander und die dritte Dreiecksseite im gleichen Punkte, nämlich dem Fusspunkt der Höhe auf diese dritte Seite. In Figur 55 sind diese drei Halbkreise dargestellt bei einem spitzwinkligen und einem stumpfwinkligen Dreieck. Weitere Behandlung desselben Gegenstandes findet statt in dem Abschnitte C 3 über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Erkl. 124. Beim gleichschenkligen Dreieck gehen die Halbkreise über den Schenkeln durch den Mittelpunkt der Grundseite, beim gleichseitigen Dreieck geht jeder Halbkreis durch die beiden Mittelpunkte der beiden andern Seiten (vergl. Figur 76 und Antwort der Frage 102 im III. Teile dieses Lehrbuches), und im rechtwinkligen Dreieck geht der Halbkreis über der Hypotenuse durch deren Gegenecke, woselbst die Katheten in ihrer Eigenschaft als Höhen zusammentreffen.

b) Ueber das einem Kreis um- oder angeschriebene Dreieck oder über den einem Dreieck um- oder angeschriebenen Kreis.

Frage 57. Wann heisst eine Figur einem Kreise umgeschrieben oder angeschrieben?

Antwort. Eine Figur heisst einem Kreise umgeschrieben oder auch angeschrieben, wenn ihre Seitenlinien Tangenten der Kreislinie sind; der Kreis selbst heisst dieser Figur eingeschrieben oder angeschrieben.

Es ist also jede Tangente eine dem Kreise angeschriebene Linie, ein Tangentenwinkel ist ein dem Kreise angeschriebener Winkel, da seine Schenkel Tangenten sind.

Ein Dreieck oder Vieleck heisst einem Kreise um- oder angeschrieben, wenn seine Seitenlinien den Kreis berühren, oder wenn der Kreis seine Seiten berührt, so dass also alle seine Seitenlinien Tangenten des Kreises sind. Daher nennt man auch ein einem Kreise um- oder angeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

Erkl. 125. Entsprechend der Anschauungsweise in Antwort der Frage 29 und in Figur 22 kann man die Gegenüberstellung eingeschriebener und angeschriebener Figuren auch in der Weise aussprechen, dass bei eingeschriebenen Figuren die Ecken erzeugende Punkte der Kreislinie sind und dass bei angeschriebenen Figuren die Seiten erzeugende Gerade der Kreislinie sind.

Erkl. 126. Wie nach Erkl. 102 bei Vielecken von ein- und umgeschriebenen Figuren gesprochen wird, so nennt man auch bei andern krummen Linien, als nur bei dem Kreise, Figuren eingeschrieben bezw. um- oder angeschrieben, wenn ihre Ecken erzeugende Punkte bezw. ihre Seiten erzeugende Gerade oder Tangenten der Kurve sind.

Frage 58. Wie kann man sich ein einem Kreise um- oder angeschriebenes Dreieck oder ein Tangentendreieck entstanden denken?

Antwort. Ein einem Kreise um- oder angeschriebenes Dreieck kann man sich entstanden denken entweder durch Schnitt dreier an der Kreislinie beliebig ausgewählten Tangenten, oder als Verbindung dreier Tangentenwinkel, deren Schenkel zu je zweien im gleichen Kreispunkte berühren.

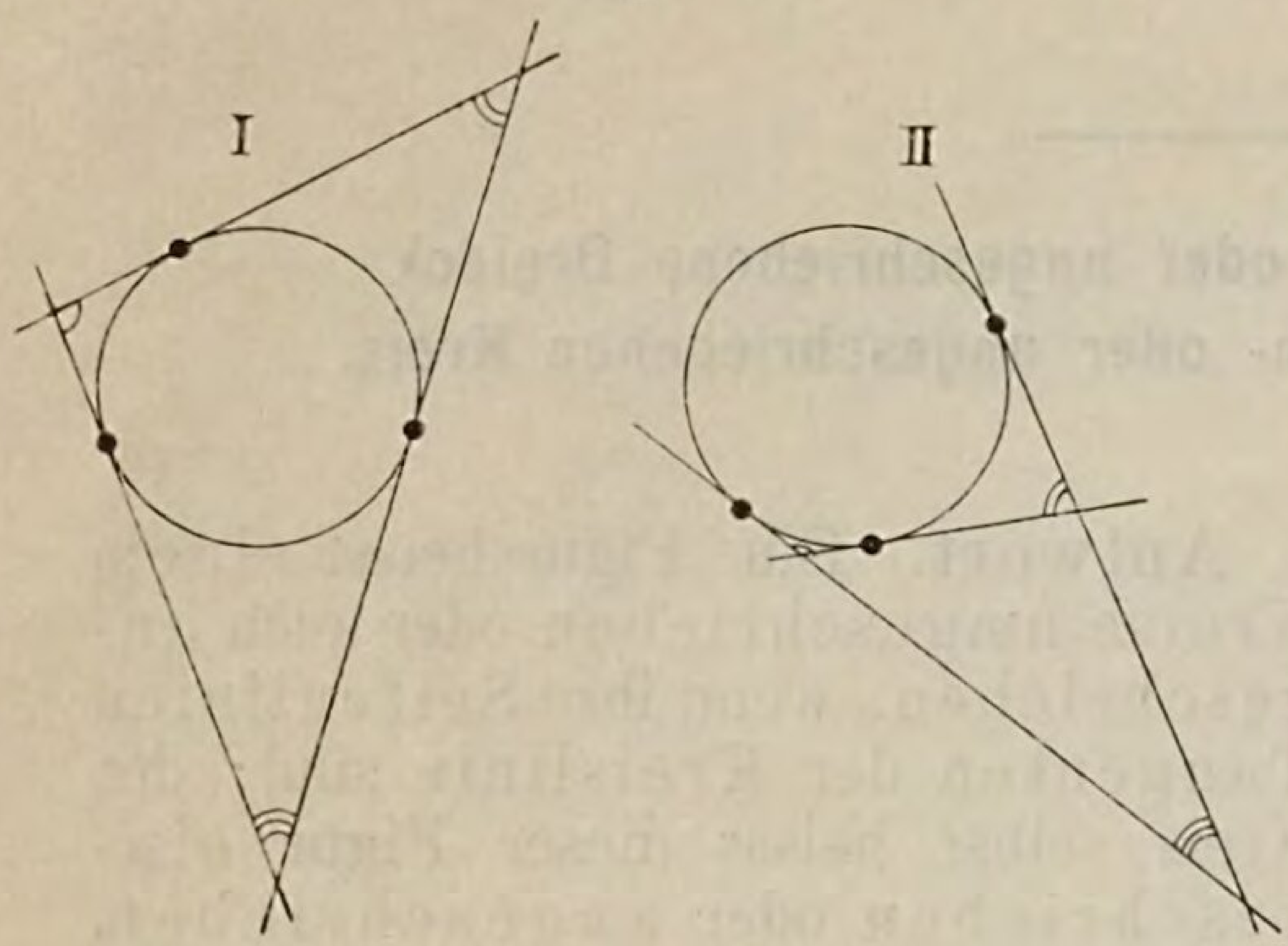
Liegt der Kreis ganz im Innern des Dreiecks, so heisst das Dreieck dem Kreise umgeschrieben, der Kreis dem Dreieck eingeschrieben (siehe Figur 56I); liegt der Kreis nicht im

Erkl. 127. Da jeder der drei Winkel des umgeschriebenen Dreiecks ein Tangentenwinkel ist, also nach Satz 13 bezw. Erkl. 64 zu seinem zugehörigen Kreisbogen supplementär ist, so müssen alle drei zusammen die Ergänzung von der Summe ihrer drei Bogen zusammen bis zu $3 \cdot 180^0$ ausmachen. Die drei Bogen zusammen bilden aber den Vollkreis oder 360^0 ihre Ergänzung zu $3 \cdot 180$ oder 540^0 ist 180^0 — also eine Bestätigung der Winkelsumme des Dreiecks gleich zwei Rechten.

Zu demselben Ergebnis gelangt man beim angeschriebenen Dreieck, worin die zwei

Nebenwinkel der Tangentenwinkel gleich den Bogen selbst sind, der dritte, wirkliche Tangentenwinkel aber das Supplement der Summe dieser beiden Bogen. Wird also die Summe der Bogen und das Supplement dieser Summe addiert, so erhält man wiederum $180^0 = 2\,R$.

Figur 56.



Erkl. 128. Wird eine der drei Tangenten als gegeben gesetzt, so entsteht nach Figur 56 ein um- oder ein angeschriebenes Dreieck, wenn die beiden andern Tangenten nach der den Kreismittelpunkt enthaltenden Seite der ersten konvergieren oder divergieren.

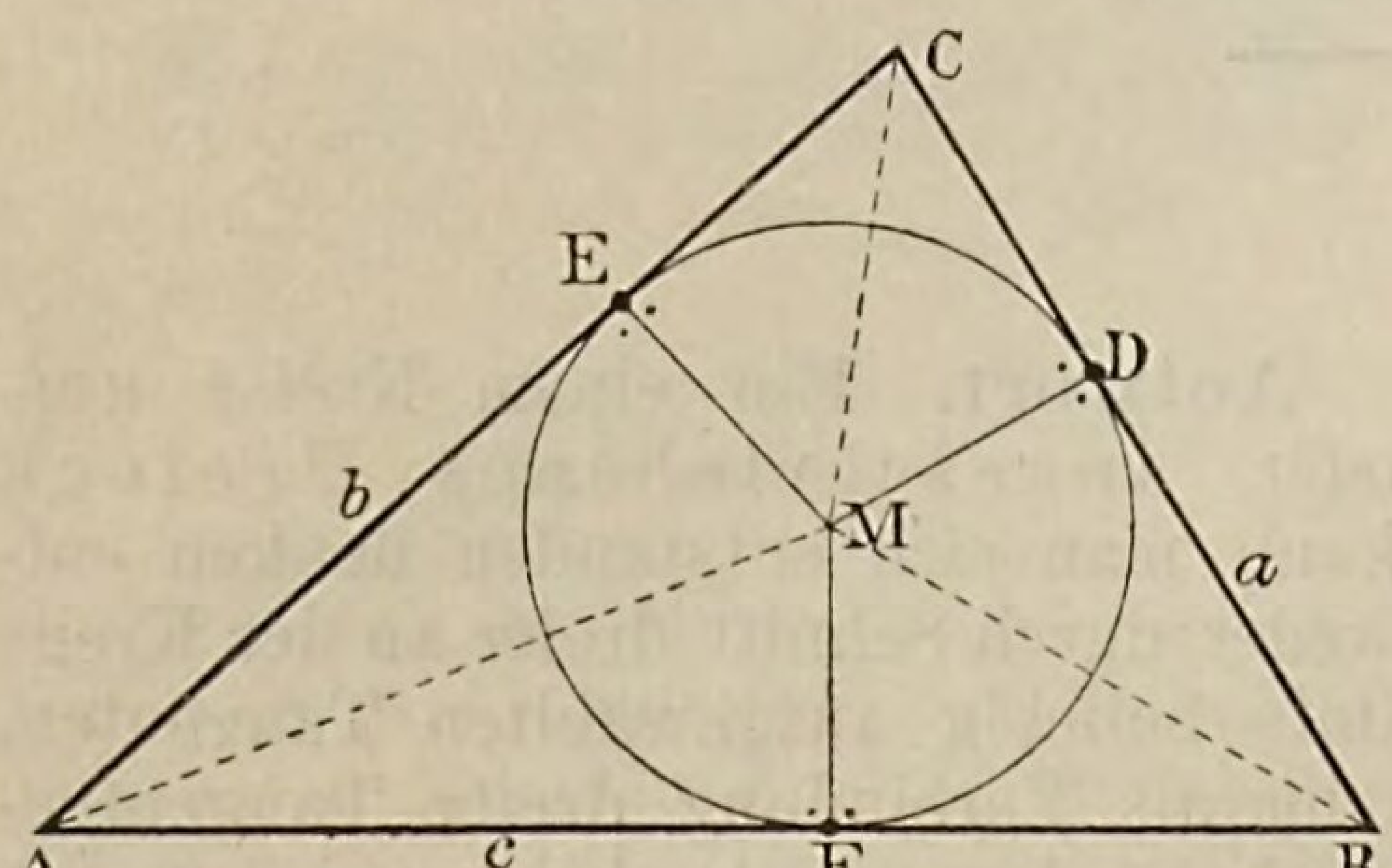
Innern des Dreiecks, so dass die Dreiecksfläche die Kreisfläche selbst nicht enthält, so heisst das Dreieck dem Kreise und der Kreis dem Dreieck angeschrieben (siehe Figur 56 II). Ein eingeschriebener Kreis heisst auch Inkreis, ein angeschriebener Ankreis des Dreiecks.

Jede Seite des um- oder angeschriebenen Dreiecks ist eine Tangente des Kreises, jeder Winkel des umgeschriebenen ist ein Tangentenwinkel, je zwei Winkel des angeschriebenen sind Nebenwinkel eines Tangentenwinkels.

Wie aus der Figur hervorgeht, berührt der Inkreis alle drei Seitenstrecken des Dreiecks, der Ankreis dagegen zwar auch alle drei Seitenlinien des Dreiecks, aber nur eine Seitenstrecke selbst, die beiden andern Dreiecksseiten dagegen auf den Verlängerungen ihrer Seitenstrecken.

Frage 59. Welche Vorstellungen über die Beziehungen zwischen den Winkeln, Kreisbogen, Mittelpunktswinkeln eines umgeschriebenen Dreiecks ergeben sich aus den Sätzen 13 und 14?

Figur 57.



Erkl. 129. Nach Antwort der Frage 156 des III. Teiles ist ein Deltoid ein Viereck, welches zwei Paare aneinander stossende gleiche Seiten besitzt. In den Vierecken $AFME$, $BDMF$, $CEMD$ sind aber als Radien $MD = ME = MF$ und ausserdem wegen Satz 14 die Tangentenabschnitte $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$.

Antwort. Da jeder Winkel eines umgeschriebenen Dreiecks (s. Figur 57) ein Tangentenwinkel ist, so gehören zu demselben ein Mittelpunktswinkel, ein Kreisbogen, eine Verbindungsstrecke mit dem Mittelpunkt; und man gelangt zu folgenden Vorstellungen:

1) Durch die Radien nach den drei Berührungspunkten eines umgeschriebenen Dreiecks entstehen drei Vierecke mit gemeinsamer Spitze im Kreismittelpunkte und mit je zwei gleichgrossen Seiten am Mittelpunkt und zwei gleichgrossen Seiten am Tangentenschnittpunkt, mit je zwei von zwei ungleichen Seiten eingeschlossenen rechten Winkeln. Diese drei Vierecke sind also Deltoide.

2) In diesen Deltoiden haben die Grössen der Tangentenwinkel die umgekehrte Grössenfolge, wie die

Die Vierecke sind aber noch ausserdem Deltoide von besonderer Art, weil ihre zwei gleichen Winkel rechte sind, so dass die beiden andern supplementär werden. Aus letzterem Grunde ist der Mittelpunktswinkel desto grösser, je kleiner der Tangentenwinkel, und umgekehrt.

Erkl. 130. Der gestreckte Mittelpunktswinkel bildet den Uebergang von dem umgeschriebenen Dreieck bezw. eingeschriebenen Kreis zum angeschriebenen Dreieck und Kreis. Denkt man sich Tangente AC in Figur 57 mit ihrem Berührungspunkt E auf dem Kreise wandernd gegen F hin, so wird $\sphericalangle DME$ immer grösser, und sowie er überstumpf wird, so erscheint Punkt C auf der andern Seite von AB und bildet das angeschriebene Dreieck ABC in Figur 58.

Erkl. 131. Man hat nach Nebenstehendem in Figur 57:

Dreieckswinkel:

$$ACB > CBA > BAC,$$

Mittelpunktswinkel und Kreisausschnitte:

$$EMD < DMF < FME,$$

Kreisbogen:

$$ED < DF < FE,$$

Abstandsstrecken vom Mittelpunkt:

$$MC < MB < AM.$$

Die Richtigkeit dieser letzten Zeile, nämlich des vierten Teiles der nebenstehenden Antwort, folgt unmittelbar aus den Aufgaben 133 und 199 des III. Teiles, wonach dasjenige der rechtwinkligen Dreiecke eine grössere Hypotenuse hat, welches gegenüber der gleichgrossen Seite den kleineren Winkel hat und umgekehrt.

Grössen der Mittelpunktswinkel, Kreisbögen, Kreisausschnitte.

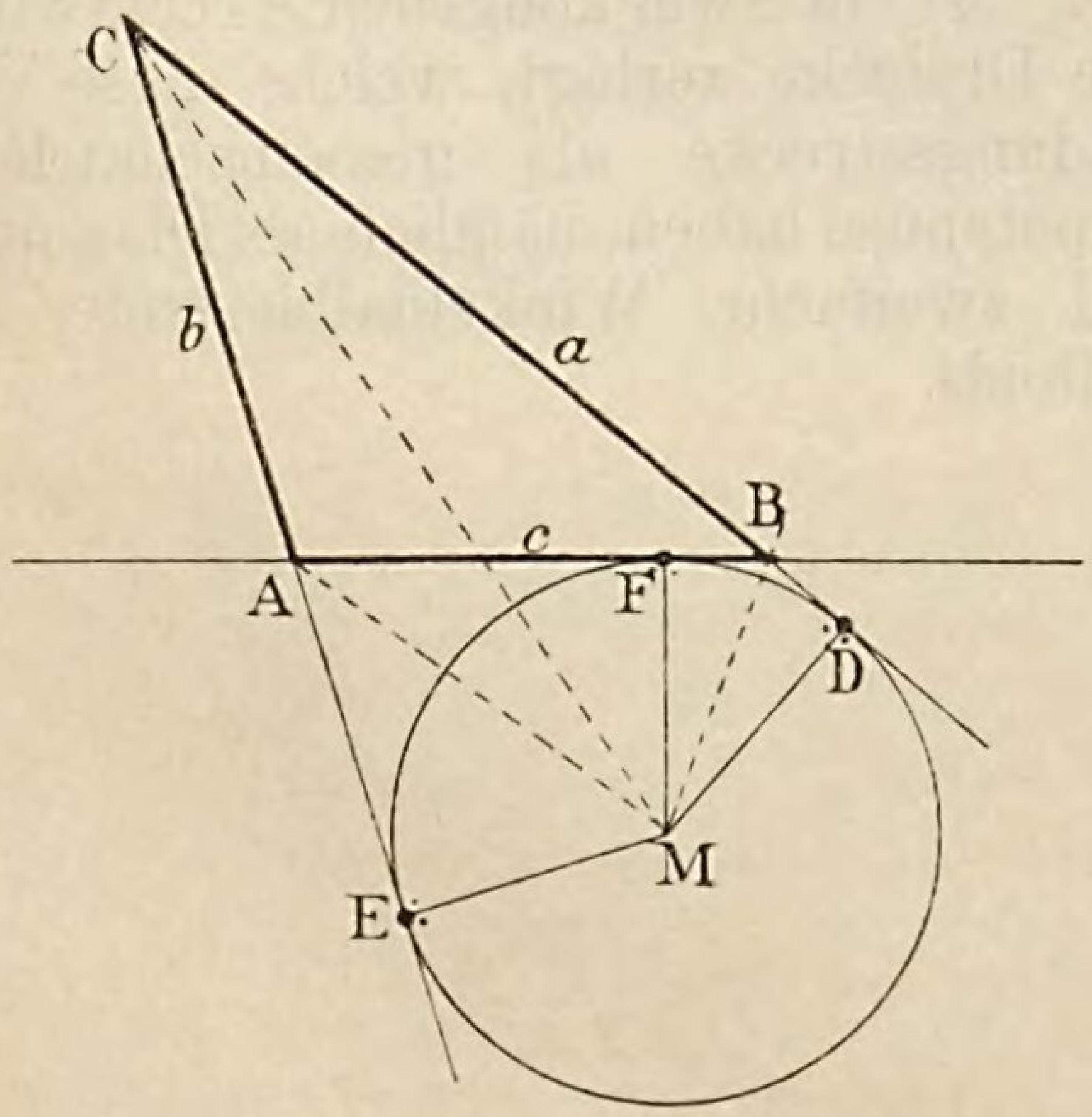
3) Der gestreckte Mittelpunktswinkel wäre die oberste Grenze für einen der Mittelpunktswinkel: dann würde der Tangentenwinkel gleich Null, die Tangenten parallel.

4) Die Grössenfolge der Tangentenwinkel ist die entgegengesetzte, wie die Grössenfolge der Abstandsstrecken ihrer Scheitelpunkte vom Kreismittelpunkte.

5) Durch diese Abstandsstrecken selbst wird das ganze Dreieck zerlegt in drei Dreiecke über je einer Dreiecksseite als Grundseite und mit gemeinschaftlicher Spitze im Kreismittelpunkte, von denen je zwei einen gleichgrossen benachbarten Winkel besitzen gleich einem halben Dreieckswinkel; jedes der Deltoide wird zerlegt in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, welche diese Verbindungsstrecke als gemeinsame Hypotenuse haben, nämlich als Diagonale und zweifache Winkelhalbierende des Deltoids.

Frage 60. Wie gestalten sich die im vorigen für das eingeschriebene Dreieck angestellten Untersuchungen bei ihrer Anwendung auf das angeschriebene Dreieck?

Figur 58.



Antwort. Beim angeschriebenen Dreieck bezw. Kreise (siehe Figur 58) fällt der Kreismittelpunkt und damit auch zwei der drei Radien nach den Eckpunkten ganz ausserhalb des Dreiecks. Der Kreis liegt im Innenwinkelraum eines der Dreieckswinkel, dagegen im Aussenwinkelraum der beiden andern. Es blieben daher die in der Antwort der vorigen Frage aufgestellten Beziehungen nur bestehen für den einen Winkel, in dessen Innenraum der Kreis liegt. Für die beiden andern aber ergeben sich folgende Veränderungen:

1) Durch die Radien nach den Berührungspunkten E, F oder D, F entstehen die beiden Deltoide $AEMF$ und $BFMD$, welche unter sich und mit dem

Erkl. 132. Die Seiten der Deltoide in Figur 58 sind wieder je zwei Radien des Kreises und zwei Tangentenabschnitte. Von letzteren aber sind nur AF und BF eigentliche Teilstrecken einer Seite, die andern sind teils von einer Seite samt einem Verlängerungsstück gebildet, teils von diesem Verlängerungsstücke allein, nämlich:

im Deltoid $AEMF$ die Stücke $AF = AE$,
im Deltoid $BFMD$ die Stücke $BF = BD$,
im Deltoid $CEMD$ die Stücke $CE = CD$.

Die symmetrischen Winkel dieser Deltoide bei E, F und F, D und E, D sind wieder Rechte.

Erkl. 133. Entsprechend der Anschauungsweise in Erkl. 119, sowie in der Erkl. 77 des I. Teiles kann man auch sagen: In Figur 57 wird jede Dreiecksseite durch den Berührungspunkt des Kreises innerlich geteilt, in Figur 58 nur die Seite AB, dagegen AC und BC werden äusserlich geteilt; oder in Figur 57 sind D, E, F innere Teilpunkte der Strecken BC, CA, AB; in Figur 58 aber ist nur F innerer Teilpunkt der Strecke AB, dagegen E und F sind äussere Teilpunkte der Strecken AC und BC. Die auf den Dreiecksseiten gebildeten Abschnitte aber sind in beiden Figuren:

auf AB: FA und FB als innere Teilstrecken in Figur 57 und 58,
auf BC: DB und DC als innere Teilstrecken in Figur 57, als äussere Teilstrecken in Eigur 58,
auf CA: EC und EA als innere Teilstrecken in Figur 57, als äussere Teilstrecken in Figur 58.

In beiden Figuren stossen je zwei aufeinanderfolgende Teilstrecken mit einem Endpunkte zusammen, nämlich in der Reihenfolge AF, FB, BD, DC, CE, EA, sowohl in Figur 57 als Figur 58.

Erkl. 134. Während in Figur 57 die Grundseitenwinkel der Dreiecke AMB, BMC, CMA stets nur $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ waren, trifft dies in Figur 58 nur im Punkte C zu, und die Winkel dieser drei Dreiecke werden:

$$\sphericalangle MAB = \frac{180-\alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2},$$
$$\sphericalangle MBA = \frac{180-\beta}{2} = 90 - \frac{\beta}{2};$$
$$\sphericalangle MBC = \beta + \frac{180-\beta}{2} = 90 + \frac{\beta}{2},$$
$$\sphericalangle MCB = \frac{\gamma}{2};$$
$$\sphericalangle MCA = \frac{\gamma}{2},$$
$$\sphericalangle MAC = \alpha + \frac{180-\alpha}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2}.$$

Deltoid $CEMD$, welches beide vorigen bedeckt, eine gemeinschaftliche Ecke M im Kreismittelpunkte haben.

2) Der Winkel EMD des Deltoids $CEMD$ ist wieder supplementär zum Dreieckswinkel ACB; die Winkel EMF und FMD aber sind supplementär zu den Winkeln EAF bezw. FBD, also zu den Nebenwinkeln der Dreieckswinkel; daher sind sie mit den Dreieckswinkeln selbst gleichgross, nämlich:

$\sphericalangle EMF = \sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle FMD = \sphericalangle ABC$.

3) Wird bei festbleibenden Punkten A und B der Winkel C immer kleiner, so rückt Punkt C immer weiter fort, der Mittelpunktswinkel DMF wird immer grösser, und bei Erreichung seiner obersten Grenze gleich 180^0 erhielte Winkel C die Grösse Null, die Tangenten CA und CB würden parallel: im Uebergang vom angeschriebenen zum eingeschriebenen Kreise.

4) Durch die Abstandsstrecken AM, BM, CM entstehen wieder über jeder der Dreiecksseiten AB, BC, CA als Grundseite Dreiecke mit gemeinschaftlicher Spitze in M, nämlich die Dreiecke MB, MC, MA, von welchen das Dreieck AMB die Gesamtfläche beider andern teilweise überdeckt. Die Grundseiten-Winkel dieser Dreiecke sind wieder die Hälften der Innenwinkel bezw. Aussenwinkel des Dreiecks.

5) Jedes der drei Deltoide wird durch eine dieser Verbindungsstrecken MA, MB, MC in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, welche diese Verbindungsstrecke als gemeinschaftliche Hypotenuse haben, nämlich als Diagonale und zweifache Winkelhalbierende des Deltoids.

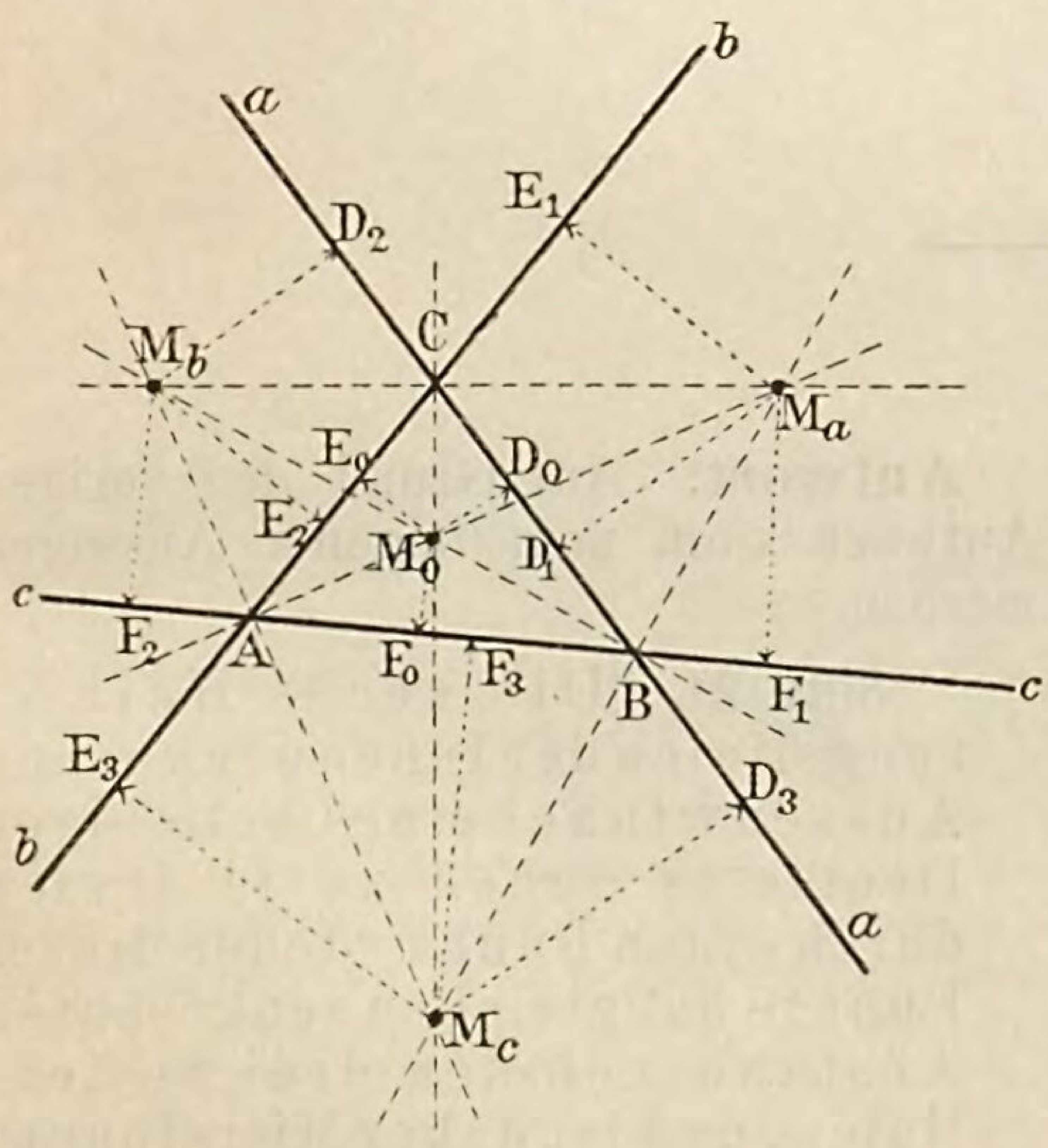
Frage 61. Was folgt aus den Sätzen 13 über die Abstandsstrecken der Eckpunkte des Dreiecks vom Kreismittelpunkt?

Erkl. 135. Die Untersuchungen in den Antworten der Fragen 57 bis 68 sind dualistisch zu jenen der Fragen 46 bis 54, indem gegenübergestellt werden: einem Kreispunkte eine Kreistangente, dem Umkreis der Inkreis bew. Ankreis, den Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten die Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel, den innern bezw. äussern Teilungslinien der Dreieckswinkel die innern bezw. äussern Teilpunkte der Dreiecksseiten, den Kreisradien nach den Eckpunkten die Berührungsradien nach den Dreiecksseiten, den halben Dreiecksseiten die halben Dreieckswinkel u. s. w.

Antwort. Da die Abstandsstrecken MA, MB, MC in Figur 57 und 58 Winkelhalbierende des Winkels bezw. Nebenwinkels zweier Dreiecksseiten sind, so folgt, dass die drei Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines einem Kreise umgeschriebenen Dreiecks — bezw. zweier Aussenwinkel und des dritten Innenwinkels eines einem Kreise angeschriebenen Dreiecks — durch denselben Punkt gehen, nämlich durch den Kreismittelpunkt, welcher selbst gleichen Abstand hat von den drei Seiten des Dreiecks als Kreistangenten.

Frage 62. Welches ist die gegenseitige Lage der Winkelhalbierenden eines beliebigen Dreiseits?

Figur 59.



Erkl. 136. Statt zu den Winkelhalbierenden MA die Winkelhalbierenden MB zuzufügen, hätte man auch die Winkelhalbierenden MC als zweite Gruppe zu MA wählen können, und hätte wieder $MD = ME = MF$ gefunden. Und ebenso, wenn als erstes Gruppenpaar die Winkelhalbierenden MB und MC gewählt worden wären. Immer findet man, dass die Winkelhalbierende an einem dritten Eckpunkte eines beliebigen Dreiseits durch denselben Punkt gehen muss, in welchem sich

Antwort. Da je zwei gegebene Gerade vier Winkel bilden, und je zwei Scheitelwinkel unter diesen eine einzige Gerade als gemeinschaftliche Winkelhalbierende besitzen, so entstehen durch die drei Geraden eines beliebigen Dreiseits im ganzen sechs Winkelhalbierende, und man erhält folgende Schlussreihe:

1) Zieht man in einem beliebigen Dreiseit a, b, c (siehe Figur 59) die beiden Winkelhalbierenden der Geraden b und c, so ist jede derselben Symmetrieachse für die Winkelschenkel b und c; also hat jeder ihrer Punkte denselben senkrechten Abstand von b, wie von c.

2) Zieht man dazu die beiden Winkelhalbierenden der Geraden c und a, so ist jede derselben Symmetrieachse für die Winkelschenkel c und a; also hat jeder ihrer Punkte denselben senkrechten Abstand von c, wie von a.

3) Ein Schnittpunkt M einer Winkelhalbierenden von b und c mit einer Winkelhalbierenden von c und a hat daher erstens als Punkt der ersteren (der Linie MA) gleichen senkrechten Abstand von b und c (nämlich $ME = MF$),

zwei der Winkelhalbierenden an den beiden ersten Eckpunkten schneiden.

Erkl. 137. Die der nebenstehenden Untersuchung zu Grunde liegenden Sätze aus der Lehre von der achsigen Symmetrie finden später noch ausführlichere Erörterung. Sie lauten:

I. Jeder Punkt der Winkelhalbierenden zweier Geraden hat gleichen senkrechten Abstand von beiden.

II. Jeder Punkt mit gleichem senkrechtem Abstand von zwei Geraden liegt auf der Winkelhalbierenden derselben.

(Siehe Frage 60 und Aufgabe 104 im III. Teile und die Abschnitte über geometrische Oerter und merkwürdige Punkte im Dreieck in diesem Teile dieses Lehrbuches).

Erkl. 138. Da jede Gerade einer Ebene jede andere in einem Punkte trifft, so muss jede der beiden Winkelhalbierenden bei A jede der beiden bei B in einem Punkte treffen. Es entstehen also im ganzen vier Schnittpunkte M, durch welche die sechs Winkelhalbierenden gehen. Dieselben werden bezeichnet nach den Eckpunkten des Dreiecks, in deren Innenwinkelraum jeder gelegen ist, also M_a oder M_1, M_b oder M_2, M_c oder M_3 für die äusseren, M ohne Index oder M_0 für den inneren Schnittpunkt. Entsprechend werden dann auch die Berührungspunkte bezeichnet als D_0, D_1, D_2, D_3 auf a; E_0, E_1, E_2, E_3 auf b; F_0, F_1, F_2, F_3 auf c (siehe Figur 59), und die Radien als ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 oder ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c.

zweitens als Punkt der letzteren (der Linie MB) gleichen senkrechten Abstand von c und a (nämlich $MF = MD$).

4) Also hat dieser Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden gleichen senkrechten Abstand von den drei Geraden a, b und c ($ME = MF = MD$); und ein Kreis um M, welcher die Gerade a berührt (mit Radius MD), hat auch die Geraden b und c als Tangenten.

5) Da hiernach für Punkt M auch $MD = ME$ ist, so müssen auch die Berührungsradien von M nach den Geraden a und b mit dem Dreieckswinkel (a, b) ein Deltoid bilden: folglich muss auch die Winkelhalbierende des Gegenwinkels (a, b) durch die Gegenecke M gehen.

Frage 63. Zu welchen Aussagen führt die Antwort der vorigen Frage 62?

Erkl. 139. Die sechs Winkelhalbierenden würden, wenn sie beliebige Gerade wären, ein Sechsseit bilden, also nach Antwort der Frage 6 im III. Teile 15 Schnittpunkte liefern. Da aber viermal statt je dreier Punkte nur ein einziger entsteht, so fallen von diesen 15 Punkten viermal zwei weg: bleiben $15 - 8 = 7$ Schnittpunkte, nämlich die drei Dreieckspunkte und die vier Zentra der Seitenlinien.

Erkl. 140. Der Mittelpunkt des Inkreises wird auch als inneres Zentrum der Seiten bezeichnet, der Inkreis selbst als innerer Berührungskreis; jeder Mittelpunkt eines Ankreises wird als ein äusseres Zentrum der Seiten, der Ankreis selbst als ein äusserer Berührungskreis des Dreiecks bezeichnet.

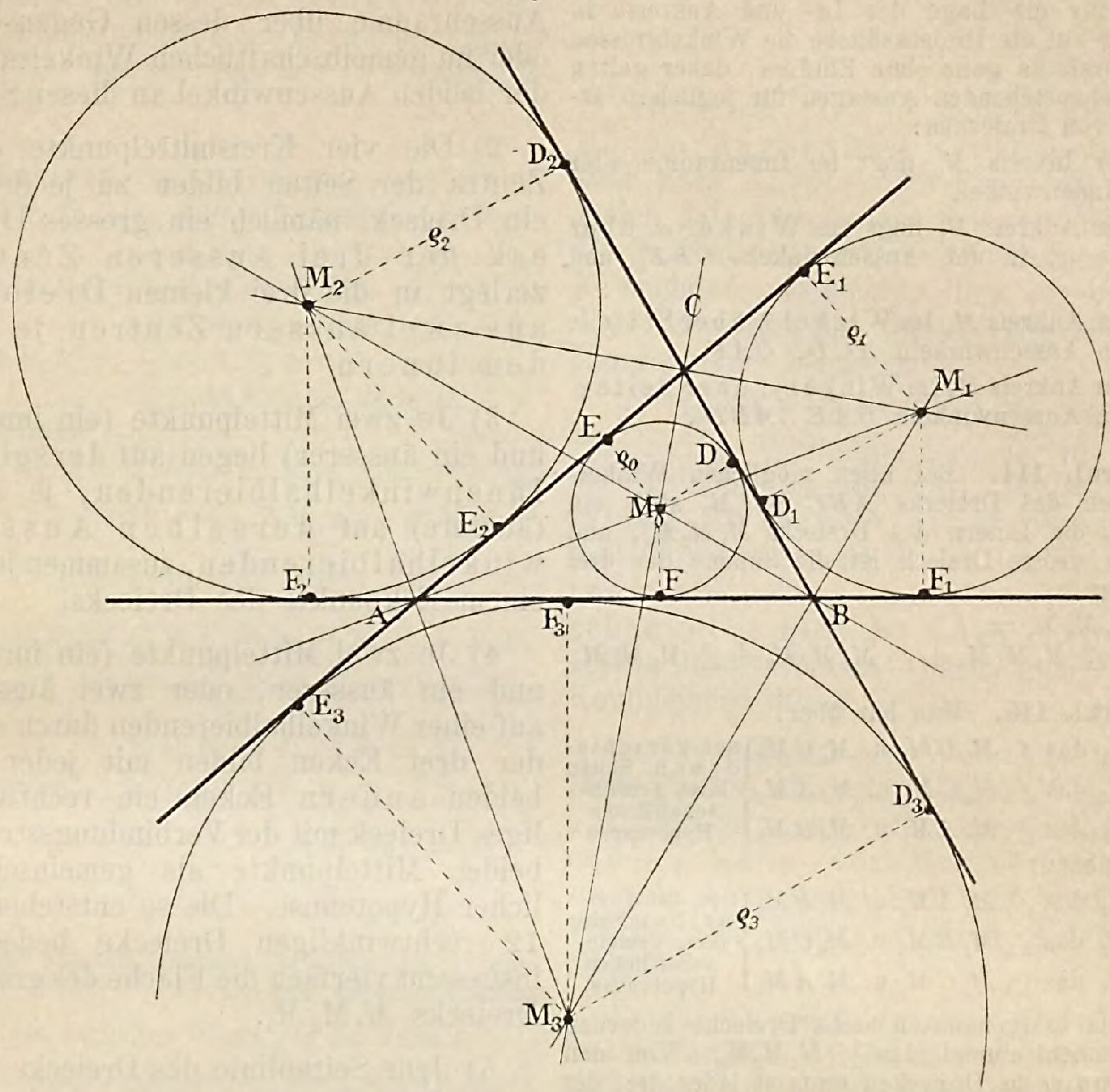
Erkl. 141. Je kleiner das Dreieck wird, desto kleiner werden auch alle vier Kreise, und wenn die drei Geraden durch einen einzigen Punkt gehen, so fallen alle vier Kreise in diesen gemeinschaftlichen Punkt zusammen als Kreise mit Radius Null, denn auch die sechs Winkelhalbierenden schneiden sich alsdann nur in diesem einzigen Punkte.

Antwort. Auf Grund der vorigen Antwort kann man folgende Aussagen machen:

Satz 21. Die sechs Halbierungslinien der Innenwinkel und Aussenwinkel eines beliebigen Dreiseits gehen zu je dreien durch einen Punkt. Jeder dieser Punkte hat gleichen senkrechten Abstand von den drei Seitenlinien, und ist daher Mittelpunkt eines diese drei Geraden berührenden Kreises, also Mittelpunkt eines dem Dreiseit einbezw. angeschriebenen Kreises.

Satz 21a. Jedes beliebige Dreiseit kann angesehen werden als ein einem Kreise um- oder angeschriebenes Dreiseit; oder für jedes beliebige Dreiseit gibt es einen ein-

Figur 60.



Erkl. 142. Entsprechend den Ueberlegungen in Erkl. 136 und 112 braucht man, um die durch drei gegebene Geraden berührten Kreise zu konstruieren, nicht alle drei Schnittwinkel dieser drei Geraden zu untersuchen, und alle sechs Winkelhalbierenden zu zeichnen, sondern zwei beliebige Innenwinkelhalbierende liefern schon den Mittelpunkt des Inkreises, zwei beliebige Aussenwinkelhalbierende, oder eine Aussenwinkelhalbierende mit einer Innenwinkelhalbierenden an einer andern Ecke liefern den Mittelpunkt eines Ankreises. Es wird also von praktischen Rücksichten abhängen, welche zwei man aus den für jedes Zentrum möglichen Winkelhalbierenden auswählen will.

geschriebenen und drei angegeschriebene Kreise.

Oder:

Satz 21b. Durch drei gegebene Tangenten sind vier verschiedene Kreise bestimmt — oder ein Kreis ist durch drei gegebene Berührungslinien vierdeutig bestimmt.

Frage 64. Welchen Einfluss haben die Winkelgrössen des Dreiecks ABC auf die Lagen der Mittelpunkte und Berührungspunkte der innern und äussern Berührungskreise?

Antwort. 1) Bei Dreiecken mit verschiedensten Winkelgrössen liegt immer der Mittelpunkt des Inkreises im Innern des Dreiecks; der Mittelpunkt je eines Ankreises im Innenwinkel-

Erkl. 143. Nach nebenstehender Antwort sind für die Lage der In- und Ankreise in Bezug auf die Dreiecksfläche die Winkelgrössen des Dreiecks ganz ohne Einfluss, daher gelten die nebenstehenden Aussagen für jegliche Gattung von Dreiecken:

der Inkreis M_0 liegt im Innenraume aller drei Innenwinkel,

der Ankreis M_1 liegt im Winkel α, über Seite a, in den Aussenwinkeln CBF_1 und BCE_1,

der Ankreis M_2 im Winkel β, über Seite b, in den Aussenwinkeln ACD_2, CAF_2,

der Ankreis M_3 im Winkel γ, über Seite c, in den Aussenwinkeln BAE_3, ABD_3.

Erkl. 144. Bei allen möglichen Winkelgrössen des Dreiecks ABC ist M_0 stets ein Punkt im Innern des Dreiecks $M_1M_2M_3$, und dieses grosse Dreieck ist die Summe der drei kleinen:

$$\triangle M_1M_2M_3 = \triangle M_1M_0M_2 + \triangle M_2M_0M_3 + \triangle M_3M_0M_1.$$

Erkl. 145. Man hat über:

M_0M_1 das $\triangle M_0BM_1$ u. M_0CM_1
M_0M_2 das $\triangle M_0CM_2$ u. M_0AM_2
M_0M_3 das $\triangle M_0AM_3$ u. M_0BM_3
} auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinschaftlichen Hypotenuse

und über:

M_1M_2 das $\triangle M_1AM_2$ u. M_1BM_2
M_2M_3 das $\triangle M_2BM_3$ u. M_2CM_3
M_3M_1 das $\triangle M_3CM_1$ u. M_3AM_1
} je auf derselben Seite ihrer gemeinschaftlichen Hypotenuse.

Die erstgenannten sechs Dreiecke bedecken zusammen einmal das $\triangle M_1M_2M_3$. Von den letztern sechs Dreiecken umfasst jedes drei der ersten sechs Dreiecke, so dass in ihrer Summe jedes jener Dreiecke dreimal vorkommt, dass also die dreifache Fläche $M_1M_2M_3$ erhalten wird.

Erkl. 146. Dass D_0 näher bei C als bei B liegt, folgt aus dem Vergleich der rechtwinkligen Dreiecke M_0D_0C und M_0D_0B. Beide haben M_0D_0 als Kathete, also hat dasjenige die grössere zweite Kathete, in welchem der ersteren der kleinere Winkel gegenüberliegt. Ist aber $\gamma > \beta$, so ist auch:

$$\sphericalangle M_0CB = \frac{\gamma}{2} > \frac{\beta}{2} = M_0BC,$$

folglich $CD_0 < BD_0$.

Dass dann auch umgekehrt $BD_1 < CD_1$ sein muss, folgt entweder aus der gleichen Ueberlegung für die Dreiecke CD_1M_1 und BD_1M_1, oder aus den Wechselwinkeln $D_0M_0M_1$ und $D_1M_1M_0$.

raum des einen Dreieckswinkels, im Aussenraume über dessen Gegenseite, oder im gemeinschaftlichen Winkelraume der beiden Aussenwinkel an dieser Seite.

2) Die vier Kreismittelpunkte oder Zentra der Seiten bilden zu je dreien ein Dreieck, nämlich ein grosses Dreieck der drei äusseren Zentra, zerlegt in die drei kleinen Dreiecke aus zwei äussern Zentren je mit dem innern.

3) Je zwei Mittelpunkte (ein innerer und ein äusserer) liegen auf derselben Innenwinkelhalbierenden, je zwei (äussere) auf derselben Aussenwinkelhalbierenden, zusammen je mit einem Eckpunkte des Dreiecks.

4) Je zwei Mittelpunkte (ein innerer und ein äusserer, oder zwei äussere) auf einer Winkelhalbierenden durch eine der drei Ecken bilden mit jeder der beiden andern Ecken ein rechtwinkliges Dreieck mit der Verbindungsstrecke beider Mittelpunkte als gemeinschaftlicher Hypotenuse. Die so entstehenden 12 rechtwinkligen Dreiecke bedecken insgesamt vierfach die Fläche des grossen Dreiecks $M_1M_2M_3$.

5) Jede Seitenlinie des Dreiecks wird von vier Kreisen berührt; und zwar vom Inkreis und dem ausserhalb der Seite selbst liegenden Ankreis innerhalb ihrer eigentlichen Seitenstrecke, aber auf entgegengesetzten Seiten; von den beiden andern Ankreisen auf der Verlängerung der Seitenstrecke und von beiden auf derselben Seite, wie auch vom Inkreis.

6) Wenn das Dreieck nicht gleichschenklig ist über der betrachteten Seite als Grundseite, so liegen die beiden innern Berührungspunkte zu verschiedenen Seiten sowohl des Mittelpunktes der Seite, als auch ihres Schnittpunktes mit der Winkelhalbierenden, und zwar der des Inkreises näher, der des Ankreises ferner der Ecke des grösseren der beiden dieser Seite anliegenden Winkel.

Frage 65. Welche Winkelgrössen entstehen zwischen den Berührungsradien der vier Kreise und den Winkelhalbierenden?

Antwort. 1) Die Winkel zweier Berührungsradien der Kreise selbst sind nach Antwort der Frage 30 stets gleich dem Supplement des zugehörigen Dreieckswinkels oder gleich diesem selbst, je nachdem sie sich in dem Innenraum oder Aussenraum dieses zugehörigen Innenwinkels befinden.

2) Da jeder dieser Winkel durch eine zugehörige Winkelhalbierende in zwei gleiche Teile geteilt wird, so ist jeder Winkel zwischen einer Winkelhalbierenden und einem Berührungsradius zu einem ihrer Winkelschenkel je nach der Lage gleich der Hälfte dieses Winkels, bezw. gleich dem Komplement dieser Hälfte.

3) Die übrigen drei Winkel an jedem Mittelpunkte zwischen einer Winkelhalbierenden und dem Berührungsradius nach der dritten Seite sind als Summe oder Differenz je zweier Winkel der beiden vorigen Arten zu bilden.

4) Die Winkel zweier Winkelhalbierenden selbst lassen sich ebenfalls aus den vorigen Winkeln ableiten, oder direkt als Winkel an der Spitze der in Antwort der Frage 59 betrachteten Dreiecke über den Dreiecksseiten, oder als Winkel der rechtwinkligen Dreiecke in Antwort 4 der Frage 64. Am bemerkenswertesten sind darunter die Winkel der aus drei Kreismittelpunkten gebildeten Dreiecke MMM. Man erhält nämlich im Dreieck $M_1M_2M_3$:

$$\sphericalangle M_1 = 90^0 - \frac{\alpha}{2},\ \sphericalangle M_2 = 90^0 - \frac{\beta}{2},$$
$$\sphericalangle M_3 = 90^0 - \frac{\gamma}{2};$$

jeden selbst zusammengesetzt aus zweien der drei Stücke von der Grösse $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.

Und die einzelnen Winkel am Punkte M_0 sind je Komplementwinkel dieser letztern Winkelgrössen.

Erkl. 147. Man hat in Figur 60:

$$\sphericalangle E_0M_0F_0 = \sphericalangle E_1M_1F_1 = 180 - \alpha,$$
$$\sphericalangle E_2M_2F_2 = \sphericalangle E_3M_3F_3 = \alpha;$$
$$\sphericalangle F_0M_0D_0 = \sphericalangle F_2M_2D_2 = 180 - \beta,$$
$$\sphericalangle F_3M_3D_3 = \sphericalangle F_1M_1D_1 = \beta;$$
$$\sphericalangle D_0M_0E_0 = \sphericalangle D_3M_3E_3 = 180 - \gamma,$$
$$\sphericalangle D_1M_1E_1 = \sphericalangle D_2M_2E_2 = \gamma.$$

Ferner:

$$\sphericalangle E_0M_0A_0 = F_0M_0A_0 = E_1M_1A_1 = F_1M_1A_1$$
$$= 90 - \frac{\alpha}{2},\ E_2M_2A_2 = F_2M_2A_2$$
$$= E_3M_3A_3 = F_3M_3A_3 = \frac{\alpha}{2};$$
$$\sphericalangle F_0M_0B_0 = D_0M_0B_0 = F_2M_2B_2 = D_2M_2B_2$$
$$= 90 - \frac{\beta}{2},\ F_3M_3B_3 = D_3M_3B_3$$
$$= F_1M_1B_1 = D_1M_1B_1 = \frac{\beta}{2};$$
$$\sphericalangle D_0M_0C_0 = E_0M_0C_0 = D_3M_3C_3 = E_3M_3C_3$$
$$= 90 - \frac{\gamma}{2},\ D_1M_1C_1 = E_1M_1C_1$$
$$= D_2M_2C_2 = E_2M_2C_2 = \frac{\gamma}{2}.$$

Zur dritten Gruppe gehören die Winkel AMD, BME, CMF mit den viererlei Indices. Dieselben enthalten Werte von der Form $\alpha + \frac{\beta}{2}$ oder ähnlicher Gestalt und deren Komplemente.

Erkl. 148. Es ist:

$$\sphericalangle BM_1C = BM_1D_1 = CM_1D_1 = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$$
$$= 90 - \frac{\alpha}{2},$$

folglich als Komplementwinkel im Dreieck M_1CM_3 auch $\sphericalangle M_1M_3C = \frac{\alpha}{2}$. Aehnlich findet man insgesamt:

$$\sphericalangle CM_0M_2 = BM_0M_3 = CM_1B = 90 - \frac{\alpha}{2}$$
$$= \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2},\ \sphericalangle BM_2C = BM_3C = \frac{\alpha}{2};$$
$$\sphericalangle AM_0M_3 = CM_0M_1 = AM_2C = 90 - \frac{\beta}{2}$$
$$= \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2},\ \sphericalangle CM_3A = CM_1A = \frac{\beta}{2};$$
$$\sphericalangle BM_0M_1 = AM_0M_2 = BM_3A = 90 - \frac{\gamma}{2}$$
$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2},\ \sphericalangle AM_1B = AM_2B = \frac{\gamma}{2}.$$

Und endlich:

$$BM_0C = M_2M_0M_3 = 90 + \frac{\alpha}{2},$$

$$CM_0A = M_3M_0M_1 = 90 + \frac{\beta}{2},$$

$$AM_0B = M_1M_0M_2 = 90 + \frac{\gamma}{2}.$$

Frage 66. Welche Streckengrössen entstehen zwischen den Berührungspunkten der vier Kreise mit den Dreieckspunkten?

Antwort. Da an jeden der vier Kreise von jedem der drei Eckpunkte aus zwei Tangenten gehen, so hat man nach Satz 14 von jeder Ecke aus vier Paare gleichlanger Tangentenabschnitte.

1) Bezeichnet man unter diesen mit t_1, t_2, t_3 die dreierlei Tangentenabschnitte von den Dreieckspunkten A, B, C an den Inkreis, so findet man:

$$\text{a)} \ldots \begin{cases} BC = BD_0 + CD_0 \text{ oder } a = t_2 + t_3, \\ CA = CE_0 + AE_0 \text{ oder } b = t_3 + t_1, \\ AB = AF_0 + BF_0 \text{ oder } c = t_1 + t_2. \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen findet man:

$$a + b + c = 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 = 2(t_1 + t_2 + t_3);$$

oder indem der Dreiecksumfang:

$$a + b + c = u,$$

und $\frac{u}{2}$ gleich s gesetzt wird:

$$\text{b)} \ldots t_1 + t_2 + t_3 = \frac{a+b+c}{2} = \frac{u}{2} = s.$$

Also rückwärts durch Einsetzung in die obigen drei Gleichungen:

$$\text{c)} \ldots \begin{cases} t_1 = s - a = \frac{-a+b+c}{2}, \\ t_2 = s - b = \frac{a-b+c}{2}, \\ t_3 = s - c = \frac{a+b-c}{2}. \end{cases}$$

2) Bezeichnet man mit t_1', t_2', t_3' die dreierlei Tangentenabschnitte von den Dreieckspunkten A, B, C an den Ankreis um M_1, so findet man ebenso, weil D_1 innerhalb a liegt, und weil E_1 und F_1 auf den Verlängerungen von b und c liegen:

$$\text{d}') \ldots \begin{cases} BC = BD_1 + CD_1 \text{ oder } a = t_2' + t_3', \\ CA = AE_1 - CE_1 \text{ oder } b = t_1' - t_3', \\ AB = AF_1 - BF_1 \text{ oder } c = t_1' - t_2'. \end{cases}$$

Erkl. 149. Die 12 Paare gleicher Tangentenabschnitte von den Eckpunkten an die vier Kreise sind:

$AE_0 = AF_0$, $AE_1 = AF_1$,
$AE_2 = AF_2$, $AE_3 = AF_3$;
$BF_0 = BD_0$, $BF_2 = BD_2$,
$BF_3 = BD_3$, $BF_1 = BD_1$;
$CD_0 = CE_0$, $CD_3 = CE_3$,
$CD_1 = CE_1$, $CD_2 = CE_2$.

Es sind also die viererlei Abschnitte von einer Ecke aus, z. B. AE_0, AE_1, AE_2, AE_3 auf der einen Dreiecksseite immer auch wieder vorhanden auf der anstossenden Seite dieser Ecke.

Erkl. 150. Die Ableitung der Gl. c) aus den Gl. a) kann geschehen in Gl. b), indem man je zwei Posten t auf die rechte Seite bringt und für deren Summe aus Gl. a) den Wert einsetzt und dann gleichnamig macht, also:

$$t_1 = s - (t_2 + t_3) = s - a = \frac{a+b+c}{2} - a$$
$$= \frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{a+b+c-2a}{2}$$
$$= \frac{-a+b+c}{2},$$

$$t_2 = s - (t_3 + t_1) = s - b = \frac{a+b+c}{2} - b$$
$$= \frac{a+b+c}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a+b+c-2b}{2}$$
$$= \frac{a-b+c}{2},$$

$$t_3 = s - (t_1 + t_2) = s - c = \frac{a+b+c}{2} - c$$
$$= \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2}$$
$$= \frac{a+b-c}{2}.$$

Zum gleichen Ziele gelangt man, wenn man von Gl. b) der Reihe nach jede der Gl. a) abzieht.

Die Gl. f') gehen aus Gl. e') hervor, indem man in deren zweiter und dritter Zeile für t_1' den Wert s einsetzt, und b bezw. c auf die

rechte, t_3' bezw. t_2' auf die linke Seite der Gleichung bringt.

Man kann dann die Gl. a), b) und d) durch Einsetzung der Werte aus den übrigen Gleichungen c), e), f) bestätigen und erhält z. B. in der ersten Gleichung a):

$$t_2 + t_3 = s - b - s + c = 2s - b - c$$
$$= a + b + c - b - c = a,$$

oder:

$$t_2 + t_3 = \frac{a-b+c}{2} + \frac{a+b-c}{2}$$
$$= \frac{a-b+c+a+b-c}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Und in Gl. b):

$$t_1 + t_2 + t_3 = s - a + s - b + s - c$$
$$= 3s - (a+b+c) = 3s - 2s = s,$$
$$\text{oder} = \frac{-a+b+c}{2} + \frac{a-b+c}{2}$$
$$+ \frac{a+b-c}{2}$$
$$= \frac{-a+b+c+a-b+c+a+b-c}{2}$$
$$= \frac{a+b+c}{2} = s.$$

Und in Gl. d):

$$t_2' + t_3' = s - c + s - b = 2s - (b+c) = a,$$
$$t_1' - t_3' = \frac{a+b+c}{2} - \frac{a-b+c}{2}$$
$$= \frac{a+b+c-a+b-c}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

Erkl. 151. Für die Abschnitte t'' und t''' erhält man Gl. d'') und d''') ähnlich den nebenstehenden Gl. d'):

$$b = t_3'' + t_1'', \quad \text{und} \quad c = t_1''' + t_2''',$$
$$c = t_2'' - t_1'' \qquad a = t_3''' - t_2''',$$
$$a = t_2'' - t_3'' \qquad b = t_3''' - t_1'''.$$

Also durch Addition jeweils eine Gleichung e'') und e'''):

$$a + b + c = 2t_2'' = 2t_3'''$$

oder:

$$t_2'' = t_3''' = \frac{a+b+c}{2} = s;$$

Und durch Einsetzung entstehen die Gleichungspaare f'') und f'''):

$$t_1'' = s - c,\ t_1''' = s - b,\ t_3'' = t_2''' = s - a.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen findet man:

$$a + b + c = 2t_1',$$

also:

$$\text{e}')\ \ldots\ t_1' = \frac{a+b+c}{2} = s.$$

Also rückwärts durch Einsetzung in die zweite und dritte der Gleichungen d):

$$\text{f}')\ \ldots \begin{cases} t_3' = s - b = \frac{a-b+c}{2} = t_2, \\ t_2' = s - c = \frac{a+b-c}{2} = t_3. \end{cases}$$

3) Auf dieselbe Weise erhält man für die Tangentenabschnitte t_1'', t_2'', t_3'' und t_1''', t_2''', t_3''' an die Ankreise von M_2 und M_3 von den Eckpunkten A, B, C Beziehungen, welche sich mit den vorigen folgendermassen gruppieren:

$$\text{e})\ t_1 + t_2 + t_3 = t_1' = t_2'' = t_3''' = \quad s \quad = \frac{a+b+c}{2};$$

$$\text{f})\ \ldots \begin{cases} t_1 = \ \cdot\ = t_3'' = t_2''' = s - a = \frac{-a+b+c}{2}, \\ t_2 = t_3' = \ \cdot\ = t_1''' = s - b = \frac{a-b+c}{2}, \\ t_3 = t_2' = t_1'' = \ \cdot\ = s - c = \frac{a+b-c}{2}. \end{cases}$$

Frage 67. Welche Streckengrössen entstehen zwischen den Berührungspunkten auf den Dreiecksseiten unter sich?

Erkl. 152. Nach den Gleichungen f) der vorigen Antwort 66 ist für die folgenden Behandlungen der Figur 60 die Beibehaltung oberer Indices bei dem Buchstaben t entbehrlich, da ja jeder der Abschnitte t mit einem obern Index (also für einen der Ankreise) gleich ist einem der Abschnitte t ohne deren Index (also für den Inkreis), oder gleich s.

Antwort. Die Strecken zwischen je zweien der vier Berührungspunkte, welche auf jeder Dreiecksseite entstehen, sind zusammenzusetzen als Summen und Differenzen der in voriger Antwort untersuchten Abschnitte t.

1) Die Abstände der beiden innern Berührungspunkte auf einer Seite

Es liessen sich daher auch die nebenstehenden Untersuchungen in der Weise durchführen, dass man etwa in dem Ansatze für $D_0 D_1$ statt BD_1 sofort den gleichgrossen Abschnitt CD_0 setzte, also erhielte:

$$D_0 D_1 = t_2 - t_3 = c - b.$$

Erkl. 153. Fasst man die Gleichheiten von Abschnitten, welche sich aus dieser und der vorigen Antwort ergeben, übersichtlich zusammen, so erhält man:

$$t_1 = AE_0 = AF_0 = BF_3 = BD_3 = CE_2 = CD_2,$$
$$t_2 = BF_0 = BD_0 = CD_1 = CE_1 = AF_3 = AE_3,$$
$$t_3 = CD_0 = CE_0 = AE_2 = AF_2 = BD_1 = BF_1,$$
$$t_1 + t_2 + t_3 = AF_1 = AE_1 = BD_2 = BF_2 = CE_3 = CD_3;$$

also nur viererlei Grössenwerte unter den 24 Abschnitten in Erkl. 149. Und ferner:

$$a = t_2 + t_3 = BC = E_0 E_1 = E_2 E_3 = F_0 F_1 = F_2 F_3,$$
$$b = t_3 + t_1 = CA = F_0 F_2 = F_3 F_1 = D_0 D_2 = D_3 D_1,$$
$$c = t_1 + t_2 = AB = D_0 D_3 = D_1 D_2 = E_0 E_3 = E_1 E_2,$$

also nur dreierlei Grössenwerte unter den 12 Abschnitten in Antwort 67, 2.

Jeder der drei Tangentenabschnitte tritt also an jeder Ecke je zweimal auf: die inneren Abschnitte an der einen Ecke werden äussere an den beiden andern Ecken.

Auch jede Seitenstrecke des Dreiecks tritt auf jeder der beiden andern Seitenlinien je zweimal auf, je die kürzere durch die Strecke der innern Berührungspunkte getrennt, die längere dieses Stück doppelt bedeckend.

sind die Differenz je eines äussern und innern Abschnittes t, nämlich:

$$D_0 D_1 = BD_0 - BD_1 = t_2 - t_2' = s - b - (s - c) = c - b,$$
$$E_0 E_2 = AE_0 - AE_2 = t_1 - t_1'' = s - a - (s - c) = c - a,$$
$$F_0 F_3 = AF_0 - AF_3 = t_3 - t_1''' = s - c - (s - b) = b - c.$$

2) Die Abstände zwischen je einem innern und einem äussern Berührungspunkte auf derselben Dreiecksseite sind auf jeder Seite zu vieren vorhanden, nämlich von jedem der beiden innern zu jedem der beiden äussern. Man erhält auf a:

$$D_0 D_2 = D_0 C + CD_2 = t_3 + t_3'' = s - c + s - a = 2s - a - c = b,$$
$$D_1 D_2 = D_1 C + CD_2 = t_3' + t_3'' = s - b + s - a = 2s - b - a = c,$$
$$D_0 D_3 = D_0 B + BD_3 = t_2 + t_2''' = s - b + s - a = 2s - b - a = c,$$
$$D_1 D_3 = D_1 B + BD_3 = t_2' + t_2''' = s - c + s - a = 2s - c - a = b.$$

Ebenso erhält man auf den Seiten b und c:

$$E_0 E_3 = t_1 + t_1''' = c,$$
$$E_2 E_3 = t_1'' + t_1''' = a,$$
$$E_0 E_1 = t_3 + t_3' = a,$$
$$E_2 E_1 = t_3'' + t_3' = c,$$

und

$$F_0 F_1 = t_2 + t_2' = a,$$
$$F_3 F_1 = t_2''' + t_2' = b,$$
$$F_0 F_2 = t_1 + t_1'' = b,$$
$$F_3 F_2 = t_1''' + t_1'' = a.$$

3) Endlich erhält man für die Abstände je zweier äusseren Berührungspunkte auf derselben Seite die Summe einer Seite mit zwei äusseren Abschnitten, nämlich:

$$D_3 D_2 = a + t_2''' + t_3'' = a + 2(s - a) = 2s - a = b + c,$$
$$E_1 E_3 = b + t_3' + t_1''' = b + 2(s - b) = 2s - b = c + a,$$
$$F_2 F_1 = c + t_1'' + t_2' = c + 2(s - c) = 2s - c = a + b.$$

Frage 68. Wie lassen sich die Ergebnisse der drei vorigen Antworten zusammenfassen?

Antwort. Auf Grund der vorigen Antworten 65, 66 und 67 kann man folgende Aussagen machen:

Satz 22. Verbindet man die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der vier Berührungskreise, so ist der Winkel zweier

Erkl. 154. Für nebenstehenden Satz 22 sind zwei Zentralen als benachbarte anzusehen, wenn die dritte Zentrale, d. h. die Zentrale nach dem dritten Dreieckspunkte nicht durch ihren Winkel geht. Der dritte Dreieckswinkel ist aber der Winkel an derjenigen Ecke, deren Zentrale nicht Winkelschenkel ist.

Erkl. 155. Der nebenstehende Satz 23c ist eine dualistische Uebertragung des Satzes 20b über den umgeschriebenen Kreis des Dreiecks. Es stehen sich gegenüber:

in Satz 20:	in Satz 23:
Teilwinkel eines Dreieckswinkels zwischen Seite und Radius des Umkreises, gleich der Ergänzung des Winkels an der andern Seite zu 90^0, nämlich zur Hälfte der Winkelsumme von $180^0 = 2R$.	Teilstrecke einer Dreiecksseite zwischen Ecke u. Berührungspunkt des Inkreises, gleich der Ergänzung der Seitenstrecke an der andern Ecke zu s, nämlich zur Hälfte der Seitensumme $a + b + c = u = 2s$.

Der Umkreis des Dreiecks entspricht dem Inkreis des Dreiseits. Für die Ankreise lassen sich teilweise (aber nicht durchweg) Analogien aufstellen.

Erkl. 156. Dass in nebenstehenden Sätzen alle in den vorigen Antworten gefundenen Beziehungen wirklich enthalten sind, zeigt eine Anwendung derselben auf eine einzelne der Strecken. So ist nach Satz 23 etwa für Punkt A:

$$AF_0 = AE_0 = (a) BF_3 = CE_2 = (b) BD_3$$
$$= CD_2 = (c) s - a.$$

Also findet man auch umgekehrt für eine der übrigen vier Strecken nach demselben Satze ihre Werte. Ferner nach den Sätzen 24:

$$AF_1 = AE_1 = BD_2 = BF_2 \cdots = s,$$
$$F_0 F_3 = b - a, \quad F_1 F_2 = b + a,$$
und $$F_2 F_3 = F_0 F_1 = a, \quad F_2 F_0 = F_3 F_1 = b.$$

Erkl. 157. Es liessen sich noch weitere, minder wesentliche Angaben finden als Einzelfälle der nebenstehenden allgemeinen, z. B. über die Lage der Berührungspunkte gegen die Ecken: Der Berührungspunkt des Inkreises auf einer Seite liegt immer auf der dem grösseren Dreieckswinkel anliegenden Seitenhälfte, der des Ankreises auf der dem grösseren Aussenwinkel, also dem kleineren Dreieckswinkel anliegenden Seitenhälfte.

benachbarten Zentralen bei einem Ankreise gleich der Hälfte des dritten Dreieckswinkels, beim Inkreise gleich dem Komplemente dieses halben Winkels.

Satz 23. Konstruiert man die Berührungspunkte der In- und Ankreise eines Dreiecks, so sind die Teilstrecken zwischen einem Eckpunkte und den Berührungspunkten seiner Dreiecksseiten mit dem Inkreise

a) gleich der inneren Teilstrecke derselben beiden Seiten zwischen dem Berührungspunkte des Ankreises über diesen Seiten und dem andern Eckpunkte,

b) gleich den beiden äusseren Teilstrecken auf der dritten Seite zwischen dem Eckpunkte und dem Berührungspunkte des Ankreises in seinem Aussenwinkel, nämlich jede

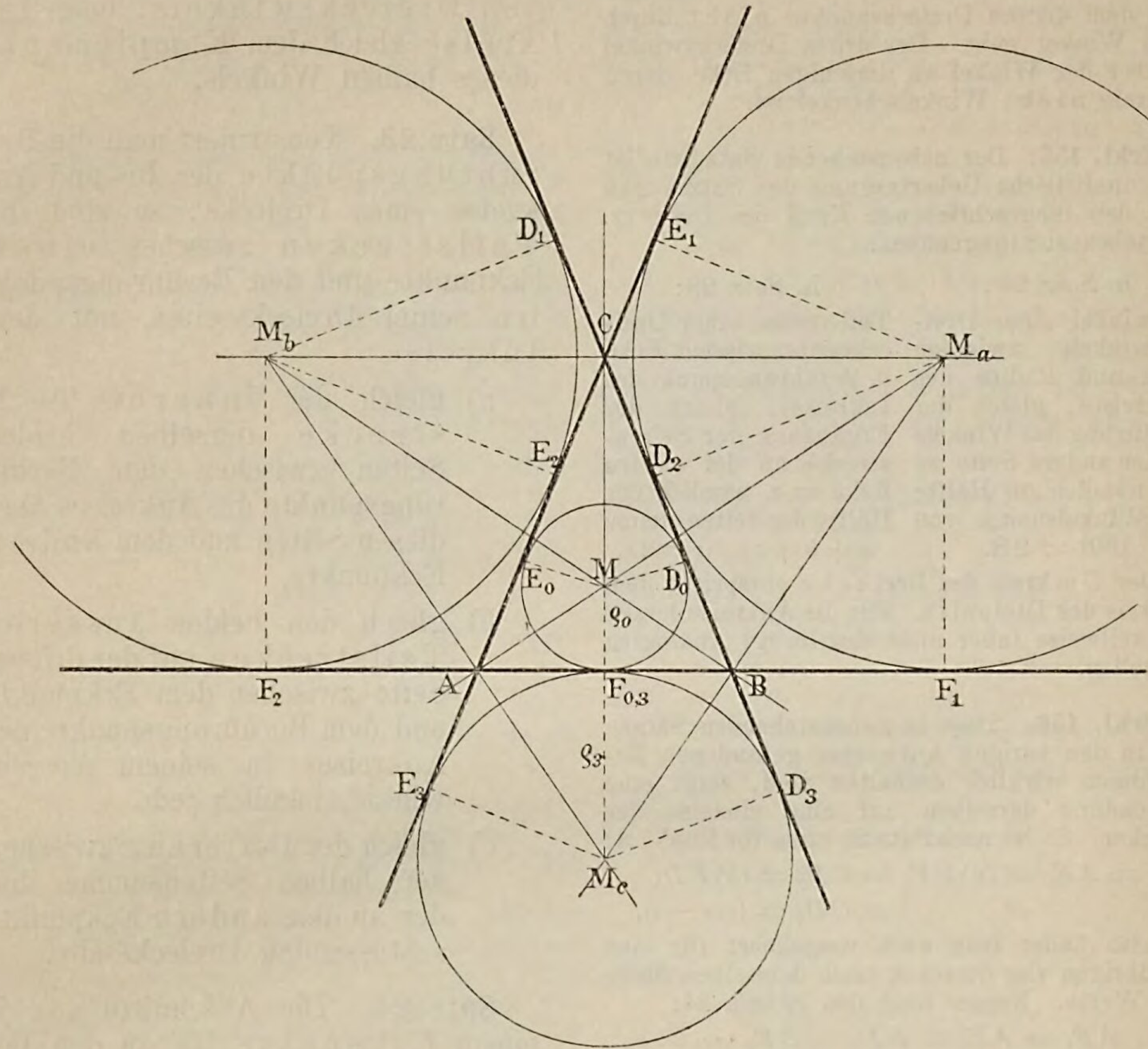
c) gleich der Differenz zwischen der halben Seitensumme und der an dem andern Eckpunkte anstossenden Dreiecksseite.

Satz 24. Die Abschnitte von je einem Eckpunkte bis zu den Berührungspunkten des in seinem Innenwinkelraume liegenden Ankreises sind sämtlich gleich der halben Seitensumme.

Satz 24a. Die Abstände der zwei inneren, bezw. der zwei äusseren Berührungspunkte auf einer Dreiecksseite sind je gleich der Differenz, bezw. gleich der Summe der beiden andern Seiten.

Satz 24b. Von den Abständen zwischen je einem innern und einem äussern Berührungspunkte auf derselben Dreiecksseite sind die beiden kleinern gleich der einen, die beiden grössern gleich der andern anstossenden Dreiecksseite.

Figur 61.



Frage 69. Wie bestätigen sich die Sätze 22 bis 24 bei In- und Ankreisen der „besondern Dreiecke", und zwar zunächst beim gleichschenkligen Dreieck?

Antwort. 1) Beim gleichschenkligen Dreieck (siehe Figur 61) liegt der Mittelpunkt des Inkreises und des Ankreises über der Grundseite auf der Symmetrieachse, also auf der Mittelsenkrechten der Grundseite oder der Höhe des Dreiecks. Der Radius $M_0 F_0$ sowie $M_3 F_3$ fällt mit der Symmetrieachse zusammen, F_0 fällt mit F_3 in den Mittelpunkt der Grundseite und Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, ϱ_0 sowie ϱ_3 bilden ein Stück der Höhe.

2) Die beiden andern Ankreise werden symmetrisch, die Verbindungslinie

Erkl. 158. Es sind beim gleichschenkligen Dreieck vier Punkte, welche in den Mittelpunkt der Grundseite zusammenfallen. Denn beim allgemeinen Dreieck liegen getrennt: 1) F_0, 2) F_3 und zwischen beiden 3) der Mittelpunkt der Grundseite und 4) der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Und zwar rückt F_0 bei Veränderung eines der gleichen Grundseitenwinkel zugleich mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden aus der Mitte weg gegen den grössern Winkel hin, F_3 gegen den kleinern. Statt der viererlei Grössen der sämtlichen Abschnitte in Erkl. 149 erscheinen beim gleichschenkligen Dreieck nur noch dreierlei; und von diesen ist eine gleich der Hälfte der Grundseite.

Erkl. 159. Da die Kreise um M_1 und M_3 von der Seite c im gleichen Berührungspunkte berührt werden, so müssen die Tangentenabschnitte an dem Inkreis und Ankreis von A auf b und die von B auf a beidemale gleich sein dem beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangentenabschnitt dieser Punkte. Da dann ausserdem auch noch der Berührungspunkt im Mittelpunkte von AB liegt, so sind die sechs von A und B ausgehenden Strecken alle gleich, ihre Endpunkte müssen je auf einem Kreise um A und B liegen mit Radius $\frac{c}{2}$. Umgekehrt kann man also beim gleichschenkligen Dreieck die Berührungspunkte der In- und Ankreise finden, wenn man um die Dreieckspunkte Kreise beschreibt mit Radius $\frac{c}{2}$.

Es liegen daher auf einem Kreise um A die Punkte E_0, $F_{0,3}$, E_3; auf einem Kreise um B die Punkte D_0, $F_{0,3}$, D_3; und auf einem Kreise um C die Punkte D_1, E_2, D_2, E_1. Und zwar sind diese drei Kreise alle kongruent und haben als Radius die Hälfte der Grundseite c.

ihrer Mittelpunkte wird parallel zur Grundseite, ihre beiden Radien werden $M_a F_1 = M_b F_2 = CF_0$, also beide Radien gleich der Höhe des gleichschenkligen Dreiecks selbst, das Viereck $CM_a F_1 F_0 \cong CM_b F_2 F_0$ wird ein Rechteck.

3) Dass Winkel $AM_0 M_3 = 90 - \frac{\beta}{2}$ ist, folgt unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreieck $AM_0 F_0$, worin $\sphericalangle MAF = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$ ist. Folglich ist auch im rechtwinklichen Dreieck $AM_0 M_c$ der $\sphericalangle AM_c M_0 = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$.

3) Unter den Abschnitten ist unmittelbar:

$$\begin{aligned} AF_0 &= AF_3 = BF_3 = BF_0 = AE_3 = AE_0 \\ &= BD_3 = BD_0 = CE_2 = CD_2 = CE_1 \\ &= CD_1 = \frac{c}{2} = s - a \\ &= \frac{a + a + c}{2} - a = \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Und ferner erhält man:

$$\begin{aligned} CE_0 &= CD_0 = AE_2 = AF_2 = BD_2 = BF_1 \\ &= s - c = a - \frac{c}{2}; \end{aligned}$$

die Strecken:

$$AF_1 = AE_1 = \cdots = s = a + \frac{c}{2},$$

auch wegen der vorhergehenden Beziehung; endlich:

$$F_0 F_3 = 0 = a - b, \quad F_1 F_2 = 2a,$$
$$F_0 F_1 = F_3 F_2 = a,$$

gleich der Hälfte des vorigen.

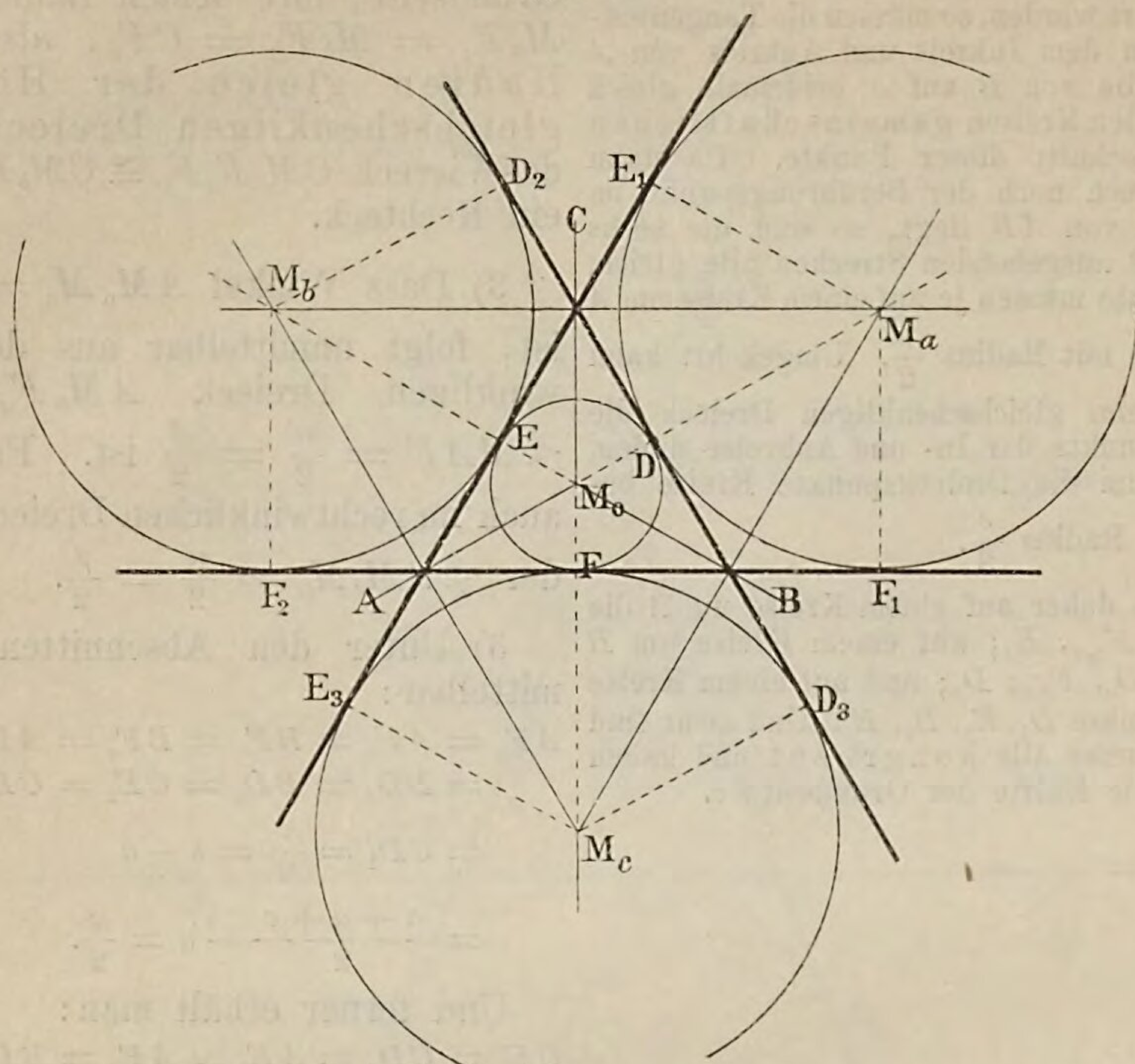
Frage 70. Wie vereinfacht sich die vorige Untersuchung beim gleichseitigen Dreieck?

Erkl. 160. Während beim gleichschenkligen Dreieck auf den Schenkeln noch die vier getrennten Punkte auftreten: zwei Berührungspunkte, der Mittelpunkt und der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, so rücken beim gleichseitigen Dreieck auch diese vier Punkte in einen einzigen zusammen. Hat das gleichschenklige Dreieck an der Spitze einen spitzen Winkel unter 60°, so liegt der Mittelpunkt des Inkreises unterhalb des Mittelpunktes des Umkreises; hat es einen spitzen Winkel über 60° oder einen stumpfen Winkel an der Spitze, so liegt das

Antwort. 1) Beim gleichseitigen Dreieck (siehe Figur 62) liegt der Mittelpunkt des Inkreises im Schnittpunkt der drei Symmetrieachsen, fällt also zusammen mit dem Mittelpunkt des Umkreises (s. Antwort 2 der Frage 55); jeder Mittelpunkt eines Ankreises liegt auf einer der Symmetrieachsen, und je zwei sind symmetrisch zur dritten Symmetrieachse.

2) Auf jeder Seite fallen die Berührungspunkte des Inkreises und Ankreises

Figur 62.



Zentrum der Seiten oberhalb des Zentrums der Ecken, stets auf der Symmetrieachse verbleibend. Beim gleichseitigen Dreieck fallen beide Punkte zusammen.

Erkl. 161. Das gegebene gleichseitige Dreieck ist für das Dreieck der äusseren Zentra der Seiten das Dreieck der Seitenmitten. Daher hat das Dreieck $M_a M_b M_c$ die doppelte Seitenlänge, aber den vierfachen Inhalt des gegebenen. Und über jeder Dreiecksseite ist dasselbe gegebene Dreieck nach aussen kongruent nochmals angetragen. — Wird der Winkel an der Spitze grösser als 60°, so werden die Ankreise der Schenkel grösser, der Ankreis der Grundseite aber kleiner; wird umgekehrt der Winkel an der Grundseite kleiner als 60°, so werden die beiden Ankreise der Schenkel kleiner, derjenige der Grundseite grösser. — Dass ganz allgemein die Grössenfolge der Dreieckswinkel auch die Grössenfolge der in ihren Innenwinkeln liegenden Ankreise sein muss, kann auch gefolgert werden aus der Gleichheit der Abschnitte $t_1' = t_2'' = t_3'''$. Denn diese Abschnitte bilden mit ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c drei rechtwinklige Dreiecke mit Winkeln $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$; folglich ist für $\alpha < \beta < \gamma$ auch $\varrho_a < \varrho_b < \varrho_c$ (Satz in Aufgabe 199 im III. Teile).

zusammen, die Radien beider bilden Teile der zugehörigen Höhe, jeder Radius eines Ankreises ist gleich der ganzen Höhe des Dreiecks, der Radius des Inkreises gleich dem untern Höhenabschnitt, also gleich einem Drittel der ganzen Höhe oder gleich dem Drittel eines Radius der Ankreise. Die Vierecke $M_a BFF_1$ und $M_a BEE_1$ und die analogen sind sämtlich kongruente Rechtecke, deren eine Seite der Höhe, deren andere Seite der Seitenlänge des Dreiecks gleich ist.

3) Ueber die Winkel folgt schon aus der achsigen Symmetrie, dass z. B. der Winkel CM_aB durch AM_a halbiert wird, dass der ganze Winkel gleich ist sowohl dem Winkel $M_a M_b M_c$, als dem Winkel $M_b M_c M_a$, dass aber jeder Winkel gleich 60°, dessen Hälfte gleich 30° ist. Das ganze Dreieck $M_a M_b M_c$ ist das Dreieck der Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die Gegenecken, und umgekehrt das Dreieck ABC das Dreieck der Seiten-

Dass $M_0 D = \frac{1}{2} M_0 A$ ist, folgt aus den Aufgaben 130 und 147 im III. Teile dieses Lehrbuches; oder auch schon aus Anwendung der Erkl. 199 desselben III. Teiles auf das Dreieck AM_0F.

Erkl. 162. Unter den vierundzwanzig Abschnitten t sind beim gleichseitigen Dreieck nur noch zweierlei Grössen: $\frac{a}{2}$ und $2a$. Daher liegen insbesondere die vier Berührungspunkte $E_1 E_3$, $F_1 F_2$ auf einem Kreise um A mit Radius $\frac{a}{2}$. Und man erhält die vier Berührungspunkte der In- und Ankreise, indem man um jeden Eckpunkt des Dreiecks Kreise mit der halben Seitenlänge zieht (vergleiche die Kreise III in Figur 76 des III. Teiles).

mitten des grossen Dreiecks $M_a M_b M_c$ (vergl. Satz 85 und Aufgabe 253 im III. Teile). An jedem äusseren Zentrum der Seiten entstehen vier Winkel von je 30°, am inneren Mittelpunkte sechs Winkel von 60°.

4) Unter den Tangentenabschnitten sind bis auf die Strecken $t_1' = t_2'' = t_3'''$ beim gleichseitigen Dreieck sämtliche gleichgross, nämlich jeder gleich einer halben Dreiecksseite. In der That ist $s-a = s-b = s-c = \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2}$, jene drei Strecken $AF_1 = BF_2 = BD_2 \cdots$ aber sind $= s = \frac{3a}{2}$ und auch nach ihrer Zusammensetzung selbst gleich $a + \frac{a}{2} = 3 \cdot \frac{a}{2}$. Die Abstände je zweier innern Berührungspunkte sind sämtlich Null, nämlich $a - a = 0$; jene zweier äussern sind $a + a = 2a$, zusammengesetzt als $a + 2 \cdot \frac{a}{2}$ oder $= 4 \cdot \frac{a}{2} = 2a$; jeder äussere ist von einem innern entfernt um eine Strecke $a = 2 \cdot \frac{a}{2}$.

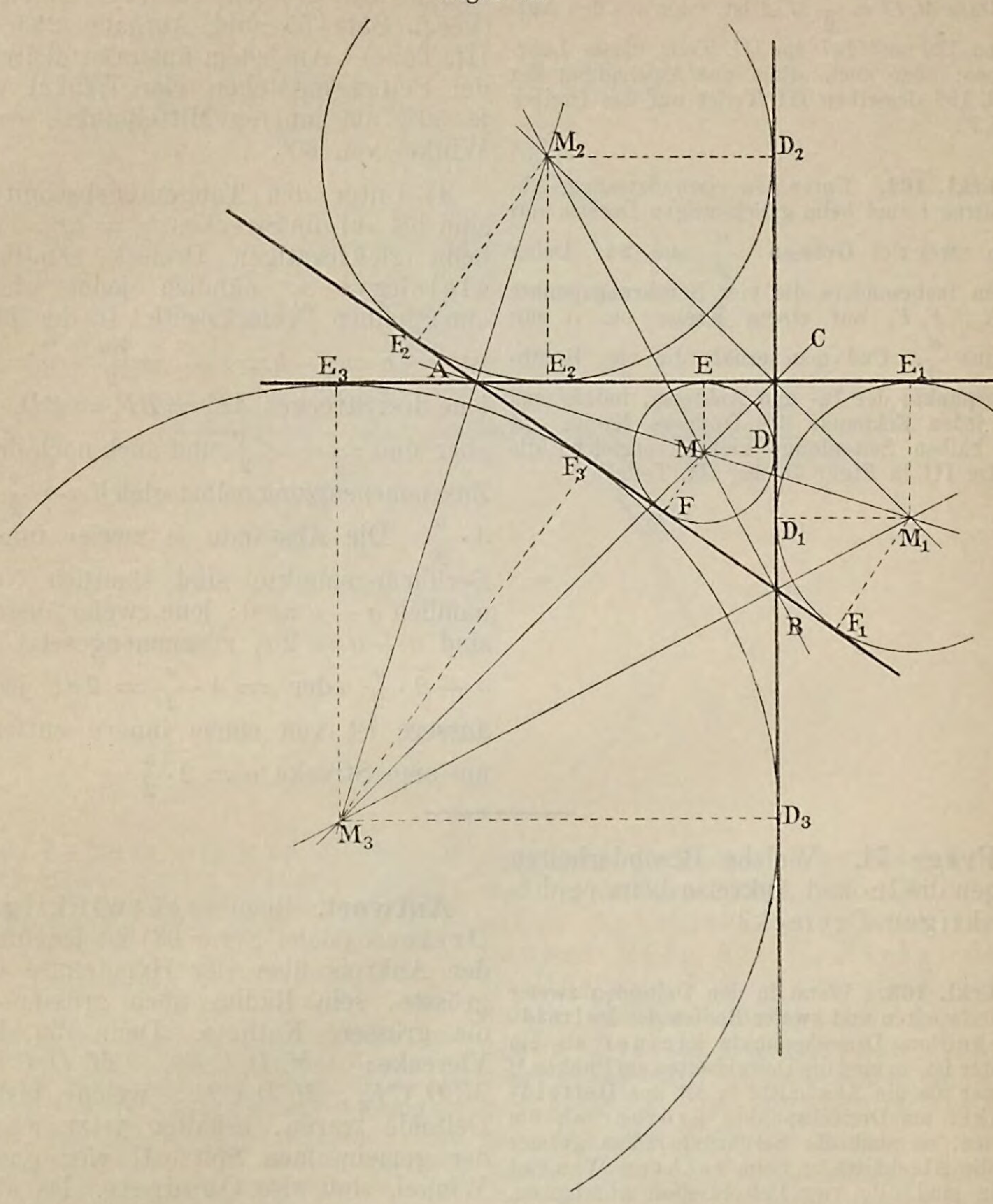
Frage 71. Welche Besonderheiten zeigen die In- und Ankreise beim rechtwinkligen Dreieck?

Antwort. Beim rechtwinkligen Dreieck (siehe Figur 63) ist jedenfalls der Ankreis über der Hypotenuse der grösste, sein Radius noch grösser als die grössere Kathete. Denn die drei Vierecke: $M_0 D_0 C E_0$, $M_1 D_1 C E_1$, $M_2 D_2 C E_2$, $M_3 D_3 C E_3$, welche bisher Deltoide waren, erhalten jetzt wegen der gemeinsamen Spitze C vier rechte Winkel, sind also Quadrate. Da aber der Berührungspunkt des Ankreises ausserhalb der Kathete liegt, so muss CE_3 und folglich auch ME_3 grösser als die grösste Kathete sein; der Winkel $M_1 M_3 M_2$ wird gleich 45°.

Da der rechte Winkel der grösste ist, liegen auf den Katheten die Berührungspunkte des Inkreises näher bei seinem Scheitel als die der Ankreise, und von letzteren die des kleineren Ankreises über der kleineren Kathete wieder näher als die des grösseren Ankreises über der grösseren Kathete.

Erkl. 163. Wenn in den Deltoiden zweier Dreiecksseiten und zweier Radien der Deltoidwinkel am Dreieckspunkte kleiner als ein rechter ist, so sind die Deltoidseiten am Punkte M kleiner als die Abschnitte t; ist der Deltoidwinkel am Dreieckspunkte grösser als ein rechter, so sind die Berührungsradien grösser als die Abschnitte t; beim rechten Winkel allein sind alle vier Deltoidseiten gleichgross, es wird als Quadratseite $\varrho_1 = t_3'$, $\varrho_2 = t_3''$, $\varrho_3 = t_3''' = s = \frac{a+b+c}{2}$. — Auf der Hypotenuse ist näher dem Scheitel des kleinern spitzen Winkels der Berührungspunkt des Ankreises, näher dem Endpunkte der kleinern Kathete der des Inkreises. Die Strecke $F_1 F_2$ kann auf zwei Arten als Kathetensumme betrachtet werden, nämlich entweder $= F_1 F_0 + F_0 F_2 = a + b$ oder $= F_1 F_3 + F_3 F_2 = b + a$.

Figur 63.



5) Ueber einen Kreis in Verbindung mit einem Viereck.

a) Ueber das einem Kreis eingeschriebene Viereck oder das Sehnenviereck.

Frage 72. Was ist ein Sehnenviereck?

Erkl. 164. Während zu einer einzelnen Sehne zwei Kreisbogen gehören, pflegt man für eine Seite eines Sehnenvierecks nur denjenigen Bogen besonders als ihren zugehörigen zu betrachten, auf welchem keiner der drei übrigen Eckpunkte liegt. Beim überschlagenen Viereck fällt also diese Anschauung ganz weg.

Antwort. Ein Sehnenviereck oder ein einem Kreise eingeschriebenes Viereck ist ein Viereck, dessen vier Eckpunkte auf einem Kreise liegen, oder erzeugende Punkte derselben Kreislinie sind. Der Kreis heisst umgeschriebener Kreis oder Umkreis des Vierecks.

Es ist also jede Seite des eingeschriebenen Vierecks eine Sehne des Kreises, jeder Winkel des Vierecks ein Peripheriewinkel.

Frage 73. Was für Eigenschaften des Sehnenvierecks folgen daraus, dass seine Seiten Sehnen sind?

Erkl. 165. Ist das Sehnenviereck ein einfaches Viereck, so ist die Winkelsumme an der Spitze der vier gleichschenkligen Dreiecke gleich dem Vollwinkel von 360^0; ist das Viereck aber ein überschlagenes, so tritt teilweise Ueberdeckung dieser Dreiecke ein, wie beim stumpfwinkligen eingeschriebenen Dreieck (siehe Figur 53). Ein einspringender Winkel kann bei einem Sehnenviereck gar nicht vorkommen, da dessen Scheitelpunkt im Innenwinkelraume seines Gegenwinkels liegen müsste, also im Innern des Kreises, was unmöglich ist.

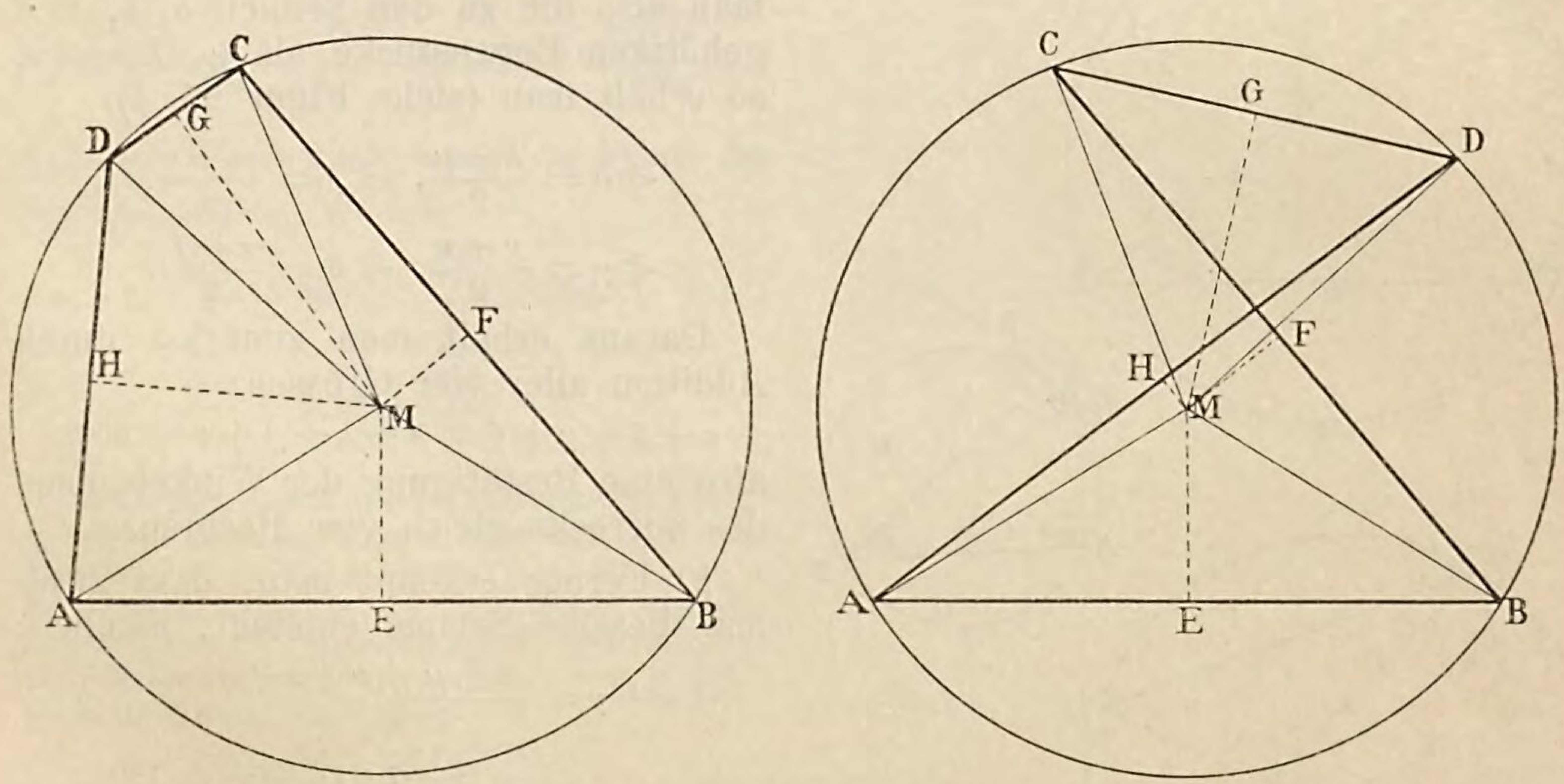
Antwort. Da jede Seite des eingeschriebenen Vierecks (siehe Figur 64) eine Sehne ist, so gewinnt man folgende Vorstellungen:

1) Durch die Radien nach den vier Eckpunkten eines eingeschriebenen Vierecks entstehen vier gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Spitze im Kreismittelpunkt.

2) Die Grössenfolge der Grundseiten dieser Dreiecke, also der Seitenstrecken des Vierecks, ist dieselbe, wie jene der Mittelpunktswinkel, der Kreisbogen, Kreisaus- und -abschnitte, aber entgegengesetzt der Grössenfolge ihrer senkrechten Abstände vom Kreismittelpunkte.

3) Der Durchmesser des Kreises ist die grösstmögliche Seitenlänge eines ihm eingeschriebenen Vierecks.

Figur 64.



Frage 74. Welche Folgerungen ergeben sich aus dem Vorigen für die Abstandsstrecken der Seiten des Sehnenvierecks vom Kreismittelpunkt?

Antwort. Jede der vier Abstandsstrecken teilt eines der gleichschenk-

Erkl. 166. In dem ersten Falle der Figur 64 ist nach Antwort 73 und 74:

Seiten und Bögen: $BC > BA > AD > DC$,

und ebenso:

Mittelpunktswinkel u. s. w.:

$$CMA > BMA > AMD > DMC,$$

aber entgegengesetzt:

Abstände: $MF < ME < MH < MG$.

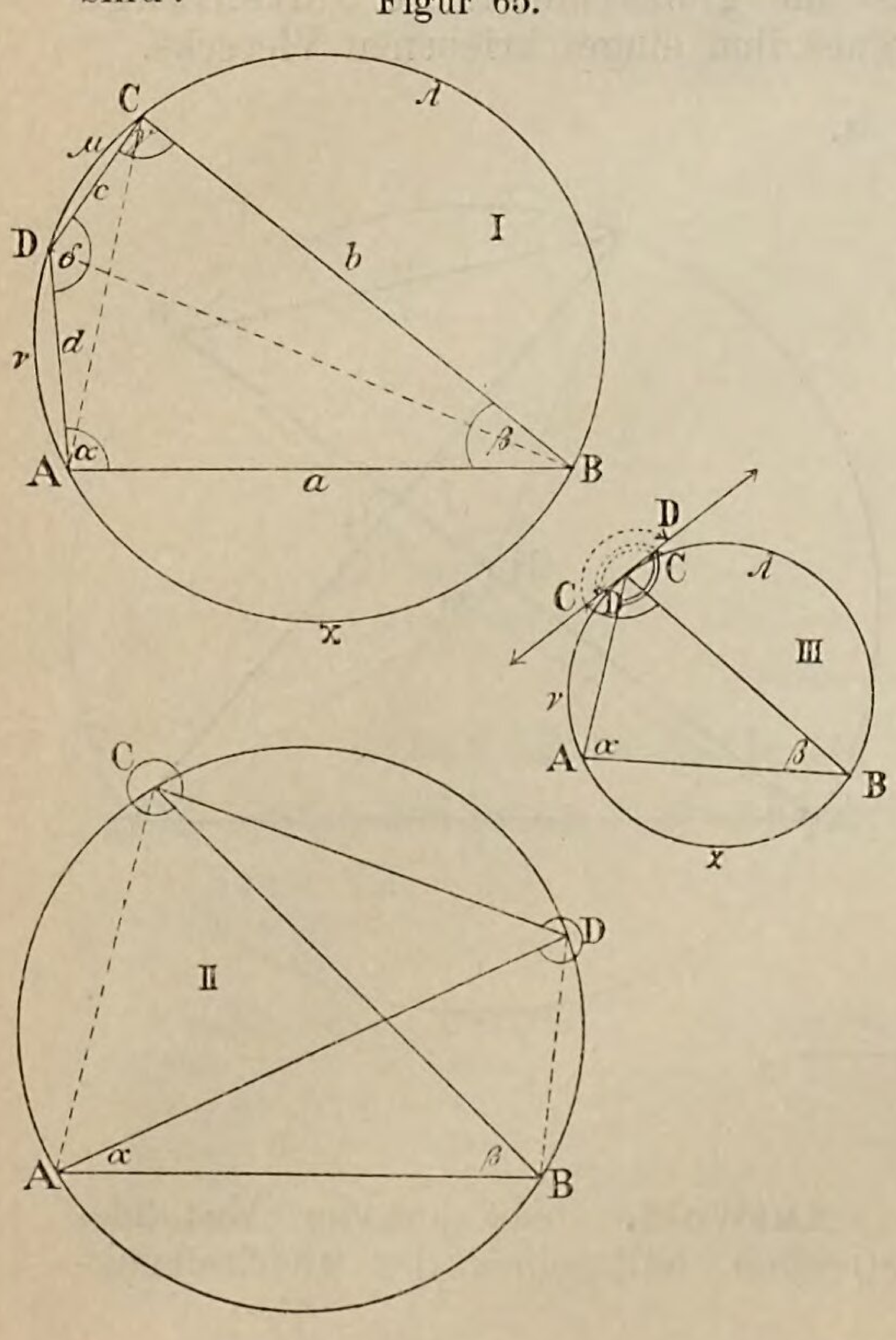
In der zweiten Figur 64 werden die Dreiecke BMC, CMD, DMA teilweise durcheinander bedeckt, während in der ersten die Winkelsumme bei M 360° beträgt. Die Vierecke $AEMH$, $BEMF$ sind in beiden Fällen als einfache Vierecke vorhanden. Dagegen die Vierecke $CFMGC$ und $DGMHD$ sind nur im ersten Falle einfache Vierecke, im zweiten dagegen überschlagene. Stets jedoch behalten sie die Eigenschaft, dass zwei Winkel rechte sind. Wählt man daher die vier Radien MA, MB, MC, MD als Durchmesser von Kreisen, so gehen nach Satz 15 diese Halbkreise durch je zwei Fusspunkte der Senkrechten: E, H; E, F; F, G; G, H.

ligen Dreiecke in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke; das ganze Viereck bildet mit denselben vier einzelne Vierecke, deren jedes zwei rechte Winkel hat.

Da die Vierecksseiten Sehnen sind, so gehen alle vier Mittelsenkrechten durch den Kreismittelpunkt, welcher selbst gleichen Abstand von den vier Ecken des Vierecks hat. Und umgekehrt wird jedes Viereck einem Kreise einbeschrieben werden können, bezw. kann jedem Viereck ein Kreis umbeschrieben werden, wenn die vier Mittelsenkrechten seiner Seiten durch einen und denselben Punkt gehen. Denn dieser Punkt hat als gemeinsamer Punkt der Mittelsenkrechten gleichen Abstand von den Endpunkten jeder Grundseite, also geht ein Kreis um ihn durch alle vier Punkte, wenn er durch einen einzigen geht.

Frage 75. Was für Eigenschaften des Sehnenvierecks folgen daraus, dass seine Winkel Peripheriewinkel sind?

Figur 65.



Antwort. 1) Da die Winkel eines Sehnenvierecks Peripheriewinkel sind, so ist jeder gleich der Hälfte des Kreisbogens, auf dem er steht. Bezeichnet man also die zu den Sehnen a, b, c, d gehörigen Bogenstücke als $\varkappa$, λ, μ, ν, so erhält man (siehe Figur 65, I):

$$\sphericalangle \alpha = \frac{\lambda + \mu}{2}, \quad \sphericalangle \beta = \frac{\mu + \nu}{2},$$

$$\sphericalangle \gamma = \frac{\nu + \varkappa}{2}, \quad \sphericalangle \delta = \frac{\varkappa + \lambda}{2}.$$

Daraus erhält man zunächst durch Addition aller vier Grössen:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \varkappa + \lambda + \mu + \nu = 360^0,$$

also eine Bestätigung der Winkelsumme des Vierecks gleich vier Rechten.

2) Ferner erkennt man, dass zweimal dieselbe Summe entsteht, nämlich:

$$\sphericalangle \alpha + \gamma = \frac{\lambda + \mu + \nu + \varkappa}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\varkappa + \lambda + \mu + \nu) = 180^0,$$

und

$$\sphericalangle \beta + \delta = \frac{\mu + \nu + \varkappa + \lambda}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\varkappa + \lambda + \mu + \nu) = 180^0.$$

Erkl. 167. Man könnte den Uebergang aus dem einfachen zum überschlagenen Sehnenviereck dadurch ermöglichen, dass man den Punkt D in Figur 65, I nach C hin wandern lässt. Sowie D mit C zusammenfällt, ist $ABCD$ (siehe Figur 65, III) Dreieck geworden, Seite CD Tangente, und es wird $\sphericalangle BCD$ bezw. $\sphericalangle ADC$ zum Winkel mit jeder der beiden entgegengesetzten Richtungen der Tangente, nämlich als Sehnentangentenwinkel:

$$\sphericalangle BCD \text{ entweder } = \frac{\varkappa + \nu}{2} \text{ oder überstumpf}$$
$$= \frac{360 - \lambda}{2} = 180 - \frac{\lambda}{2},$$
$$\sphericalangle ADC \text{ entweder } = \frac{\varkappa + \lambda}{2} \text{ oder überstumpf}$$
$$= \frac{360 - \nu}{2} = 180^0 - \frac{\nu}{2}.$$

Da dann noch $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ und $\beta = \frac{\nu}{2}$, so erhält man in jedem der beiden Fälle der Winkelzählung wieder als Summe entweder:

$$\frac{\varkappa + \nu}{2} + \frac{\lambda}{2} = \frac{\varkappa + \lambda}{2} + \frac{\nu}{2} = 180^0,$$

oder:

$$\left(180 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\lambda}{2} = \left(180 - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{\nu}{2} = 180^0.$$

Rückt dann Punkt D über C hinaus in den Bogen BC, so wäre als $\sphericalangle \gamma$ anzusehen der überstumpfe Winkel BCD, als δ der überstumpfe Winkel CDA, ersterer $= 360^0 - \frac{\widehat{BD}}{2}$, letzterer $360^0 - \frac{\widehat{AC}}{2}$. Da aber $\alpha = \frac{\widehat{BD}}{2}$ und $\beta = \frac{\widehat{AC}}{2}$ ist, so würde wieder die Summe der entgegengesetzten Winkel:

$$\alpha + \gamma = \frac{\widehat{BD}}{2} + 360^0 - \frac{\widehat{BD}}{2} = 360^0 = \beta + \delta$$
$$= \frac{\widehat{AC}}{2} + 360^0 - \frac{\widehat{AC}}{2}.$$

Erkl. 168. Nach dem Schlusssatze der nebenstehenden Antwort könnte man den Satz aussprechen, dass vier Punkte A, B, C, D in unbestimmter Ordnung (d. h. als einfaches oder als überschlagenes Viereck) auf einem Kreise liegen, wenn — in gleicher Drehungsrichtung gemessen —:

$$2\,(ABC - ADC) = 0.$$

3) Betrachtet man im allgemeinen Falle die Diagonale AC des Vierecks $ABCD$, so sind beim einfachen Viereck $ABCD$ (Figur 65, I) ABC und ADC Peripheriewinkel auf verschiedenen Seiten dieser Sehne, sind also nach Satz 16 Supplementwinkel; beim überschlagenen Viereck dagegen (Fig. 65, II) sind ABC und BDC Peripheriewinkel über derselben Sehne, also gleichgross. Nimmt man aber Rücksicht auf die Umdrehungsrichtung dieser Winkel, so sind dieselben im ersten Falle entgegengesetzt, im zweiten Falle gleichgerichtet; setzt man also demgemäss einen der Winkel im ersten Falle negativ, so wird $\sphericalangle ABC - ADC = \pm 180^0$, und im zweiten Falle $ABC + ADC = 0$. Durch Multiplikation mit 2 erhält man in beiden Fällen:

$$2\,(ABC - ADC) = 0,$$

denn $2 \cdot 180^0 = 360^0$ ist derselbe Winkel wie 0^0.

Frage 76. Welche Aussagen über eingeschriebene Vierecke ergeben sich aus den Antworten der beiden vorigen Fragen?

Antwort. Auf Grund der Ergebnisse der beiden vorigen Antworten kann man die Aussagen machen:

Satz 25. In jedem einem Kreise eingeschriebenen Viereck — gehen die Mittelsenkrechten der vier Seiten durch einen Punkt — und ist die Summe je zweier Gegenwinkel dieselbe, nämlich gleich der Hälfte der Innenwinkelsumme, also gleich zwei Rechten.

Und umgekehrt:

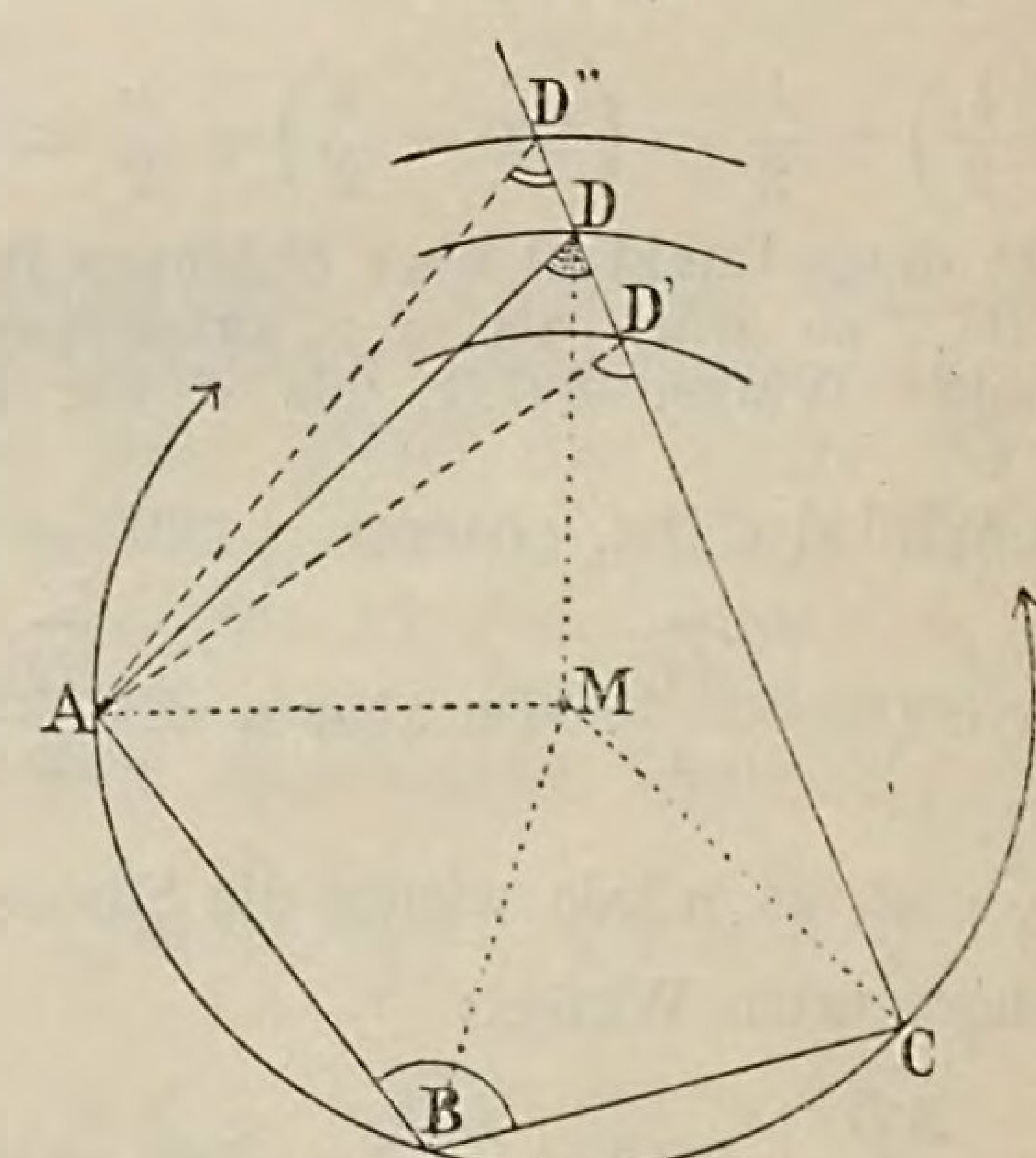
Satz 25 a. Ein Viereck kann einem Kreise eingeschrieben werden — oder einem Viereck kann ein Kreis umgeschrieben werden, wenn die vier Mittelsenkrechten der Seiten durch einen Punkt gehen — oder wenn die Summe je zweier gegenüberliegenden Winkel dieselbe, nämlich gleich zwei Rechten ist.

Erkl. 169. Die in Satz 25a ausgesprochene Umkehrung der in den Antworten 74 und 75 gewonnenen und in Satz 25 formulierten Ergebnisse lässt sich wie folgt beweisen:

1) Gehen die vier Mittelsenkrechten eines Vierecks durch denselben Punkt, so hat dieser Punkt denselben Abstand von je zweien der Eckpunkte des Vierecks, also haben alle vier Punkte denselben Abstand von diesem Punkte, und es gibt einen Kreis mit einem dieser Abstände als Radius um diesen Punkt, der durch alle vier Eckpunkte des Vierecks geht.

2) Ist im Viereck $ABCD$ (siehe Figur 66) $\sphericalangle \beta + \delta = 180^0$, so kann man jedenfalls durch ABC einen Kreis legen, und jeder Punkt auf dem Kreisbogen $\widehat{AC}$ liefert einen Winkel gleich $180^0 - \beta$. Geht dieser Kreisbogen selbst durch D, so ist die Behauptung erfüllt. Angenommen aber, der Kreis ginge nicht durch D, sondern träfe etwa die Linie CD in D' innerhalb oder in D'' ausserhalb der Seite CD selbst, so müsste $AD'C > ADC$, also $> 180^0 - \beta$ sein, und $AD''C < ADC$, also $< 180^0 - \beta$ sein. Beides ist gegen die Voraussetzung, also muss der Kreis durch die drei Punkte ABC auch durch den Punkt D gehen, d. h. alle vier Punkte A, B, C, D liegen auf einem Kreise.

Figur 66.



Erkl. 170. Wie aus Figur 64 zu erkennen ist, kann auch jede der beiden Eigenschaften der Sätze 25 aus der andern abgeleitet werden. Dass z. B. $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ sein muss, wenn die vier Mittelsenkrechten durch einen Punkt gehen, lässt sich aus den gleichen Grundseitenwinkeln der gleichschenkligen Dreiecke über den Seiten erschliessen. Jede der Gegenecken enthält zwei verschiedene Paare dieser vier gleichen Winkelgrössen, so dass an je zwei Gegenecken zusammen jede der vier Grössen einmal auftritt.

Dass umgekehrt $MA = MB = MC = MD$ sein muss, wenn $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ ist, kann folgendermassen bewiesen werden: Man sucht denjenigen Punkt M, welcher von den drei Punkten A, B, C denselben Abstand hat, und beweist, dass die zunächst willkürliche Verbindungslinie MD nach D diesen drei Abständen gleich gross ist. Da nämlich wegen $MA = MB = MC$ auch schon bekannt ist $\sphericalangle MAB = MBA$, $MBC = MCB$, so ergibt die Gleichung $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ die folgende:

$$(\sphericalangle MAD + MAB) + (\sphericalangle MCB + MCD) = (\sphericalangle MBA + MBC) + \sphericalangle \delta,$$

also durch Weglassung der vorgenannten gleichgrossen Teilwinkel auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\sphericalangle MAD + MCD = \sphericalangle \delta = \sphericalangle MDA + MDC.$$

Wäre nun $\sphericalangle MDA > MAD$, so müsste $MD < MA$ sein; und ebenso, wenn:

$$\sphericalangle MDC < MCD$$

wäre, müsste $MD > MC$, oder auch $MD > MA$ sein. Die Ungleichheit $MDC < MCD$ ist aber nach voriger Gleichung die notwendige Folge der Ungleichheit $MDA > MAD$, also müsste gleichzeitig $MD < MA$ und $MD > MA$ sein,

so lange nicht auch $MDA = MAD$ und $MCD = MDC$ ist. Folglich muss, sowie $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ ist, notwendigerweise auch $MD = MA$ sein, also $MA = MB = MC = MD$; d. h. M ist gemeinsamer Schnittpunkt der vier Mittelsenkrechten und Mittelpunkt des Umkreises des Vierecks $ABCD$.

Frage 77. Welche Grösse haben die Winkel der Diagonalen eines Sehnenvierecks?

Antwort. Der Winkel der Diagonalen ist beim einfachen Sehnenviereck ein Sehnenwinkel, beim überschlagenen ein Sekantenwinkel, beträgt also nach Satz 17 die halbe Summe bezw. die halbe Differenz der Gradzahl der von den zugehörigen Vierecksseiten ausgeschnittenen Kreisbogen.

Erkl. 171. Beim einfachen Viereck schneiden sich die Diagonalen im Innern, bilden daher einen Sehnenwinkel; beim überschlagenen Viereck schneiden sich die Diagonalen ausserhalb des Vierecks. Dass dieser Schnittpunkt aber auch ausserhalb des Kreises liegen muss, folgt daraus, dass auch die Diagonalen Sehnen sind, deren innerhalb des Kreises gelegene Strecken nicht zum Schnitt kommen. Folglich kann hier nur ein Sekantenwinkel entstehen.

Frage 78. Wie bestätigen sich die Sätze 25 bei den „besonderen Vierecken“?

Antwort. Wenn ein Viereck einem Kreise soll eingeschrieben werden können, so muss es die in Satz 25 ausgesprochenen Eigenschaften haben.

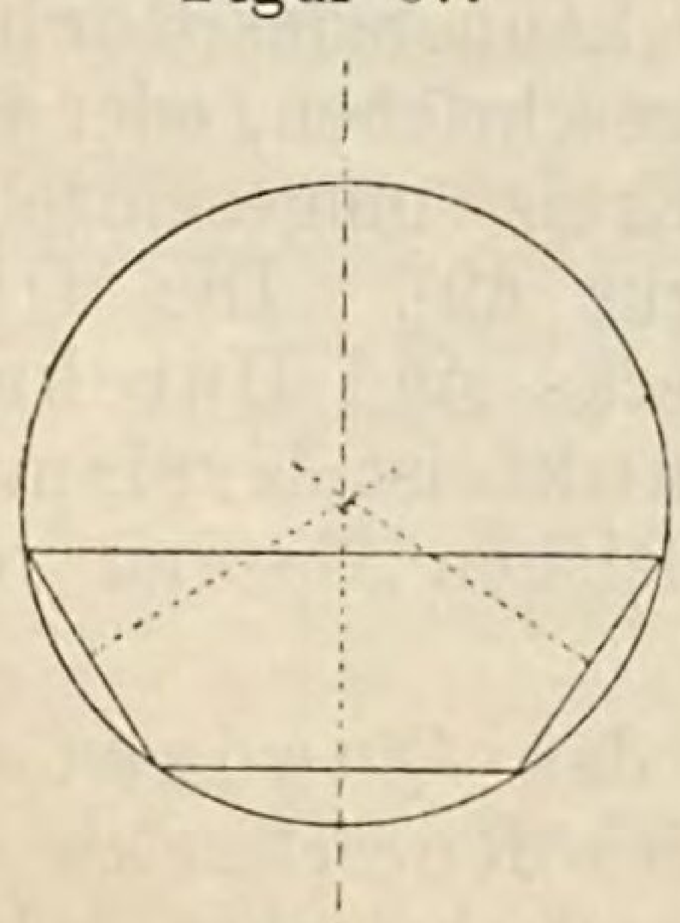
1) Nun bilden aber (nach Aufgabe 219) des III. Teiles) die Mittelsenkrechten eines Trapezes wieder ein Trapez, und die Summen gegenüberliegender Winkel sind nicht gleich. Also kann ein beliebiges Trapez einem Kreise nicht eingeschrieben werden.

2) Beim Antiparallelogramm dagegen sind (nach Satz 78 des III. Teiles) je zwei Gegenwinkel supplementär, und seine vier Mittelsenkrechten gehen (nach Aufgabe 237 daselbst) durch denselben Punkt. Folglich kann jedes Antiparallelogramm als Sehnenviereck angesehen werden (siehe Figur 67), oder jedem Antiparallelogramm ein Kreis umgeschrieben werden.

3) Das Deltoid besitzt zwei gleichgrosse Gegenwinkel, und von seinen Mittelsenkrechten schneiden einander (Aufgabe 238 im III. Teile) je zwei auf der Symmetrieachse. Es ist also das allgemeine Deltoid kein Sehnenviereck. Dagegen kann es zu einem solchen werden, wenn jene gleichen Gegenwinkel selbst Rechte oder wenn

Erkl. 172. Während beim Dreieck sich zeigte, dass jedes beliebige Dreieck einem Kreise eingeschrieben, bezw. dass jedem beliebigen Dreieck ein Kreis umgeschrieben werden kann, ist diese Eigenschaft beim Viereck keine allgemeine, da hier die Erfüllung der Bedingungen des Satzes 25 erforderlich wird. Daher können auch nur gewisse Gruppen von Vierecken als eingeschriebene Vierecke betrachtet werden.

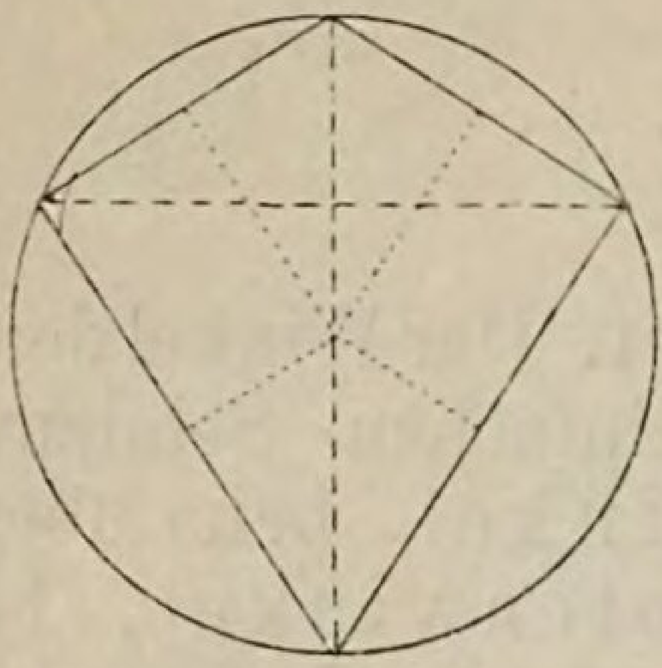
Figur 67.



Erkl. 173. Die beiden Grundseiten eines einem Kreise eingeschriebenen Antiparallelogramms bilden zwei parallele Sehnen, seine Schenkel zwei gleichlange Sehnen. Daher sind nach den Sätzen 7 und 8 auch in den Fragen 11, 12 und 13 Antiparallelogramme vorhanden, nämlich jedes Viereck der Art $ABCD$. Der Kreismittelpunkt kann innerhalb des Antiparallelogramms liegen, wie in Figur 12, und dem grössten der in Figur 11 ausgezeichneten, oder

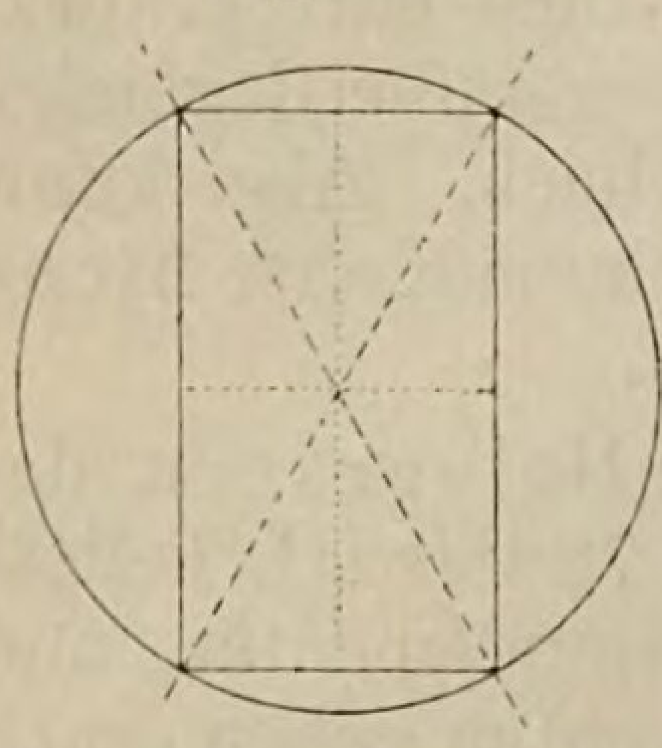
ausserhalb, nämlich über der grössten Seite, wie in Figur 67 und den beiden kleineren in Figur 11 ausgezeichneten. Ist eine Sehne Durchmesser, so liegt der Kreismittelpunkt auf ihr selbst.

Figur 68.

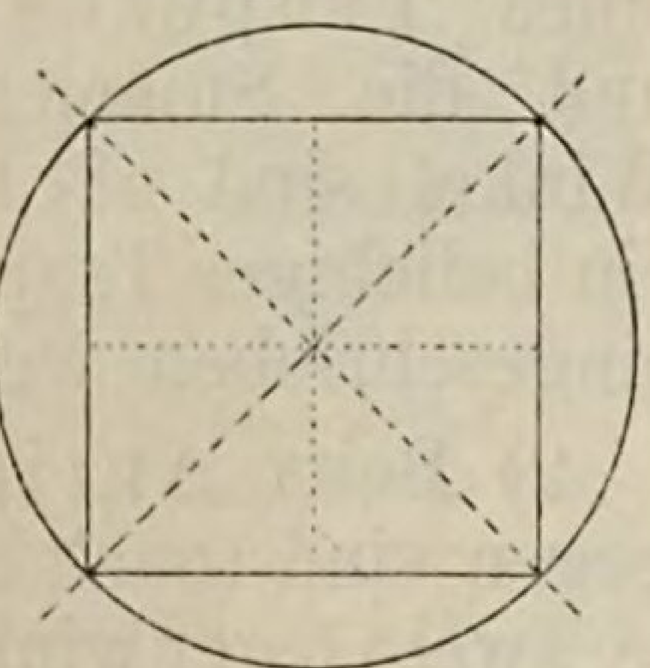


Erkl. 174. Sind im Deltoid zwei rechte Gegenwinkel, so geht der Halbkreis über der andern Diagonale als Durchmesser nach Satz 16g durch deren beide Scheitel; sind die ungleichen Winkel supplementär, so sind ihre Hälften beiderseits der winkelhalbierenden Diagonale komplementär, also die andern Winkel Rechte. Die Diagonale bildet beiderseits rechtwinklige Dreiecke, also hat der Mittelpunkt gleichen Abstand je von den drei Ecken. Und umgekehrt wird durch die Gleichheit dieser Abstände je ein rechter Winkel bedingt. — Deltoide mit rechten Gegenwinkeln sind alle, die einen Kreisdurchmesser als Diagonale haben, auch alle die Vierecke in den Figuren 57 bis 63, welche durch einen der vier Kreismittelpunkte mit einer Ecke und den zwei zugehörigen Berührungspunkten gebildet werden.

Figur 69.



Figur 70.



Erkl. 175. Während beim Antiparallelogramm k e i n e Diagonale Kreisdurchmesser ist, beim Deltoid e i n e, so werden beim Rechteck und Quadrat b e i d e D i a g o n a l e n Kreisdurchmesser. Der Winkel dieser Diagonalen beim Deltoid ist ein Rechter, denn da die vier entstehenden Kreisbogen zusammen den Vollkreis bilden und zu je zweien gleichgross sind, so müssen zwei ungleiche von ihnen einen Halbkreis ergeben, also ihre Hälfte nach Antwort der vorigen Frage 77 einen Rechten. — Beim Rechteck sind die beiden von den Diagonalen ausgeschnittenen Kreisbogen gleichgross, ihre halbe Summe gleich dem einen selber — und dem entsprechend der Diagonalenwinkel ein Mittelpunktswinkel. — Beim Quadrat endlich ist jeder der vier Kreisbogen 90⁰, also der Mittelpunktswinkel als halbe Summe von zweien wieder ein Rechter.

die ungleichen Winkel supplementär werden (denn dann ist ihre Summe je 2 R), oder wenn die beiden Schnittpunkte der Mittelsenkrechten auf der Achse in einen einzigen zusammenrücken (siehe Figur 68). Diese beiden Eigenschaften bedingen einander gegenseitig (siehe Erkl. 170 und 174).

4) Im P a r a l l e l o g r a m m sind Gegenwinkel gleichgross, die Mittelsenkrechten bilden (nach Aufgabe 247 des III. Teiles) wieder ein Parallelogramm. Daher ist ein allgemeines Parallelogramm auch kein Sehnenviereck; sondern damit es zu einem solchen werden könnte, müssten die Gegenwinkel selbst R e c h t e werden. Also müsste das Parallelogramm selbst zu einem Rechteck werden, um einem Kreis eingeschrieben werden zu können, bezw. um einen Kreis umgeschrieben erhalten zu können (siehe Figur 69).

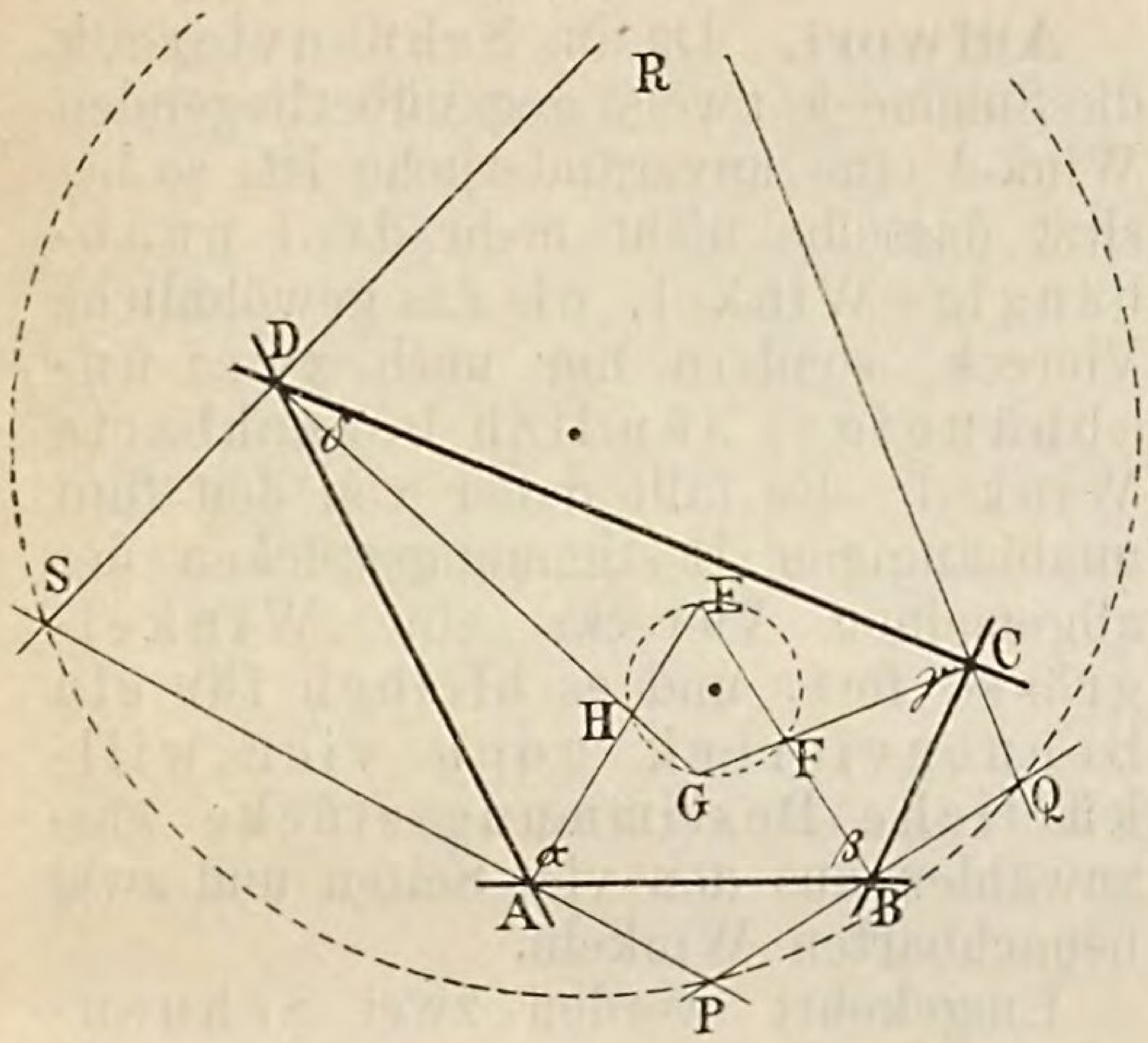
5) Auch im R h o m b u s sind gleiche Gegenwinkel vorhanden. Ein Rhombus kann daher einem Kreis nur dann eingeschrieben werden, wenn es zugleich rechte Winkel hätte: d. h. das Rhombus müsste Quadrat werden (s. Figur 70).

6) Das Rechteck aber besitzt gleiche Gegenwinkel von je 90^0; seine Diagonalen sind selbst Mittelsenkrechte je zweier Gegenseiten und schneiden einander im einzigen Mittelpunkte des Rechtecks. Also kann jedes R e c h t e c k einem Kreise eingeschrieben, oder jedem Rechteck ein Kreis umgeschrieben werden (siehe Figur 69). Die D i a g o n a l e n des Rechtecks sind D u r c h m e s s e r, ihr S c h n i t t p u n k t ist K r e i s m i t t e l p u n k t und hat gleichen Abstand von den vier Ecken.

7) Da das Q u a d r a t die Eigenschaften des R e c h t e c k s mit besitzt, so kann auch bei ihm jede Diagonale als Durchmesser, ihr Schnittpunkt als Kreismittelpunkt angesehen werden. Jedes Quadrat kann einem Kreise eingeschrieben werden, oder jedes Quadrat besitzt einen Umkreis (s. Figur 70).

Frage 79. Welche Winkeleigenschaften hat das Vierseit der Halbierungslinien der Innen- oder Aussenwinkel eines beliebigen Vierecks?

Figur 71.



Erkl. 176. In Figur 71 ist jeder Winkel des Vierecks $EFGH$ der Innenwinkelhalbierenden das Supplement zu einem der Winkel des Vierecks $PQRS$ der Aussenwinkelhalbierenden. Jedoch kann es sich je nach der Lage des gegebenen Vierecks auch treffen, dass die Winkel an der Spitze der Dreiecke über seinen Seiten nicht Innenwinkel bezw. Scheitelwinkel, sondern Nebenwinkel des Vierecks der Innenwinkelhalbierenden werden. Dann haben die beiden entstehenden Sehnenvierecke die gleichen Winkel.

Erkl. 177. Entsprechend der Thatsache, dass das Viereck der Winkelhalbierenden ein Sehnenviereck ist, wird auch bei den „besondern Vierecken“ dieses Viereck stets nur zu einem solchen, welches als Sehnenviereck möglich ist nach voriger Antwort 78. Es entsteht nie ein allgemeines Deltoid, Parallelogramm oder Rechteck, sondern — nach den Aufgaben im III. Teile: 216 und 217 fürs Trapez, 238 fürs Antiparallelogramm und Deltoid — entsteht als Viereck der Winkelhalbierenden immer entweder ein Antiparallelogramm oder ein Deltoid mit rechten Gegenwinkeln, oder ein Rhombus bezw. Quadrat.

Erkl. 178. Der Mittelpunkt des Vierecks der Innenwinkelhalbierenden und der Aussenwinkelhalbierenden ist im allgemeinen ein verschiedener. Jedoch kann derselbe bei besondern Fällen der Symmetrie in den gleichen Punkt fallen, so beim Parallelogramm (s. Figur 287 des III. Teils), beim Rechteck (siehe Figur 304 ebenda) und beim Rhombus und Quadrat selbst, indem wegen der zentrischen Symmetrie dieser Figuren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Gesamtfigur entsteht.

Antwort. Zieht man bei einem beliebigen Viereck (siehe Figur 71) die Halbierungslinien der Innenwinkel, so entstehen über jeder Seite Dreiecke mit je der Hälfte der Vieleckswinkel als Grundseitenwinkel. Die Winkel an der Spitze dieser Dreiecke bezw. deren Scheitelwinkel sind aber die Winkel des zu betrachtenden Vierecks $EFGH$ und haben daher die Grössen:

$$\sphericalangle E = 180^0 - \frac{\alpha+\beta}{2},\ \sphericalangle F = 180^0 - \frac{\beta+\gamma}{2},$$
$$\sphericalangle G = 180^0 - \frac{\gamma+\delta}{2},\ \sphericalangle H = 180^0 - \frac{\delta+\alpha}{2}.$$

Man erkennt also ohne weiteres, dass:

$$\sphericalangle E + \sphericalangle G = \sphericalangle F + \sphericalangle H$$
$$= 360^0 - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$$
$$= 360^0 - \frac{360^0}{2} = 180^0.$$

Zieht man in einem beliebigen Viereck die Halbierungslinien der Aussenwinkel, so entsteht wieder über jeder Dreiecksseite als Grundseite ein Dreieck mit den Winkeln gleich der Hälfte des Supplementwinkels, also gleich dem Komplementwinkel des halben Innenwinkels:

$$90^0 - \frac{\alpha}{2},\ 90^0 - \frac{\beta}{2},\ 90^0 - \frac{\gamma}{2},\ 90^0 - \frac{\delta}{2}.$$

Die Winkel an der Spitze dieser Dreiecke sind aber die Innenwinkel des zu betrachtenden Vierecks $PQRS$, und haben daher die Grössen:

$$\sphericalangle P = 180^0 - \left[\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right)\right]$$
$$= 180^0 - 180^0 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

und ebenso:

$$\sphericalangle Q = \frac{\beta+\gamma}{2},\ \sphericalangle R = \frac{\gamma+\delta}{2},\ \sphericalangle S = \frac{\delta+\alpha}{2}.$$

Daher ist wieder:

$$\sphericalangle P + \sphericalangle R = \sphericalangle Q + \sphericalangle S$$
$$= \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180^0.$$

Man kann daher die Aussage machen:

Satz 26. Sowohl die Halbierungslinien der Innenwinkel als auch die Halbierungslinien

der Aussenwinkel jedes beliebigen Vierecks bilden ein Sehnenviereck.

Frage 80. Wieviele Stücke sind erforderlich zur Konstruktion bezw. zur Kongruenz von Sehnenvierecken?

Erkl. 179. Für die Konstruktion eines allgemeinen Vierecks waren (in der Antwort der Frage 197 des III. Teiles) sechs verschiedene Fälle unterschieden worden. Aus denselben ergeben sich unter Berücksichtigung der nebenstehenden Antwort für die Konstruktion des Sehnenvierecks folgende vier Fälle, nämlich mit gegebenen Stücken:

1) vier Seiten,

2) drei Seiten und ein (also zwei) Winkel,

3) zwei anliegende Seiten und zwei (also alle vier) Winkel,

4) zwei gegenüberliegende Seiten und zwei (also alle vier) Winkel.

Es fallen nämlich von den sechs allgemeinen Fällen der zweite und vierte mit dem dritten in einen einzigen zusammen, da stets zwei Gegenwinkel bekannt sein müssen, also stets einer der gegebenen Winkel diese unbekannte, der andere zwei bekannte Seiten zu Schenkeln hat. Ueber die Ausführung der Konstruktion von Sehnenvierecken sehe man in der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles. Daselbst findet man auch solche Aufgaben, bei welchen der Radius des Umkreises als gegebene Grösse auftritt.

Antwort. Da im Sehnenviereck die Summe je zweier gegenüberliegenden Winkel eine unveränderliche ist, so besitzt dasselbe nicht mehr drei unabhängige Winkel, wie das gewöhnliche Viereck, sondern nur noch zwei unabhängige, nämlich benachbarte Winkel. Es fällt daher von den fünf unabhängigen Bestimmungsstücken des allgemeinen Vierecks eine Winkelgrösse fort, und es bleiben für ein Sehnenviereck noch vier willkürliche Bestimmungsstücke auszuwählen aus den vier Seiten und zwei benachbarten Winkeln.

Umgekehrt werden zwei Sehnenvierecke kongruent sein, wenn sie übereinstimmen in einer solchen Anzahl von Bestimmungsstücken, aus welchen nur ein einziges Sehnenviereck konstruiert werden kann, also wenn sie übereinstimmen in vier Stücken aus den vier Seiten und zwei benachbarten Winkeln.

Unter den Bestimmungsstücken kann an Stelle eines Winkels oder einer Seite auch die Länge des Radius eintreten.

b) Ueber das einem Kreis um- oder angeschriebene Viereck oder das Tangentenvierseit.

Frage 81. Was ist ein Tangentenviereck?

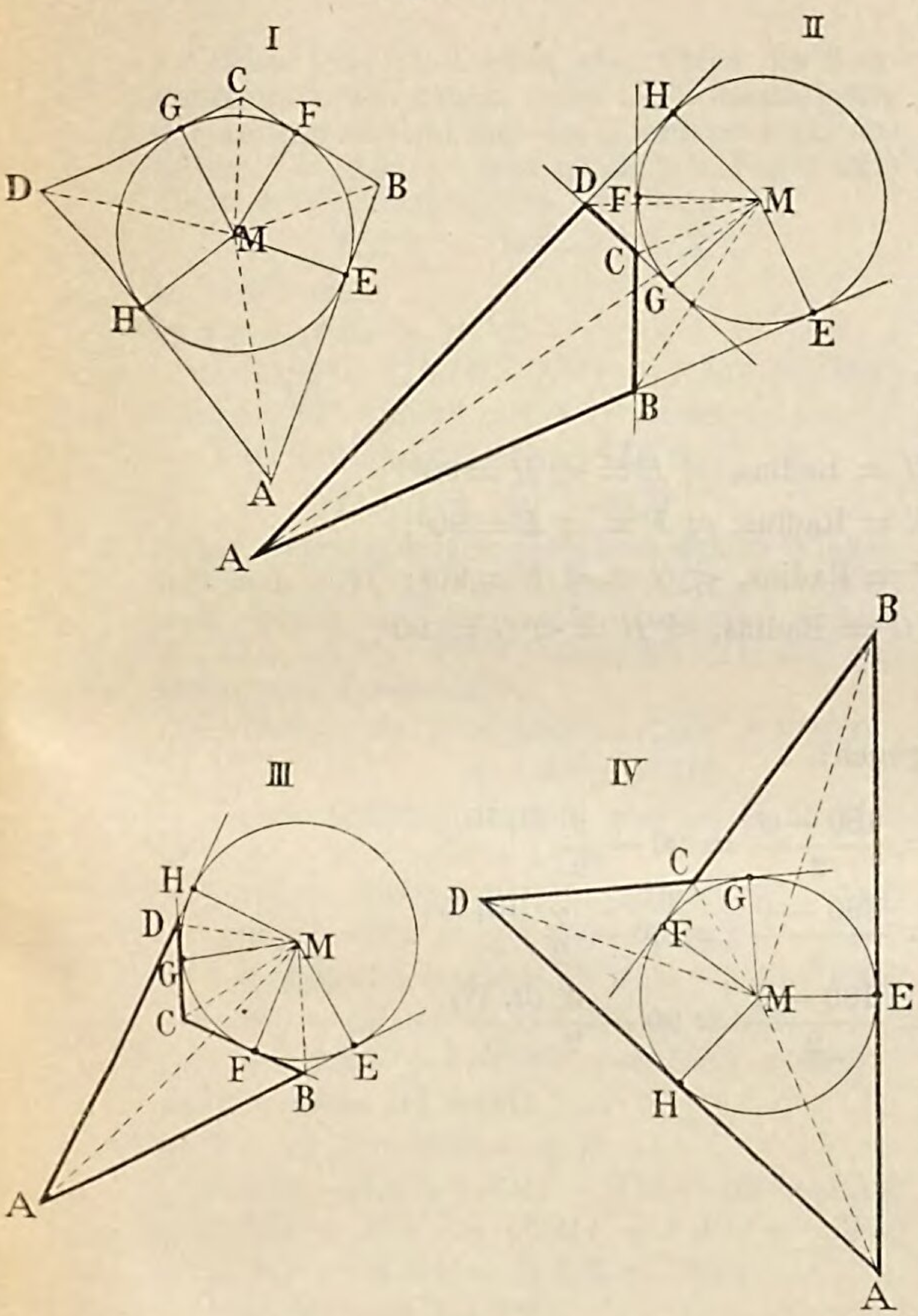
Erkl. 180. Ebenso wie es eine besondere Eigenschaft von drei Punkten oder drei Geraden ist, wenn sie auf derselben Geraden liegen bezw. durch denselben Punkt gehen, ebenso ist es eine besondere Eigenschaft von vier Punkten oder vier Geraden, wenn sie auf derselben Kreislinie liegen bezw. dieselbe Kreislinie berühren.

Da beim Tangentenviereck eine Eigenschaft seiner Linien die ausschlaggebende ist, so nennt man dasselbe genauer auch Tangentenvierseit, statt Tangentenviereck.

Antwort. Ein Tangentenviereck oder ein einem Kreise um- oder angeschriebenes Viereck ist ein Viereck, dessen vier Seitenlinien einen Kreis berühren, oder erzeugende Geraden derselben Kreislinie sind. Der Kreis heisst eingeschriebener Kreis oder Inkreis des Vierecks, bezw. angeschriebener Kreis oder Ankreis des Vierecks. Es ist also jede Seitenlinie des Vierecks eine Tangente des Kreises, jeder Winkel des Vierecks ein Tangentenwinkel oder dessen Nebenwinkel.

Frage 82. Welche Eigenschaften des Tangentenvierecks folgen daraus, dass seine Winkel Tangentenwinkel sind?

Figur 72.



Antwort. Da je einer der vier Winkel, welche jedes Seitenpaar des Tangentenvierecks bildet, ein Tangentenwinkel ist, so gewinnt man folgende Vorstellungen (siehe Figur 72 I bis IV):

1) Durch die Radien nach den Berührungspunkten *E, F, G, H* der Vierecksseiten entstehen vier Deltoide mit gemeinsamer Spitze *M* im Kreismittelpunkte und mit je zwei gleichgrossen Seiten am Mittelpunkte und zwei gleichgrossen Seiten am Tangenschnittpunkte, und mit je zwei von zwei ungleichen Seiten eingeschlossenen rechten Winkeln.

2) In diesen Deltoiden haben die Grössen der Tangentenwinkel die umgekehrte Grössenfolge wie die Grössen der Mittelpunktswinkel, ihrer Kreisbogen, Kreisausschnitte, aber die entgegengesetzte, wie die Grössenfolge der Abstandsstrecken ihrer Scheitelpunkte vom Kreismittelpunkte.

3) Durch die Abstandsstrecken selbst wird jedes Deltoid zerlegt in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, welche diese Verbindungsstrecke als gemeinsame Hypotenuse haben, nämlich als Diagonale und Winkelhalbierende des Deltoids. Beim Tangentenviereck selbst entstehen durch diese Verbindungsstrecken vier Dreiecke über je einer Vierecksseite als Grundseite und mit gemeinschaftlicher Spitze im Kreismittelpunkte, von denen je zwei einen gleichgrossen benachbarten Winkel besitzen gleich einem halben Viereckswinkel.

4) Während beim umgeschriebenen Viereck der Kreis und alle Teilfiguren ins Innere des Vierecks fallen, so liegt beim angeschriebenen Viereck der Kreis ausserhalb, und ebenso zwei der Deltoide und vier der rechtwinkligen Dreiecke. Einer der Viereckswinkel kann ein einspringender werden.

Erkl. 181. Wie aus Figur 72 zu erkennen ist, kann ein Tangentenviereck allgemein kein überschlagenes werden, wohl aber ein einspringendes, während ein Sehnenviereck wohl ein überschlagenes, aber nie ein einspringendes werden konnte. Bei dem in Figur 72 II und III dargestellten Tangentenviereck mit aus- oder einspringendem Winkel *C* wird der Kreis ein angeschriebener im Scheitelwinkelraum dieses aus- oder einspringenden Winkels. Dabei ist Viereckswinkel *A* selbst Tangentenwinkel, die Viereckswinkel *B* und *D* sind Nebenwinkel der Tangentenwinkel *CBE* und *CDH*. Der bei III überstumpfe Viereckswinkel *C* selbst ist im Scheitelwinkelraum des hohlen Tangentenwinkels *BCD*, er bildet dessen Ergänzung zu 360⁰. Bei dem in Figur 72 IV dargestellten Tangentenviereck dagegen, welches ebenfalls einen einspringenden Winkel *C* hat, ist der Kreis als eingeschriebener anzusehen, da er die Schenkel

aller Innenwinkel berührt. Es sind die Viereckswinkel A, B, C unmittelbar Tangentenwinkel; beim Scheitel des überstumpfen Winkels D ist $\sphericalangle GDH = \sphericalangle ADC = 360^0 = \sphericalangle D$; der Kreis berührt die Schenkel AD und CD in ihren Verlängerungen.

In den beiden ursprünglichen Fällen aber, nämlich Fig. 72 I und II, berührt der Kreis die vier Geraden entweder alle vier auf der Seitenstrecke selbst, oder alle vier auf deren Verlängerung. Die Innenwinkel sind bei I sämtlich Tangentenwinkel, bei II nur Winkel A selbst, während an den Ecken B, C, D die Aussenwinkel bezw. Scheitelwinkel zu Tangentenwinkeln werden.

Erkl. 182. In den vier Fällen der Figur 72 sind die Deltoide:

1) $AEMH$ mit Seiten $AE = AH$, $ME = MH =$ Radius, $\sphericalangle E = \sphericalangle H = 90^0$

2) $BFME$ mit Seiten $BF = BE$, $MF = ME =$ Radius, $\sphericalangle F = \sphericalangle E = 90^0$;

3) $CGMF$ mit Seiten $CG = CF$, $MG = AF =$ Radius, $\sphericalangle G = \sphericalangle F = 90^0$;

4) $DHMG$ mit Seiten $DH = DG$, $MH = MG =$ Radius, $\sphericalangle H = \sphericalangle G = 90^0$.

Und in den Dreiecken sind die Winkel:

$MAE = MAH = \frac{\alpha}{2}$ in allen vier Fällen; dagegen:

$$MBF = MBE, \text{ entweder } = \frac{\beta}{2}\ ^{(I, IV)} \quad \text{oder } = \frac{180 - \beta}{2} = 90 - \frac{\beta}{2}\ ^{(II, III)};$$

$$MCG = MCF, \text{ entweder } = \frac{\gamma}{2}\ ^{(I, IV)} \quad \text{oder } = \frac{360 - \gamma}{2} = 180 - \frac{\gamma}{2}\ ^{(III, IV)};$$

$$MDH = MDG, \text{ entweder } = \frac{\delta}{2}\ ^{(I, IV)} \quad \text{oder } = \frac{180 - \delta}{2} = 90 - \frac{\delta}{2}\ ^{(II, IV)}$$

Erkl. 183. Beim umgeschriebenen Viereck mit nur hohlen Winkeln ist jeder Berührungspunkt des Kreises ein innerer Teilpunkt der Vierecksseite, der Kreis berührt die Seite selbst; beim angeschriebenen Viereck mit nur hohlen Winkeln ist jeder Berührungspunkt des Kreises ein äusserer Teilpunkt der Vierecksseite, der Kreis berührt alle vier Seiten nur auf deren Verlängerungen; dagegen beim angeschriebenen und beim umgeschriebenen mit einem einspringenden Winkel sind die Berührungspunkte auf zwei Seiten innere Teilpunkte, auf den beiden andern aber äussere Teilpunkte; die ersteren beiden Seiten werden auf ihrer Strecke selbst berührt, die beiden andern auf ihrer Verlängerung. Der Uebergang zwischen beiden Fällen wird gebildet durch den gestreckten Mittelpunktswinkel, bei welchem zwei Tangenten parallel sind. Konvergieren diese dann weiter nach verschiedener oder nach derselben Seite, als wie die andern beiden Seiten, so entsteht das einfache Viereck oder das mit einspringendem Winkel, d. h. das um- oder angeschriebene Vierseit.

Frage 83. Welche Folgerungen ergeben sich aus dem vorigen für die Abstandsstrecken der Eckpunkte des Tangentenvierecks vom Kreismittelpunkte?

Erkl. 184. Bei allen vier Arten des Tangentenvierecks erhält man die Bestätigung der Innenwinkelsumme des Vierecks nach den Sätzen 13. Addiert man nämlich (s. Figur 72 I) die vier Gleichungen von der Form:

$$HAE = 180^0 - HME,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} DAB + ABC + BCD + CDA \\ &= 4 \cdot 180^0 - (HME + EMF + FMG + GMH) \\ &= 4 \cdot 180^0 - 360^0 = 2 \cdot 180^0 = 360^0. \end{aligned}$$

Und in Figur 72 II und III ist:

$$DAB = 180^0 - HME,$$

ferner wegen gleichgerichtet senkrechter Winkelschenkel $ABC = EMF$ und $ADC = HMG$, und endlich ist der hohle (stumpfe) Winkel $BCD = 180^0 - FMG$, also bei III der einspringende Innenwinkel:

$$\begin{aligned} C = 360^0 - BCD &= 360^0 - (180^0 - FMG) \\ &= 180^0 + FMG. \end{aligned}$$

Durch Addition entsteht also im Falle II:

$$\begin{aligned} \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D \\ &= 180^0 - HME + EMF + HMG + 180_0 - FMG \\ &= 360 - (HMF + FMG + GME) \\ &\quad + (EMG + GMF) + (HMF + FMG) - FMG \\ &= 360 - (HMF + 2 \cdot FMG + GME) \\ &\quad + (EMG + 2 \cdot GMF + HMF) = 360^0; \end{aligned}$$

und im Falle III wird:

$$\begin{aligned} \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D \\ &= 180^0 - HME + EMF + HMG + 180^0 + FMG \\ &= 360^0 - HME + (EMF + FMG + GMH) \\ &= 360^0 - HME + HME = 360^0. \end{aligned}$$

Endlich wird bei IV:

$$\begin{aligned} \sphericalangle C = 360^0 - FCG &= 360^0 - (180 - FMG) \\ &= 180^0 + FMG, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D \\ &= 180^0 - HME + 180^0 - EMF + 180^0 \\ &\quad + FMG + 180^0 - GMH \\ &= 4 \cdot 180^0 - HME - (EMG + GMF) \\ &\quad + FMG - (GMF + FMH) \\ &= 4 \cdot 180^0 - (HME + EMG + GMF \\ &\quad - GMF + GMF + FMH) \\ &= 4 \cdot 180^0 - 360^0 = 360^0. \end{aligned}$$

Antwort. Da die Abstandsstrecken MA, MB, MC, MD beim umgeschriebenen Viereck in Figur 72 I Winkelhalbierende der vier Innenwinkel des Vierecks sind, so folgt, dass die vier Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines umgeschriebenen Tangentenvierecks durch denselben Punkt gehen, nämlich durch den Kreismittelpunkt, welcher selbst gleichen Abstand hat von den vier Seiten des Vierecks.

Beim angeschriebenen Tangentenviereck in Figur 72 II ist MA Winkelhalbierende des Innenwinkels, MC ist Winkelhalbierende des hohlen (stumpfen) Winkels BCD, also auch in ihrer Verlängerung Winkelhalbierende des überstumpfen Winkels bei C, nämlich des einspringenden Innenwinkels BCD. Ferner sind MB und MD Winkelhalbierende der Winkel FBE und GDH, also Winkelhalbierende der Nebenwinkel der Viereckswinkel ABC und CDA oder der Aussenwinkel B und D des Vierecks. Daher gehen beim angeschriebenen Tangentenviereck die Winkelhalbierenden des überstumpfen Winkels und seines Gegenwinkels durch denselben Punkt wie die Winkelhalbierenden der Aussenwinkel an den andern beiden Gegenecken, nämlich durch den Kreismittelpunkt, welcher selbst gleichen Abstand hat von den vier Seiten des Vierecks.

Und umgekehrt kann also ein Viereck einem Kreise umgeschrieben werden bezw. kann einem Viereck ein Kreis eingeschrieben werden, wenn seine vier Winkelhalbierenden durch denselben Punkt gehen, und es kann ein Viereck einem Kreis angeschrieben werden oder dem Viereck ein Kreis angeschrieben werden, wenn die Halbierungslinie zweier Gegenwinkel und der andern beiden Aussenwinkel durch denselben Punkt gehen.

Erkl. 185. Die vier Abstände sind nur im umgeschriebenen Viereck unmittelbar vergleichbar, nämlich in Figur 72 I ist:

$$\sphericalangle A < \sphericalangle D < \sphericalangle B < \sphericalangle C,$$

folglich:

$$MA > MD > MB > MC;$$

dagegen in Figur 72 II und III ist einzeln $\sphericalangle A < \sphericalangle C$, folglich $MA > MC$, aber $\sphericalangle D < \sphericalangle B$, folglich $MD < MB$, da im letzteren Falle die Aussenwinkel halbiert sind. Um also unmittelbare Folge zu erhalten, müsste man schreiben für II:

$$\sphericalangle A < 180 - B < 180 - D < C,$$

folglich:

$$MA > MB > MD > MC;$$

und für III:

$$\sphericalangle A < 360^0 - C < 180 - B < 180 - D$$

folglich:

$$MA > MC > MB > MD;$$

für IV:

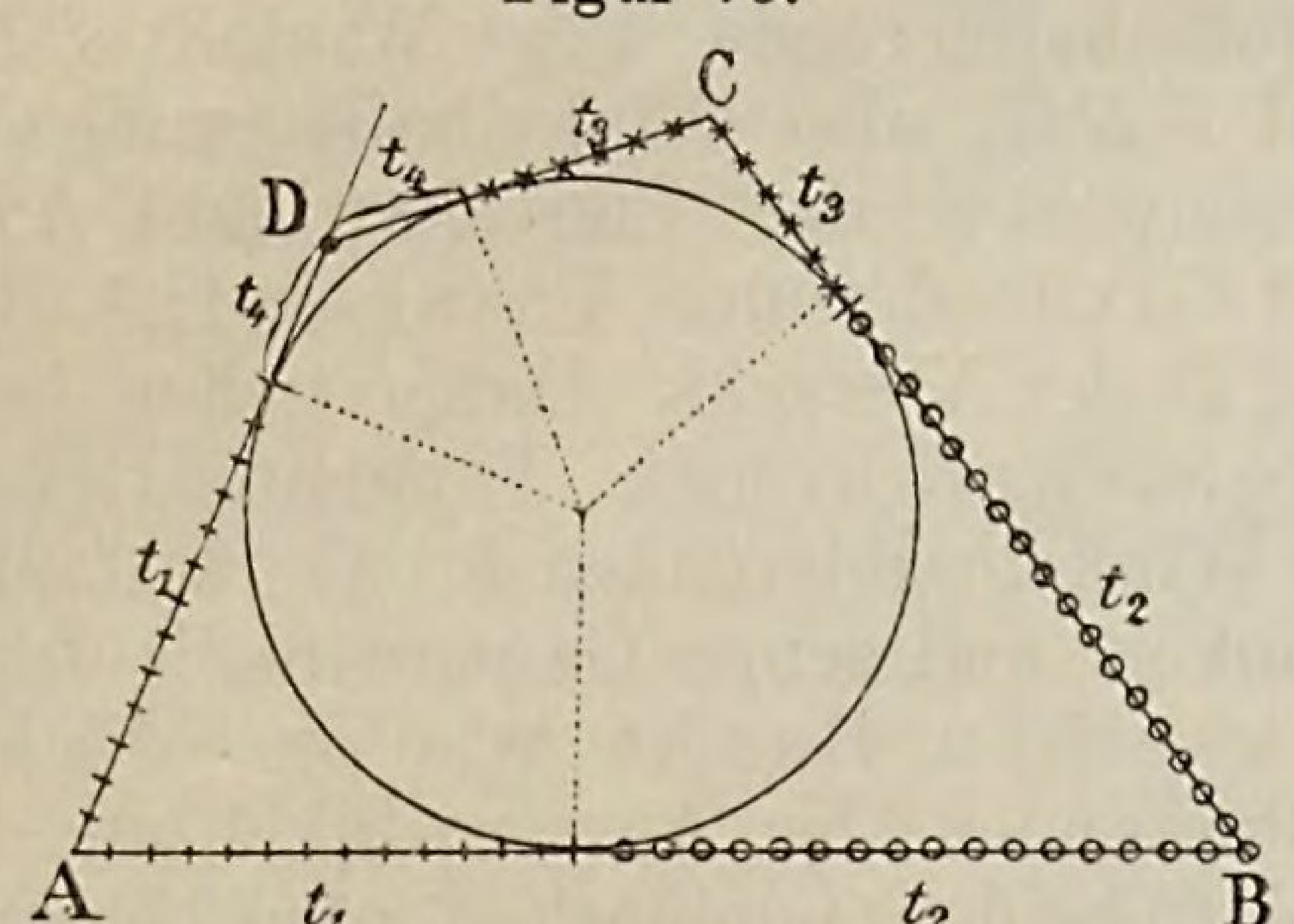
$$\sphericalangle B < A < D < 360 - C,$$

folglich:

$$MB > MA > MD > MC.$$

Frage 84. Welche Eigenschaften des Tangentenvierecks ergeben sich daraus, dass seine Seiten Tangenten sind?

Figur 73.



Antwort. Da nach Satz 13 die Tangentenabschnitte von einem Punkte nach einem Kreise gleichlang sind, so gehen von jedem Eckpunkte zwei gleichlange Strecken aus, und jede Seite besteht aus zwei solchen Abschnitten. Benennt man daher mit t_1, t_2, t_3, t_4 diese von den Eckpunkten A, B, C, D ausgehenden Tangentenabschnitte, so erhält man:

1) in Figur 73 beim umgeschriebenen Viereck:

$$AB = a = t_1 + t_2, \quad BC = b = t_2 + t_3,$$
$$CD = c = t_3 + t_4, \quad DA = d = t_4 + t_1.$$

Es entsteht also durch Addition je zweimal dieselbe Summe, nämlich:

$$a + c = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = b + d;$$

und da:

$$a + b + c + d = 2\,(t_1 + t_2 + t_3 + t_4),$$

so ist:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{a + b + c + d}{2},$$

also:

$$a + c = b + d = \frac{a + b + c + d}{2};$$

und auch:

$$a - d = t_1 + t_2 - t_4 - t_1 = t_2 - t_4,$$
$$b - c = t_2 + t_3 - t_3 - t_4 = t_2 - t_4 = a - d;$$
$$a - b = t_1 + t_2 - t_2 - t_3 = t_1 - t_3,$$
$$d - c = t_4 + t_1 - t_3 - t_4 = t_1 - t_3 = a - b.$$

Erkl. 186. Man kann den Uebergang vom umgeschriebenen Viereck zum umgeschriebenen Dreieck dadurch bewerkstelligen, dass man in Figur 73 etwa die Linie CD im positiven Umlaufssinne soviel weiterdreht, bis Punkt D in den Berührungspunkt der Seite AD fällt, dann wird DC Verlängerung von AD, die gebrochene Linie ADC eine Gerade, und das Viereck $ABCD$ wird zum Dreieck ABC. Dann werden die beiden Stücke $t_2 = 0$, $t_3 = CD = c$ und $t_1 = AD = d$. Aus den nebenstehenden Ergebnissen entsteht also $a + t_3 = b + t_1 = s$. Dies stimmt vollständig überein mit den Ergebnissen der Antwort der Frage 66, indem dort $a = t_1 + t_2$, $b = t_2 + t_3$, also $a + t_3 = t_1 + t_2 + t_3 = b + t_1 = s$ sind. Als Gegenseite tritt also einer der nicht anliegenden Abschnitte der beiden andern Dreiecks-

seiten auf. Und ebenso wird $a - t_1 = t_2$ und $b - t_3 = t_2$, da ja $d = t_2$ und $c = t_3$ geworden.

Erkl. 187. Der Uebergang vom angeschriebenen Viereck zum angeschriebenen Dreieck wird ebenfalls bewerkstelligt, indem man in Figur 74 etwa die Linie CB im negativen Umlaufssinne soviel weiterdreht, bis der Schnittpunkt B in den Berührungspunkt auf BA gefallen ist; dann wird $t_2 = 0$, CB fällt auf AB, das Viereck $ABCD$ wird zum Dreick ACD, es wird $BC = t_3$, $BA = t_1$. Aus den nebenstehenden Ergebnissen entsteht also:

$$u = AC + CD + DA$$
$$= (t_1 + t_3) + (t_4 - t_3) + (t_4 - t_1) = 2 \cdot t_4,$$

also $t_4 = s$. Es wird im Nebenstehenden:

$$a = t_1,\; b = t_3,\; c = t_4 - t_3,\; d = t_4 - t_1;$$

als Dreiecksseite treten also nicht die Stücke AC, CD, DA auf, sondern es wäre immer noch $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ anzusehen, wie dies beim Viereck gewesen; so dass als Gegenseite zu CD der Abschnitt $AB = t_1$, zu DA der Abschnitt $t_3 = BC$ zu gelten hätte.

2) Beim angeschriebenen Viereck in Figur 74 erhält man:

$$AB = a = t_1 - t_2,\quad BC = b = t_3 - t_2,$$
$$CD = c = t_4 - t_3,\quad DA = d = t_4 - t_1.$$

Hier wird:

$$a + b + c + d = t_1 - t_1 - t_2 - t_2 + t_3 - t_3 + t_4 + t_4 = 2(t_4 - t_2),$$

also:

$$t_4 - t_2 = \frac{a + b + c + d}{2};$$

ferner:

$$a + d = t_1 - t_2 + t_4 - t_1 = t_4 - t_2 = \frac{u}{2},$$

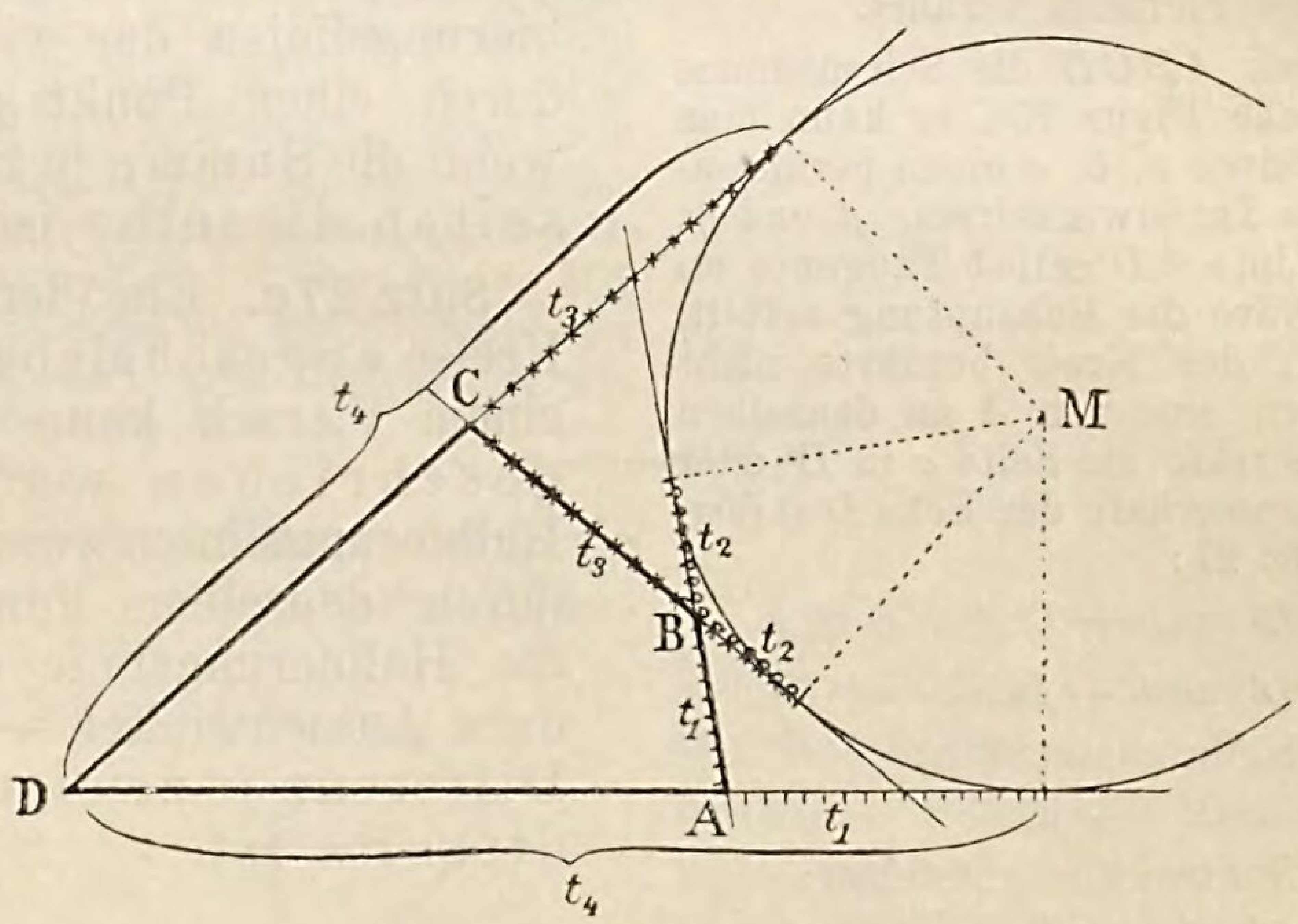
$$b + c = t_3 - t_2 + t_4 - t_3 = t_4 - t_2 = \frac{u}{2};$$

und auch:

$$a - b = t_1 - t_2 - t_3 + t_2 = t_1 - t_3,$$
$$c - d = t_4 - t_3 - t_4 + t_1 = t_1 - t_3 = a - b;$$
$$c - a = t_4 - t_3 - t_1 + t_2,$$
$$d - b = t_4 - t_1 - t_3 + t_2 = c - a.$$

Aehnlich werden die Fälle III und IV der Figur 72 behandelt, nämlich III wie II und IV wie I.

Figur 74.



Frage 85. Welche Aussagen über um- und angeschriebene Vierecke ergeben sich aus den Antworten der beiden vorigen Fragen?

Erkl. 188. Man beachte, dass die Sätze 27 die dualistische Uebertragung der Sätze 25 bilden. Dort waren beim Sehnenviereck die Summen gegenüberliegender Winkel gleich, nämlich gleich 180⁰ oder die Hälfte der Winkelsumme, hier sind beim Tangentenvierseit die Summen gegenüberliegender Seiten gleich, nämlich

Antwort. Auf Grund der Ergebnisse der beiden vorigen Antworten kann man die Aussagen machen:

Satz 27. In jedem einem Kreis umgeschriebenen Viereck (siehe Figur 72 I und IV) gehen die Halbierungslinien der vier Innenwinkel durch einen Punkt — und ist die

gleich der Hälfte der Seitensumme oder dem halben Umfange.

Erkl. 189. Von den in Antwort der Frage 84 abgeleiteten und nebenstehend als Lehrsatz formulierten Beziehungen zwischen den Seitenstrecken ist jeweils nur eine einzelne unabhängig, die andern die Folge der ersten. Denn wenn man eine Gleichung hat von der Form:

$$a \pm c = b \pm d,$$

so erfolgt durch Umstellung von Gliedern von der einen Seite nach der andern von selbst, dass dann auch:

$$a - b = \pm d \mp c,$$

sowie dass auch:

$$a \mp d = b \mp c \text{ ist.}$$

Erkl. 190. Die in den Sätzen 27b und 27c ausgesprochene Umkehrung der in den Antworten 83 und 84 gewonnenen und in den Sätzen 27 und 27a formulierten Ergebnisse lässt sich, wie folgt, beweisen:

1) Gehen die vier Winkelhalbierenden eines Vierseits durch denselben Punkt, so hat dieser Punkt denselben Abstand von je zweien der Seitenlinien des Vierseits, also haben alle vier Seiten denselben Abstand von diesem Punkte, und es gibt einen Kreis um diesen Punkt mit einem dieser Abstände als Radius, der alle vier Seitenlinien des Vierseits berührt.

2) Ist im Viereck $ABCD$ die Seitensumme $a + c = b + d$ (siehe Figur 75), so kann man jedenfalls an die Seiten a, b, c einen berührenden Kreis legen im Innenwinkelraum β und γ. Wird sodann die Linie AD selbst Tangente an diesen Kreis, so wäre die Behauptung erfüllt. Angenommen aber, der Kreis berührte nicht die Linie d, sondern eine von A an denselben gezogene Tangente träfe die Seite c in D' oder D'' innerhalb oder ausserhalb der Ecke D selbst, so müsste nach Satz 27:

$$a + CD' = b + D'A$$

bezw.:

$$a + CD'' = b + D''A.$$

Es ist aber nach Voraussetzung:

$$a + c = b + d,$$

also müsste durch Subtraktion entstehen:

$$c - CD' = d - AD' \text{ oder } DD' = AD - AD'$$

bezw.:

$$CD'' - c = AD'' - d \text{ oder } DD'' = AD'' - AD.$$

Da aber in jedem Dreieck eine Seite kleiner sein muss, als die Differenz der beiden andern, so ist dies beides unmöglich, also muss der Kreis an die drei Geraden a, b, c, auch die Gerade d berühren, d. h. alle vier Geraden a, b, c, d berühren einen Kreis.

Erkl. 191. Aus den Figuren 72 bis 75 ist auch zu erkennen, dass jede der beiden Gruppen von Eigenschaften der Sätze 27 aus der andern abgeleitet werden kann. Dass z. B.:

$$a + c = b + d$$

Summe je zweier Gegenseiten dieselbe, nämlich gleich dem halben Umfange — und ist die Differenz je zweier in Gegenecken aneinanderstossenden Seitenpaare dieselbe.

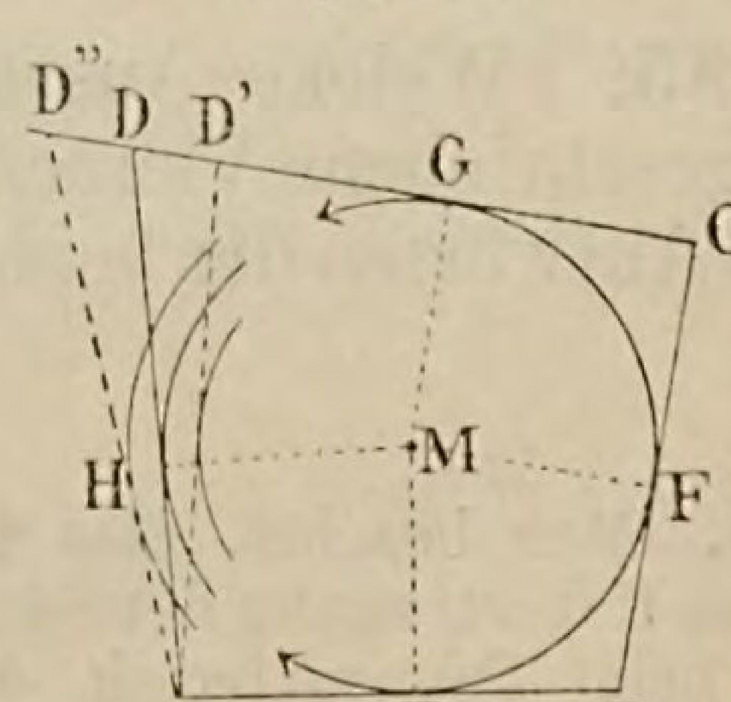
Satz 27a. In jedem einem Kreise angeschriebenen Viereck (siehe Figur 72 II und III) gehen die Halbierungslinien zweier Gegenwinkel durch denselben Punkt wie die Halbierungslinien der andern Aussenwinkel — und ist die Summe der an je zwei Gegenecken anstossenden Seitenpaare dieselbe, nämlich gleich dem halben Umfange — und ist die Differenz je zweier Gegenseiten oder der zwei am grössten Winkel und seiner Gegenecke anstossenden Seitenpaare dieselbe.

Und umgekehrt:

Satz 27b. Ein Viereck kann einem Kreise umgeschrieben werden, oder einem Viereck kann ein Kreis eingeschrieben werden, wenn die Halbierungslinien der vier Innenwinkel durch einen Punkt gehen — oder wenn die Summe je zweier Gegenseiten dieselbe ist.

Satz 27c. Ein Viereck kann einem Kreise angeschrieben werden, oder einem Viereck kann ein Kreis angeschrieben werden, wenn die Halbierungslinien zweier Gegenwinkel durch denselben Punkt gehen wie die Halbierungslinie der beiden andern Aussenwinkel — oder wenn die Differenz je zweier Gegenseiten dieselbe ist.

Figur 75.



sein muss, wenn die vier Winkelhalbierenden durch einen Punkt gehen, lässt sich aus den gleichen anstossenden Seiten der Deltoide mit den Viereckswinkeln erschliessen. Jede der Gegenseiten enthält zwei verschiedene Paare dieser vier gleichen Streckengrössen, so dass auf je zwei Gegenseiten zusammen jede der vier Grössen einmal auftritt.

Dass umgekehrt $ME = MF = MG = MH$ sein muss, wenn $a + c = b + d$ ist, kann folgendermassen bewiesen werden:

Man sucht denjenigen Punkt M, welcher von den drei Seiten a, b, c denselben Abstand hat, und beweist, dass die zunächst willkürliche Senkrechte MH auf d diesen drei Abständen gleich ist. Da nämlich wegen:

$$ME = MF = MG$$

auch schon bekannt ist $BE = BF$, $CF = CG$, so ergibt die Gleichung $a + c = b + d$ die folgende:

$$(AE + EB) + (CG + GD) = (BF + FC) + d,$$

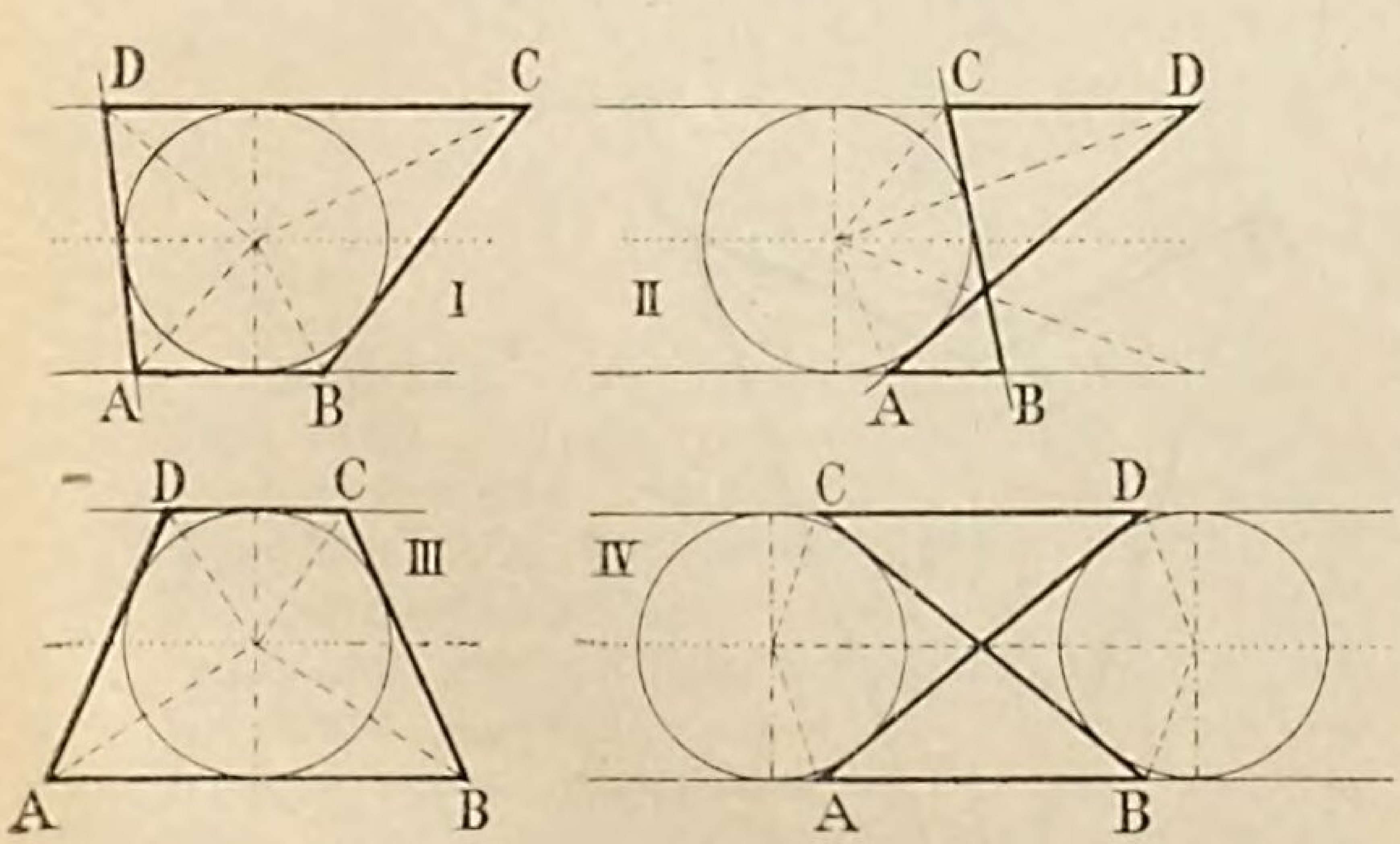
also durch Weglassung der vorgenannten gleichgrossen Teilstrecken auf beiden Seiten die Gleichung:

$$AE + GD = d = AH + HD.$$

Wäre nun $AH > AE$, so müsste $MH < ME$ sein, und ebenso, wenn $DH < DG$ wäre, müsste $MH > MG$, oder auch $MH > ME$ sein. Die Ungleichheit $DH < DG$ ist aber nach voriger Gleichung die notwendige Folge der Ungleichheit $AH > AE$, also müsste gleichzeitig $MH < ME$ und $MH > ME$ sein, solange nicht auch $AH = AE$ und $DH = DG$ ist. Folglich muss, sowie $a + c = b + d$ ist, notwendigerweise auch $MH = ME$, also $ME = MF = MG = MH$ sein, d. h. M ist gemeinsamer Schnittpunkt der vier Winkelhalbierenden und Mittelpunkt des Inkreises des Vierseits a, b, c, d.

Frage 86. Wie bestätigen sich die Sätze 27 bei den „besondern Vierecken?“

Figur 76.



Erkl. 192. In wievielfacher Weise ein allgemeines Viereck als Tangentenviereck auftreten kann, ist aus Figur 72 I bis IV zu entnehmen. Beim Trapez und Antiparallelo-

Antwort. Wenn ein Viereck einem Kreis soll um- oder angeschrieben werden können, so muss es die in den Sätzen 27 ausgesprochenen Eigenschaften besitzen:

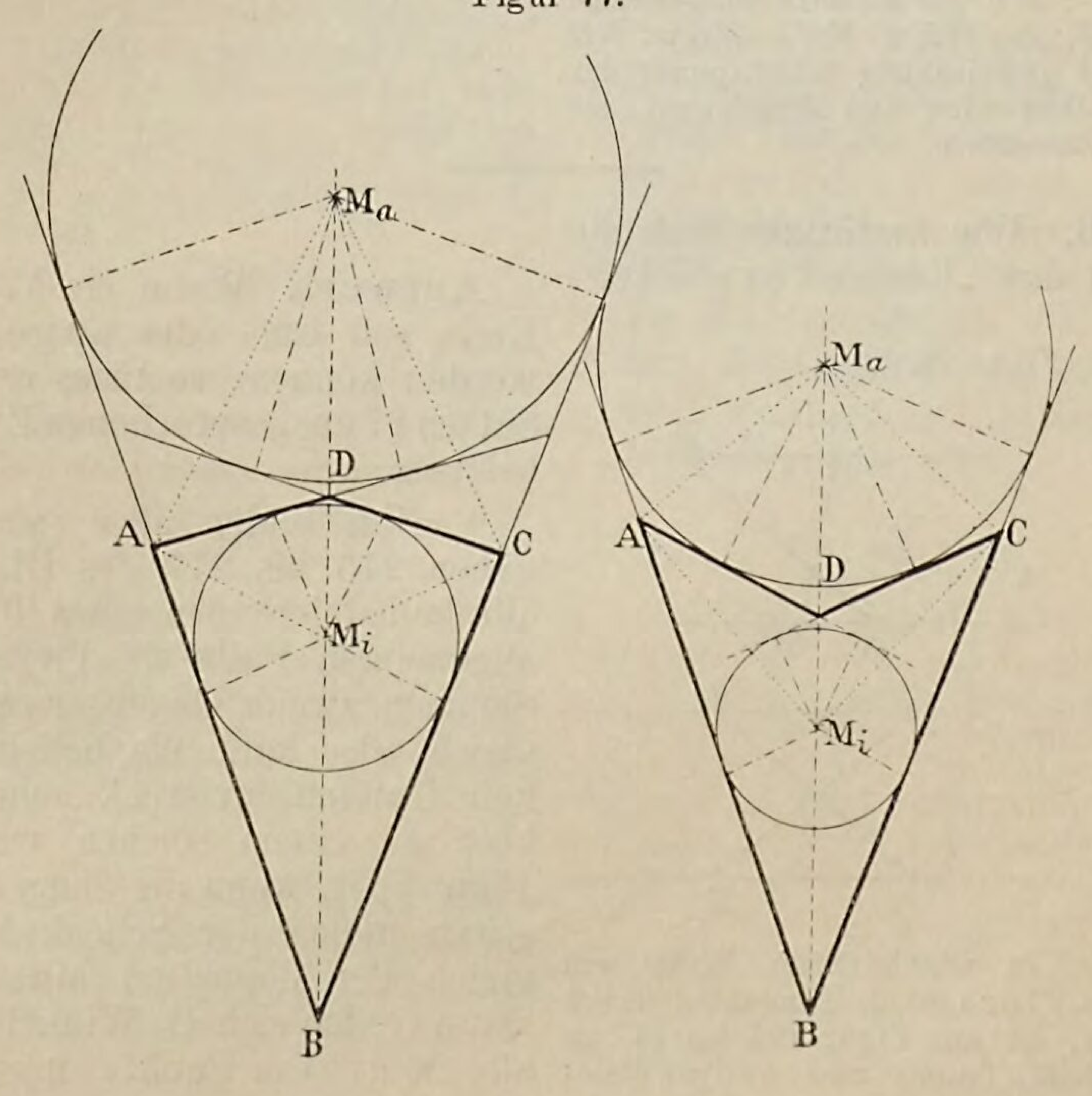
1) Nun bilden aber (nach den Aufgaben 215 bis 217 des III. Teiles) die Winkelhalbierenden eines Trapezes im allgemeinen Falle ein Viereck, und die Summen zweier Gegenseiten sind nicht gleich, also kann ein beliebiges Trapez kein Tangentenviereck sein. Es kann aber zu einem solchen werden (siehe Figur 76 I), wenn die Summe der Grundseiten gleich der Schenkelsumme, also gleich der doppelten Mittellinie wird. Dann treffen sich die Winkelhalbierenden alle in einem Punkte, nämlich auf der

gramm muss der Kreis jedenfalls zwischen den beiden Parallelen liegen, denn die Mittelparallele stellt deren Winkelhalbierende dar, daher sind die Fälle II und IV ausgeschlossen. Beim allgemeinen Trapez kann dann der Kreis eingeschrieben sein, oder beim überschlagenen Trapez angeschrieben (s. Figur 76). Beim Antiparallelogramm der einfachen Art liegt wieder der Kreis im Innern. Beim überschlagenen Antiparallelogramm dagegen kann wegen der Symmetrie nicht nur ein Kreis angeschrieben werden, sondern wenn ein Kreis angeschrieben werden kann, so kann zugleich ein zweiter angeschrieben werden: Die Winkelhalbierende am Schnittpunkt der Schenkel fällt mit der Mittelparallelen selbst zusammen. Dies ist der Grund, dass beim überschlagenen Trapez nur immer ein angeschriebener Kreis entstehen kann; denn die Winkelhalbierende der Schenkel fällt dort nicht mit der Mittelparallelen zusammen, schneidet also die Mittelparallele immer nur in einem einzigen Punkte. Und dieser Schnittpunkt ist eben der Mittelpunkt des einzigen angeschriebenen Kreises.

Erkl. 193. Während jedem beliebigen Dreieck vier Kreise ein- bezw. angeschrieben werden können, ist unter den Vierecken nur beim Deltoid die allgemeine Möglichkeit vorhanden, dass zwei Kreise von seinen Seiten berührt werden. Denn beim Antiparallelogramm war nur der einzige Ausnahmefall des überschlagenen mit gleichen Grundseiten — sonst Mittelparallelen des Trapezes, der Kreis berührt die beiden parallelen Grundseiten in zwei Punkten, welche senkrecht übereinander liegen. Ebenso erhält das überschlagene Trapez einen angeschriebenen Kreis (s. Figur 76 II), wenn die Schenkeldifferenz gleich der Grundseitendifferenz, also wieder gleich der doppelten Mittellinie wird.

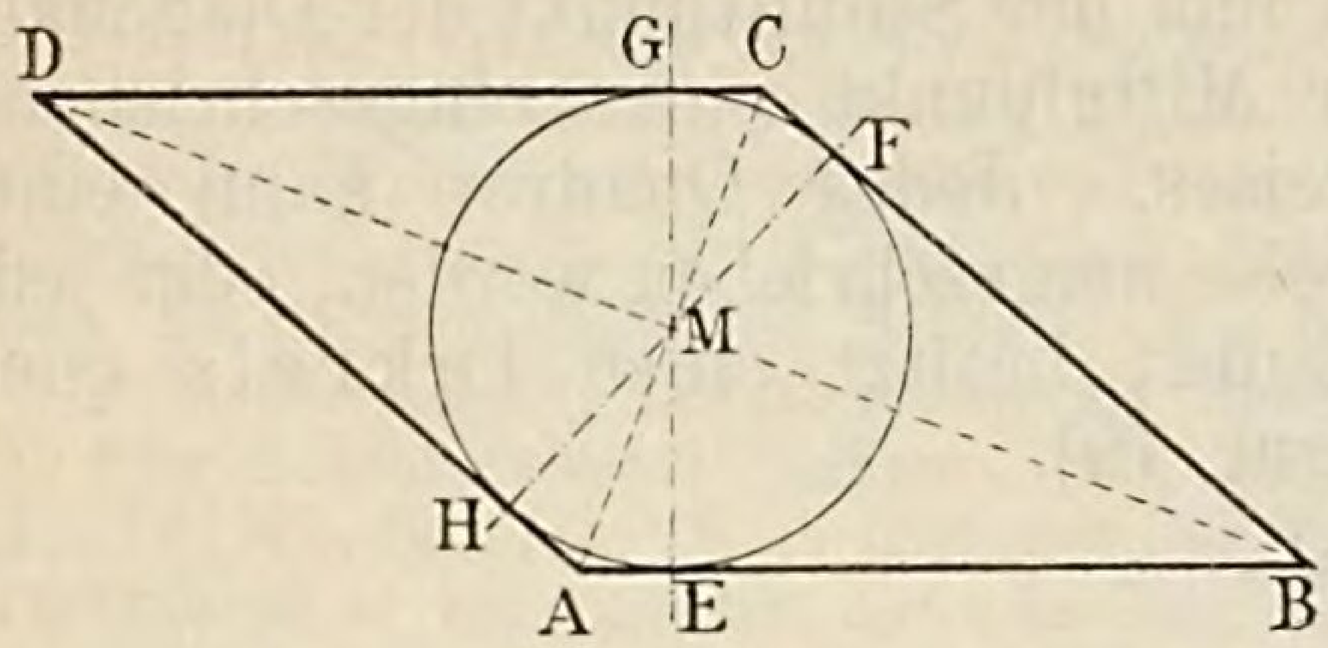
2) Beim Antiparallelogramm bilden die Winkelhalbierenden im allgemeinen Falle wieder ein Viereck, nämlich ein Deltoid, also kann ein beliebiges Antiparallelogramm nicht Tangentenviereck sein. Dagegen kann dasselbe auch wieder zu einem solchen werden (siehe Figur 76 III), wenn die Summen bezw. Differenzen der Gegenseiten gleichgross werden. Dann wird beim einfachen Antiparallelogramm jeder Schenkel gleich der Mittellinie, beim überschlagenen müssen wegen der gleichgrossen Schenkel auch die Grundseiten gleichgross werden, damit ihre Differenz beidemal gleich Null wird. Wegen der achsigen Symmetrie zur Mittelsenkrech-

Figur 77.



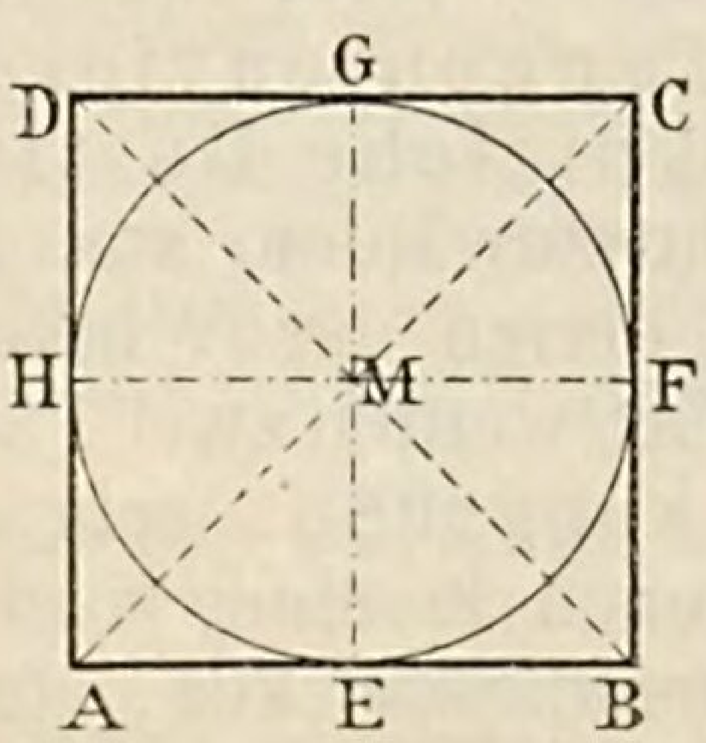
bei allen Vierecken nur ein einziger Kreis. Die beiden Arten des Deltoids mit aus- und einspringenden Winkeln erzeugen gerade die viererlei Berührungsarten, welche in Figur 72 I bis IV beim allgemeinen Viereck dargestellt waren.

Figur 78.



Erkl. 194. Da das allgemeine und die besonderen Parallelogramme mit den Trapezen die Parallelität zweier Gegenseiten gemeinsam haben, so kehrt auch bei all diesen Figuren die Lage des Kreises zwischen den Parallelen wieder. Die Radien nach den beiden Berührungspunkten bilden einen Kreisdurchmesser und geben den Abstand der beiden Parallelen an. Dies ist beim Trapez und Antiparallelogramm die Höhe des Vierecks, beim Rhombus ist EG der Abstand der Seiten a und c, HF jener der Seiten b und d; die beiden Höhen des Rhombus sind gleichlang, beide als Durchmesser desselben Kreises. Die Grösse des Radius ist als Höhe im rechtwinkligen Dreieck kleiner als jede der beiden Diagonalenhälften, also auch kleiner als jede Seite; denn auch die kürzere Diagonalenhälfte ist Kathete in dem rechtwinkligen Dreieck mit einer Seite als Hypotenuse.

Figur 79.



Erkl. 195. Beim Quadrat erhalten die in Erkl. 182 besprochenen Deltoide besonders bemerkenswerte Gestalt: Sie werden wieder Quadrate, die Berührungspunkte werden die Seitenmitten des Quadrats, die Berührungsradien fallen mit den Hälften der Mittelparallelen des Quadrats zusammen, also ist der Radius des Kreises selbst gleich der Hälfte der Quadratseite. Die Winkel der Radien sind beim Rhombus gleichgross mit den Rhombuswinkeln, nur in vertauschter Lage, beim Quadrat sind sie selbst Rechte.

ten entstehen zwei Kreise, beide angeschrieben.

3) Das Deltoid besitzt eine Symmetrieachse, welche zwei Gegenwinkel des Deltoids halbiert, und wegen der Symmetrie treffen sich je im gleichen Punkte dieser Winkelhalbierenden sowohl die beiden Winkelhalbierenden der übrigen beiden Innenwinkel, als der übrigen beiden Aussenwinkel. Auch erkennt man aus der Gleichheit zweier anstossenden Seitenpaare, dass sowohl die Summe, als die Differenz je zweier Gegenseiten dieselbe wird. Daher erfüllt das Deltoid sowohl die Bedingungen des Satzes 27b, als auch 27c: und es kann (s. Figur 77) jedes Deltoid in zweifacher Weise als Tangentenvierseit angesehen werden; oder es kann jedem Deltoid ein Kreis eingeschrieben und ein Kreis angeschrieben werden.

4) Im Parallelogramm bilden die Winkelhalbierenden (nach Aufgabe 248 des III. Teils) ein Rechteck, und die Gegenseiten sind selbst gleichgross, also weder ihre Summe noch Differenz. Daher ist das allgemeine Parallelogramm auch kein Tangentenvierseit; sondern damit es zu einem solchen werden könnte, müssten die anstossenden Seiten selbst gleichgross werden, das Parallelogramm müsste ein Rhombus werden (siehe Figur 78).

5) Das Rhombus besitzt vier gleiche Seiten und seine Diagonalen sind Winkelhalbierende je zweier Gegenwinkel. Daher kann jedes Rhombus einem Kreise umgeschrieben werden oder jedem Rhombus ein Kreis umgeschrieben werden (siehe Figur 78). Die Verbindungslinien der Berührungspunkte zweier Gegenseiten sind Durchmesser des Kreises, auch die Diagonalen des Rhombus gehen durch den Mittelpunkt des Kreises, der Schnittpunkt hat gleichen Abstand von den vier Seiten.

6) Im Rechteck bilden die Winkelhalbierenden (nach Aufgabe 288 des III. Teils) ein Quadrat, gegenüberliegende Seiten sind gleich, also anstossende ungleich. Daher ist das allgemeine Recht-

eck kein Tangentenvierseit, und könnte nur zu einem solchen werden, wenn es gleiche Seiten erhielte, also zum Quadrat würde (siehe Figur 79).

7) Da das Quadrat die Eigenschaften des Rhombus mitbesitzt, so ist auch bei ihm der Schnittpunkt der Diagonalen der Mittelpunkt eines eingeschriebenen Kreises. Jedes Quadrat kann einem Kreise umgeschrieben werden, oder jedes Quadrat besitzt einen Inkreis (siehe Figur 79).

Frage 87. Wieviele Stücke sind erforderlich zur Konstruktion bezw. Kongruenz von Tangentenvierecken?

Antwort. Da im Tangentenviereck durch die Summe zweier Gegenseiten auch diejenige der beiden andern bestimmt ist, so besitzt dasselbe nicht mehr vier unabhängige Seiten, wie das gewöhnliche Viereck, sondern nur noch drei unabhängige. Denn unter drei Seiten sind immer zwei Gegenseiten: also ist deren Summe bekannt, und folglich diejenige Länge bestimmt, welche die dritte gegebene Seite zu dieser Summe ergänzt. Es fällt daher von den fünf unabhängigen Bestimmungsstücken des allgemeinen Vierecks eine Seitengrösse fort, und so bleiben für das Tangentenviereck noch vier willkürliche Bestimmungsstücke, auszuwählen aus dreien der Seiten und dreien der Winkel.

Umgekehrt werden zwei Tangentenvierecke kongruent sein, wenn sie übereinstimmen in einer solchen Anzahl von Bestimmungsstücken, aus welchen nur ein einziges Tangentenviereck konstruiert werden kann, also wenn sie übereinstimmen in vier Stücken aus den drei Seiten und drei Winkeln.

Unter diesen Bestimmungsstücken kann an Stelle eines Winkels oder einer Seite auch die Länge des Radius eintreten.

Erkl. 196. Für die Konstruktion des allgemeinen Vierecks waren (in der Antwort der Frage 197 des III. Teiles) sechs verschiedene Fälle unterschieden worden. Aus denselben ergeben sich unter Berücksichtigung der nebenstehenden Antwort für die Konstruktion des Tangentenvierecks folgende vier Fälle, nämlich mit gegebenen Stücken:

1) drei (also alle vier) Seiten und ein Winkel,

2) zwei anliegende Seiten und zwei Winkel,

3) zwei gegenüberliegende Seiten und zwei Winkel,

4) eine Seite und drei (also alle vier) Winkel.

Es fallen nämlich von den sechs allgemeinen Fällen der zweite ganz fort, der fünfte und sechste in einen einzigen zusammen. Im zweiten der verbleibenden Fälle ist die Differenz, im dritten die Summe der beiden noch unbekannten Seiten durch die gegebenen Stücke bestimmt; dadurch entstünden wieder die fünf gegebenen Stücke zur allgemeinen Lösung.

Ueber die Ausführung der Konstruktion von Tangentenvierecken sehe man in der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles. Daselbst findet man auch solche Aufgaben, bei welchen der Radius des In- oder Ankreises als gegebene Grösse auftritt.

c) Ueber das einem Kreis ein- und umgeschriebene Viereck oder das Kreisviereck.

Frage 88. Was ist ein Sehnentangentenviereck oder Kreisviereck?

Erkl. 197. Wie aus den Erkl. 165 und 181 hervorgeht, kann ein Kreisviereck keinen einspringenden Winkel erhalten, während man das überschlagene Viereck als Kreisviereck denken kann. Es würden daher die in Figur 64 I, 65 I, 67 bis 70 dargestellten Sehnenvierecke dieselbe Art von Kreisvierecken liefern, wie die in Figur 72 I, 73, 76 I, III, 78, 79 dargestellten Tangentenvierecke; eine andere Art von Kreisvierecken lieferten die Sehnenvierecke in Figur 64 II, 65 II, 72 II, 76 II, IV; keine Kreisvierecke aber die Tangentenvierecke Figur 72 III, IV und 77 II.

Antwort. Ein Sehnentangentenviereck oder ein Kreisviereck ist ein solches Viereck, das sowohl einem Kreis eingeschrieben, als auch einem Kreise um- oder angeschrieben werden kann, bei dem also gleichzeitig die vier Ecken auf einem Kreise liegen und alle vier Seitenlinien einen Kreis berühren, oder bei dem gleichzeitig die vier Eckpunkte erzeugende Punkte eines Kreises und die vier Seiten erzeugende Geraden eines Kreises sind.

Es ist also jede Seite gleichzeitig Sehne des einen und Tangente des andern Kreises, jeder Winkel Peripheriewinkel des einen und Tangentenwinkel des andern Kreises.

Frage 89. Welche Eigenschaften des Kreisvierecks ergeben sich aus voriger Antwort?

Erkl. 198. Im nebenstehenden Satz 28 bezieht sich der in Klammer stehende Ausdruck jeweils auf den Fall, dass das einem Kreise eingeschriebene Viereck dem zweiten Kreise angeschrieben statt umgeschrieben wäre, es ist also in der Klammer jeweils die Fassung des Satzes 27 b zu erkennen, während die unmittelbare Lesart dem gewöhnlichen Falle entspricht. Wird das Viereck auch ein überschlagenes, so wäre nach Frage 65 II auch nicht die Summe, sondern die Differenz der Gegenwinkel einzusetzen.

Die Umkehrung des Satzes 28 in beiden Fassungen liefert entsprechend den Sätzen 25 a und 27 a und c die Bedingungen, wann ein gegebenes Viereck gleichzeitig einem Kreise ein- und einem Kreise um- oder angeschrieben werden kann.

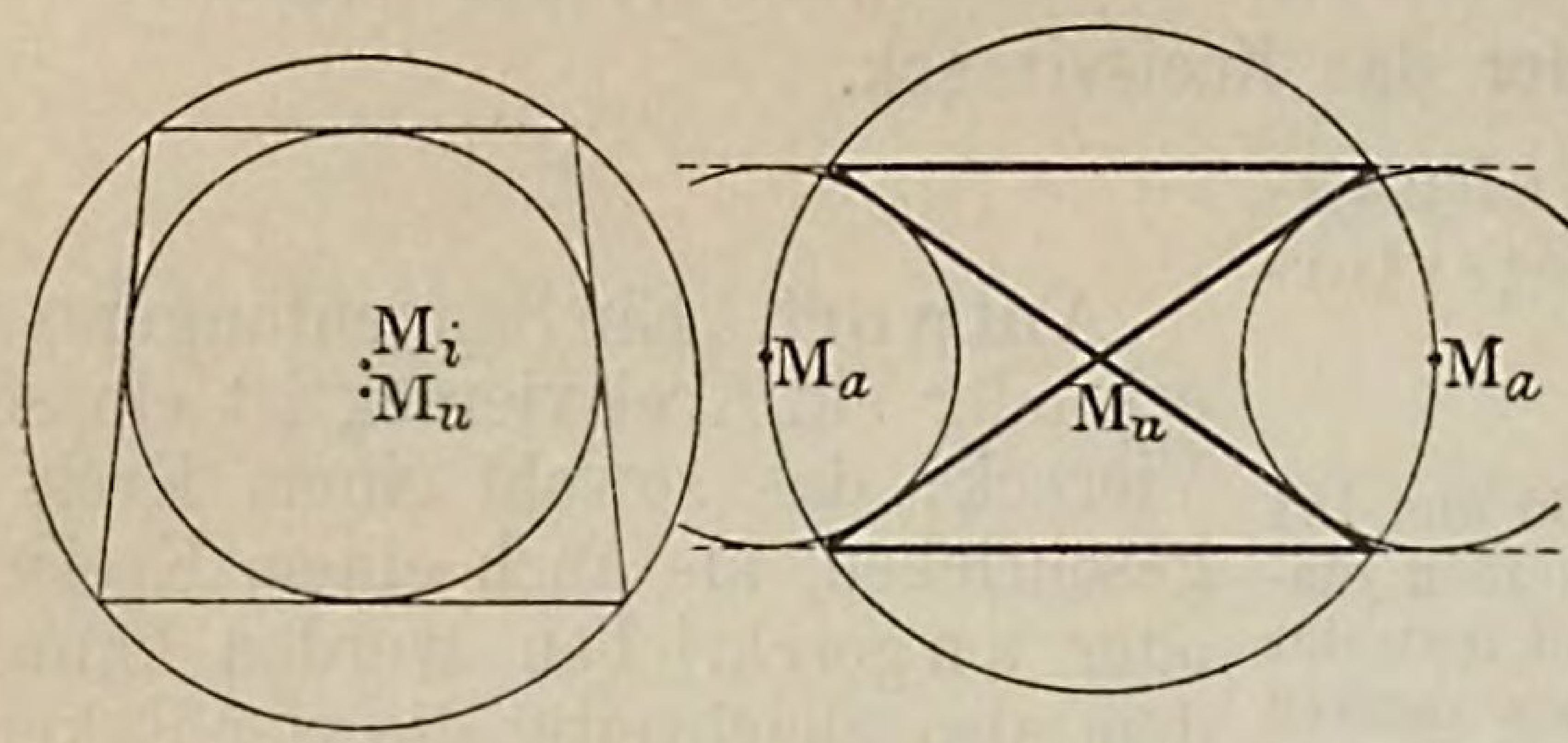
Antwort. Aus dem vorigen folgt, dass das Kreisviereck sowohl die Eigenschaft des Sehnenvierecks als diejenige des Tangentenvierecks in sich vereinigt. Man erhält also unter Zusammenfassung der Sätze 25 und 27 für das Kreisviereck (der ersten oder der zweiten Art, welche in Erkl. 197 erwähnt sind) folgende Aussagen:

Satz 28. In einem Kreisviereck gehen die Mittelsenkrechten der vier Seiten durch einen Punkt und die Halbierungslinien der vier Innen- (bezw. Aussen-) winkel durch einen Punkt, oder haben sowohl die vier Ecken als die vier Seiten je den gleichen Abstand von je demselben Punkte — und ist die Summe (bezw. Differenz) je zweier Gegenwinkel und je zweier Gegenseiten dieselbe — und umgekehrt.

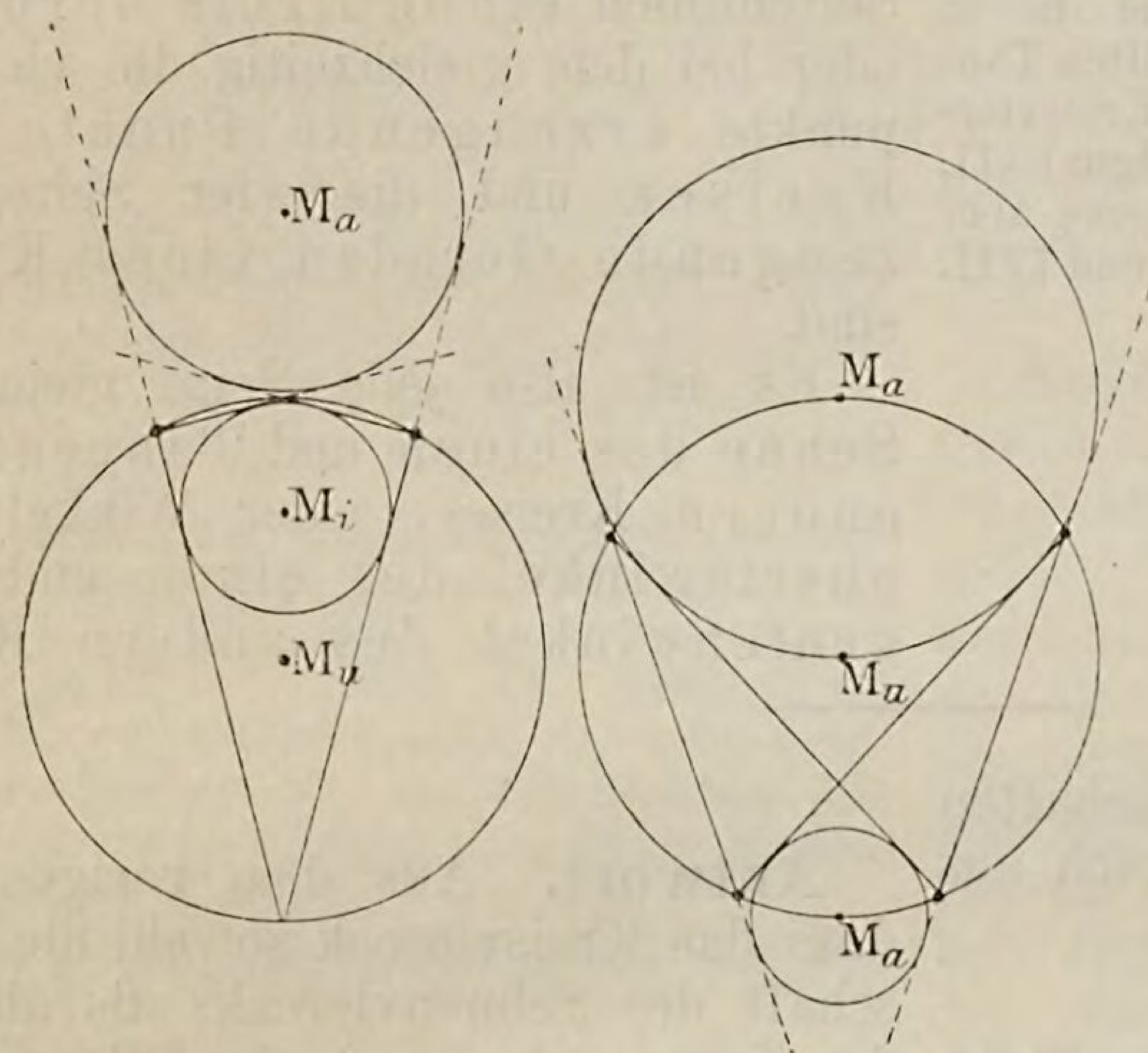
Frage 90. Welche Anwendungen des Satzes 28 ergeben sich aus den Antworten der Fragen 78 und 86 über die „besondern Vierecke“?

Antwort. 1) Ein Zusammentreffen der in Satz 28 ausgesprochenen Eigen-

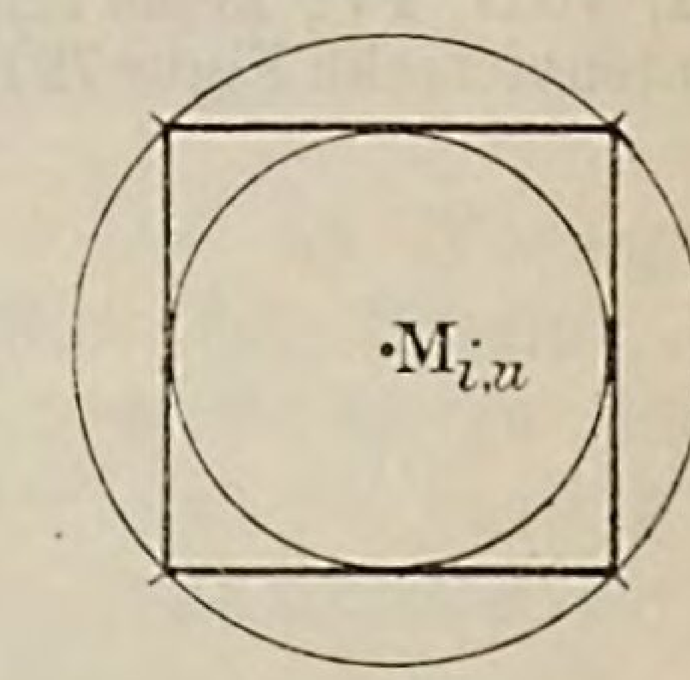
Figur 80.



Figur 81.



Figur 82.



Erkl. 199. Wie aus Antwort 86 mit Erkl. 193 und Figur 76 IV, 77, 80 und 81 hervorgeht, kann jenes als überschlagenes Antiparallelogramm bezw. als Deltoid erscheinende Kreisviereck in doppelter Weise als solches aufgefasst werden, indem es sowohl einen eingeschriebenen als einen angeschriebenen bezw. zwei angeschriebene Kreise zulässt.

Erkl. 200. Allgemeine Beziehungen zwischen Kreis und Vierecksarten finden sich auch noch im folgenden Abschnitt von dem Kreise mit den ihm um-, ein- oder angeschriebenen allgemeinen Vielecken.

schaften ist beim Trapez nicht möglich, ohne dass dasselbe seine Allgemeinheit verliert.

2) Das Antiparallelogramm ist schon im allgemeinen Falle ein Sehnenviereck, in dem besonderen Falle der Figur 76 III und IV ist es auch Tangentenviereck, also kann man sagen, dass ein Antiparallelogramm ein Kreisviereck wird (s. Figur 80), wenn die Mittellinie gleich der Schenkellänge oder gleich Null wird.

3) Das Deltoid ist schon im allgemeinen Falle ein Tangentenviereck, in dem besondern Falle der Figur 68 ist es auch Sehnenviereck, also kann man sagen, dass ein Deltoid ein Kreisviereck wird (siehe Figur 81), wenn es zwei rechte Winkel hat.

4) Besondere Erwähnung hat noch des in Figur 81 II dargestellten Vierecks zu geschehen, welches etwa als eine

Art von überschlagenem Deltoid anzusehen wäre und wie aus Figur 77 und 81 hervorgeht, ebenfalls Kreisviereck ist.

5) Das Parallelogramm konnte nur im Falle des Rechtecks ein Sehnenviereck und nur im Falle des Rhombus ein Tangentenviereck werden, also muss es ein Quadrat werden, um Kreisviereck zu sein (s. Figur 82). Jedes Quadrat besitzt also sowohl einen Umkreis als einen Inkreis, und zwar mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt.

Frage 91. Wieviel Stücke sind erforderlich zur Konstruktion bezw. Kongruenz von Kreisvierecken?

Antwort. Da im Kreisviereck sowohl Gegenwinkel als Gegenseiten je gleiche Summe (bezw. Differenz) bilden, so besitzt dasselbe nicht mehr drei unabhängige Winkel und nicht vier unabhängige Seiten, sondern nur noch zwei unabhängige Winkel und drei unabhängige Seiten, so dass von den fünf Bestimmungsstücken des allgemeinen Vierecks sowohl eine Winkelgrösse als eine Seitengrösse fortfallen. Es bleiben daher bei dem Kreisviereck nur noch drei willkürliche Bestimmungsstücke, auszuwählen aus drei Seiten und zwei benachbarten Winkeln — für Konstruierbarkeit bezw. Kongruenz.

Für jedes dieser Bestimmungsstücke kann dann wieder einer der Kreisradien eintreten, also auch beide Kreisradien mit einem dritten Stück vereint als Bestimmungsstücke auftreten.

Erkl. 201. Werden aus den sechs Fällen der Konstruktion des allgemeinen Vierecks je eine Winkelgrösse und eine Seitengrösse ausgeschieden, so verbleiben für Konstruktion und Kongruenz des Kreisvierecks folgende vier Fälle, nämlich mit gegebenen Stücken:

1) drei (also alle vier) Seiten,

2) zwei anliegende Seiten und ein (also zwei) Winkel,

3) zwei gegenüberliegende Seiten und ein (also zwei) Winkel,

4) eine Seite und zwei (also alle vier) Winkel.

Hier wie in den Erkl. 179 und 196 kann dann wieder unterschieden werden, welche Lage zu den gegebenen Seiten die gegebenen Winkel einnehmen.

6) Ueber einen Kreis in Verbindung mit einem Vieleck im allgemeinen.

a) Ueber das Sehnenvieleck und das Tangentenvielseit.

Frage 92. Was ist ein Sehnenvieleck und welches sind seine Eigenschaften?

Antwort. Ein Sehnenvieleck ist ein solches Vieleck, dessen sämtliche n Eckpunkte auf einem Kreise liegen. Seine sämtlichen n Seiten sind also Sehnen dieses Kreises, seine sämtlichen n Winkel Peripheriewinkel desselben; sämtliche n Eckpunkte haben gleichen Abstand von einem Mittelpunkte, sämtliche n Mittelsenkrechten

Erkl. 202. Die Richtigkeit der nebenstehenden Schlussfolgerung kann in folgender Weise eingehender dargethan werden: Bezeichnet man mit runden bezw. mit eckigen Klammern die zur ersten bezw. zweiten Summe gehörigen Posten, so erhält man für die geraden bezw. ungeraden Zahlen:

$(\tau_n + \tau_1)$
$[\tau_1 + \tau_2]$
$(\tau_2 + \tau_3)$
$[\tau_3 + \tau_4)$
$\vdots$

$(\tau_{n-4} + \tau_{n-3})$ bezw. $[\tau_{n-4} + \tau_{n-3}]$
$[\tau_{n-3} + \tau_{n-2}]$ $(\tau_{n-3} + \tau_{n-2})$
$(\tau_{n-2} + \tau_{n-1})$ $[\tau_{n-2} + \tau_{n-1}]$
$[\tau_{n-1} + \tau_n]$ $(\tau_{n-1} + \tau_n)$

Im erstern Falle enthält sowohl die Summe der runden Klammern, wie diejenige der eckigen Klammern alle Posten der Reihe τ_1 bis τ_n je einmal, nur die der runden den $\sphericalangle \tau_n$ als erstes, die der eckigen als letztes Glied. Im zweiten Falle erhält bei Weglassung der ersten die Summe der runden Klammern kein τ_1, die der eckigen kein τ_n, bei Zufügung der ersten aber die Summe der runden τ_n doppelt, die der eckigen kein τ_n, also entstehen wieder gleiche Summen, wenn man den $\sphericalangle \tau_n$ von der ersten zur zweiten Summe herübernimmt.

Erkl. 203. Statt gerade den Winkel α wegzulassen bezw. zu zerteilen, könnte man auch jeden andern Winkel in seine beiden Teilwinkel zerlegen. Allgemein könnte man die Ueberlegung so anstellen, dass man die Summe etwa aller positiv umlaufenen Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke gleichsetzt der Summe aller negativen. Diese Summen setzen dann die Innenwinkelsumme zusammen, wobei im geradzahligen n-Eck kein Rest bleibt, im ungeradzahligen n-Eck aber irgend einer der Winkel vereinzelt bleibt und in seine Teilwinkel zu zerlegen ist.

der Seiten gehen durch diesen einen Schnittpunkt als gemeinsame Spitze von n gleichschenkligen Dreiecken über jeder der n Seiten.

Bezeichnet man mit $\tau_1, \tau_2 \cdots \tau_n$ die Winkelgrössen der Basiswinkel der n gleichschenkligen Dreiecke über den n Seiten $a, b \cdots$, so erhält man:

$$\alpha = \tau_n - \tau_1, \ \beta = \tau_1 + \tau_2, \ \gamma = \tau_2 + \tau_3$$

und so weiter. Addiert man also die Winkel in der Reihenfolge:

$$\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta \cdots$$

und ebenso:

$$\beta + \delta + \zeta + \vartheta \cdots,$$

so entstehen die Summen:

$$(\tau_n + \tau_1) + (\tau_2 + \tau_3) + (\tau_4 + \tau_5) \cdots$$

und

$$(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_3 + \tau_4) + (\tau_5 + \tau_6) \cdots$$

Ist also n eine gerade Zahl, so erhält die Summe:

$$\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta \cdots$$

ebensoviele Posten von je zwei Gliedern, wie die Summe:

$$\beta + \delta + \zeta + \vartheta \cdots,$$

und beide Summen werden unmittelbar gleichgross. Ist aber n eine ungerade Zahl, so entstehen wieder gleichviele Posten und gleiche Summen, wenn man etwa den Posten:

$$\alpha = \tau_n + \tau_1$$

aus der ersten Summe wegnimmt, und in der Weise zerteilt, dass nur der $\sphericalangle \tau_1$ zur ersten Summe, dagegen der $\sphericalangle \tau_n$ zur zweiten Summe zugeteilt wird. Man erhält also den:

Satz 29. In jedem einem Kreise eingeschriebenen n-Eck sind die Winkelsummen:

$$\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta + \cdots = \beta + \delta + \zeta + \vartheta + \cdots,$$

nämlich gleich der halben Winkelsumme,

wobei man im ungeradzahligen Vieleck irgend einen der Winkel durch den Radius in zwei Teilwinkel zu teilen, und diese als Einzelglieder mit entsprechender Reihenfolge in jene Summe einzusetzen hat.

Frage 93. Was ist ein Tangentenvieleck, und welches sind seine Eigenschaften?

Antwort. Ein Tangentenvieleck ist ein solches Vieleck, dessen sämtliche Seiten einen Kreis berühren. Seine sämtlichen n Seiten sind also Tangenten dieses Kreises, seine sämtlichen n Winkel Tangentenwinkel, sämtliche n Seitenlinien haben gleichen senkrechten Abstand von einem Mittelpunkt, sämtliche n Halbierungslinien der Winkel gehen durch diesen einen Schnittpunkt als gemeinschaftliche Spitze von n Deltoiden über jedem der n Tangentenwinkel.

Bezeichnet man mit $t_1, t_2 \cdots t_n$ die Seitengrössen der Tangentenabschnitte der n Deltoide an den n Tangentenwinkeln $\alpha, \beta \cdots$, so erhält man:

$$a = t_1 + t_2, \; b = t_2 + t_3, \; c = t_3 + t_4 \cdots$$

und so weiter. Addiert man also die Seiten in der Reihenfolge:

$$a + c + e + g + \cdots$$

und ebenso:

$$b + d + f + h + \cdots,$$

so entstehen die Summen:

$$(t_1 + t_2) + (t_3 + t_4) + (t_5 + t_6) + \cdots$$

und

$$(t_2 + t_3) + (t_4 + t_5) + (t_6 + t_7) + \cdots$$

Ist also n eine gerade Zahl, so erhält die Summe:

$$a + c + e + g + \cdots$$

ebensoviele Posten von je zwei Gliedern, wie die Summe:

$$b + d + f + h + \cdots;$$

und beide Summen sind unmittelbar gleichgross. Ist aber n eine ungerade Zahl, so entstehen gleichviele Posten und gleiche Summen, wenn man etwa den letzten Posten $t_n + t_1$ aus der ersten Summe wegnimmt und in der Weise verteilt, dass nur t_n zur ersten Summe, dagegen t_1 zur zweiten Summe zugeteilt wird. Man erhält daher:

Satz 30. In jedem einem Kreise umgeschriebenen n-Eck sind die Seitensummen:

$$a + c + e + g + \cdots = b + d + f + h + \cdots,$$

nämlich gleich dem halben Umfange,

Erkl. 204. Man kann wieder, wie in Erkl. 202, mit geringer Abänderung die Anordnung der Gruppen anführen für gerades und ungerades n:

$$\begin{array}{ll}
(t_1 + t_2) & \\
[t_2 + t_3] & \\
(t_3 + t_4) & \\
(t_4 + t_5) & \\
\vdots & \\
[t_{n-4} + t_{n-3}] \text{ bezw. } & (t_{n-4} + t_{n-3}) \\
(t_{n-3} + t_{n-2}) & [t_{n-3} + t_{n-2}] \\
[t_{n-2} + t_{n-1}] & (t_{n-2} + t_{n-1}) \\
(t_{n-1} + t_n) & [t_{n-1} + t_n] \\
[t_n + t_1] & (t_n + t_1)
\end{array}$$

Im ersten Falle besteht unmittelbare Gleichheit beider Summen, im zweiten Falle ist die letzte Klammer zu verteilen, um dieselbe Gleichheit herzustellen.

Erkl. 205. Auch dieser Beweis kann wieder allgemein geführt werden, wie der vorige in Erkl. 203.

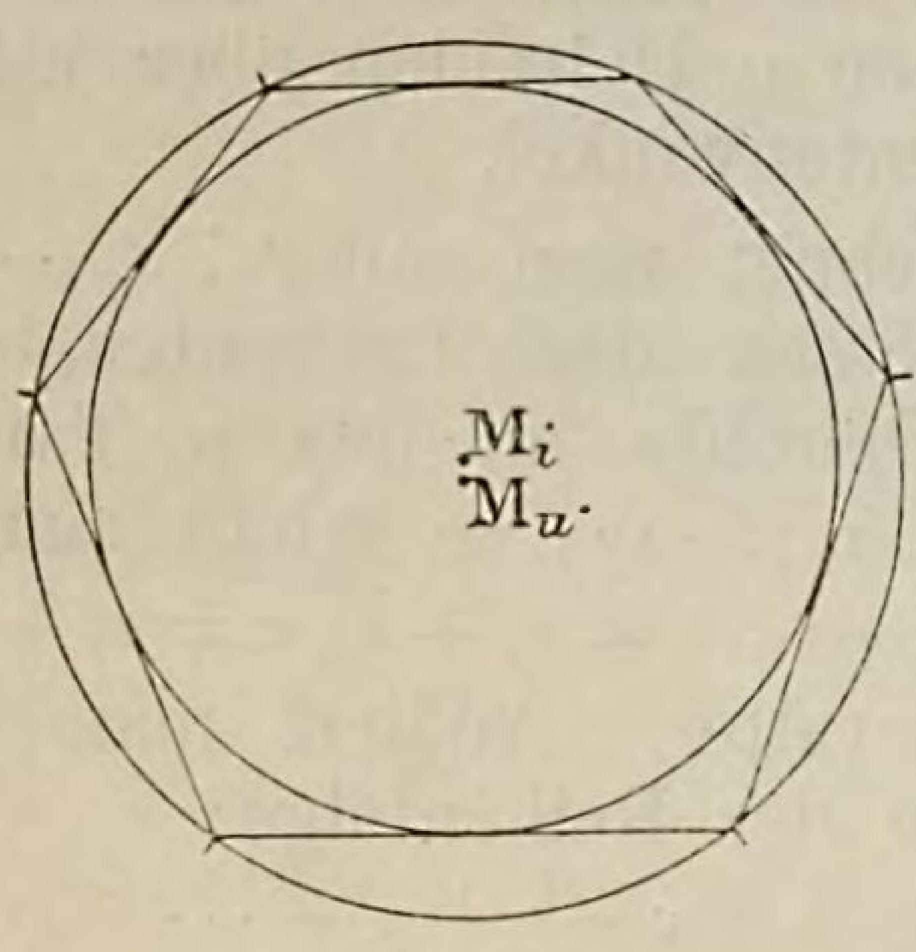
Und beide Beweise, nämlich für die Endergebnisse der Antworten 92 und 93 könnten statt auf die hier vorgeführte Weise, auch anders geführt werden, nämlich in Anknüpfung an das Bekanntsein dieser Sätze für das Viereck und mit Beweis der Allgemeingültigkeit durch den sogenannten Schluss von n auf $n+1$. Man vergleiche Aufgabe 146 der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles.

Erkl. 206. Die Anwendung der in den Antworten 92 und 93 bewiesenen Sätze für das einem Kreise ein- bezw. umgeschriebene Dreieck ist enthalten in den Ueberlegungen der Erkl. 167 und 186 und zu Figur 65 III und 73. Daselbst zeigte sich die Gültigkeit der Sätze 25 und 27 fürs Dreieck, wenn ein Winkel durch den Radius, bezw. eine Seite durch den Berührungspunkt in zwei Teilstücke zerlegt wurde.

wobei man im ungeradzahligen Vieleck irgend eine der Seiten durch den Berührungspunkt in zwei Teilstrecken zu teilen und diese als Einzelglieder mit entsprechender Reihenfolge in jene Summen einzusetzen hat.

Frage 94. Was ist ein Kreisvieleck und welches sind seine Eigenschaften?

Figur 83.



Erkl. 207. Ein Mittel, um ein Kreisviereck der in Figur 83 dargestellten Art zu konstruieren ist folgendes: In den vorhandenen Inkreis zeichne man erst ein beliebiges Sehnenviereck, und dann zu jeder seiner Seiten eine parallele Tangente an den Kreis. Dann ist letzteres Viereck jedenfalls ein Tangentenviereck, und wegen der parallelen Seiten zu denen des inneren Vierecks hat es auch gleiche Winkel, also gleiche Winkelsummen wie jenes.

Antwort. Ein Kreisvieleck ist ein solches Vieleck, bei dem sowohl sämtliche Eckpunkte auf einem Kreise liegen, also auch sämtliche Seiten einen Kreis berühren; sämtliche n Eckpunkte und n Seitenlinien haben je gleichen Abstand von je demselben Punkte, nämlich dem Mittelpunkte des Um- bezw. In- oder Ankreises, sämtliche n Mittelsenkrechten der Seiten und sämtliche n Halbierungslinien der Winkel gehen bezw. durch je einen dieser beiden Mittelpunkte. Es sind die Seitensummen:

$$a + c + e + g \cdots = b + d + f + h + \cdots$$

und die Winkelsummen:

$$\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta \cdots = \beta + \delta + \zeta + \vartheta + \cdots$$

einander gleich mit den obengenannten Beschränkungen beim ungeradzahligen n-Eck.

Die Mittelpunkte beider Kreise sind im allgemeinen Falle verschieden. Wenn ausnahmsweise beide zusammenfallen, so entstehen die sogenannten regelmässigen Vielecke oder die regulären Polygone, von denen im nächsten Abschnitte gehandelt wird.

Frage 95. Welchen Einfluss auf die Anzahl der willkürlichen Bestimmungsstücke hat die Eigenschaft eines Vielecks als Sehnenvieleck, Tangentenvieleck, Kreisvieleck?

Erkl. 208. Als Gruppen gegebener Stücke erhält man nach Nebenstehendem:

fürs Sehnenvieleck:

1) n Seiten und $n-4$ Winkel,
2) $n-1$ Seiten und $n-3$ Winkel,
3) $n-2$ Seiten und $n-2$ Winkel;

Antwort. Während im allgemeinen Vieleck nach Antwort der Frage 204 des III. Teiles $2n-3$ willkürliche Bestimmungsstücke bestehen, so bildet die Gleichheit zweier Winkelsummen bezw. Seitensummen im Sehnenvieleck bezw. Tangentenvieleck die Festlegung einer letzten Winkelgrösse bezw. Seitengrösse. Im Kreisvieleck trifft beides zusammen, und man erhält daher für ein:

fürs Tangentenvieleck:

1) $n-1$ Seiten und $n-3$ Winkel,

2) $n-2$ Seiten und $n-2$ Winkel,

3) $n-3$ Seiten und $n-1$ Winkel;

fürs Kreisvieleck:

1) $n-1$ Seiten und $n-4$ Winkel,

2) $n-2$ Seiten und $n-3$ Winkel,

3) $n-3$ Seiten und $n-2$ Winkel.

Während diese Beschränkungen bei der grossen Zahl der Bestimmungsstücke eines allgemeinen n-Ecks minder bedeutsam werden, sind sie beim Viereck schon unverhältnismässig stärker fühlbar, weil sie dort schon $\frac{1}{5}$ bezw. $\frac{2}{5}$ aller Stücke ausmachen.

eingeschriebenes n-Eck: $2n-4$ willkürliche Stücke aus $n-2$ Winkeln und n Seiten,

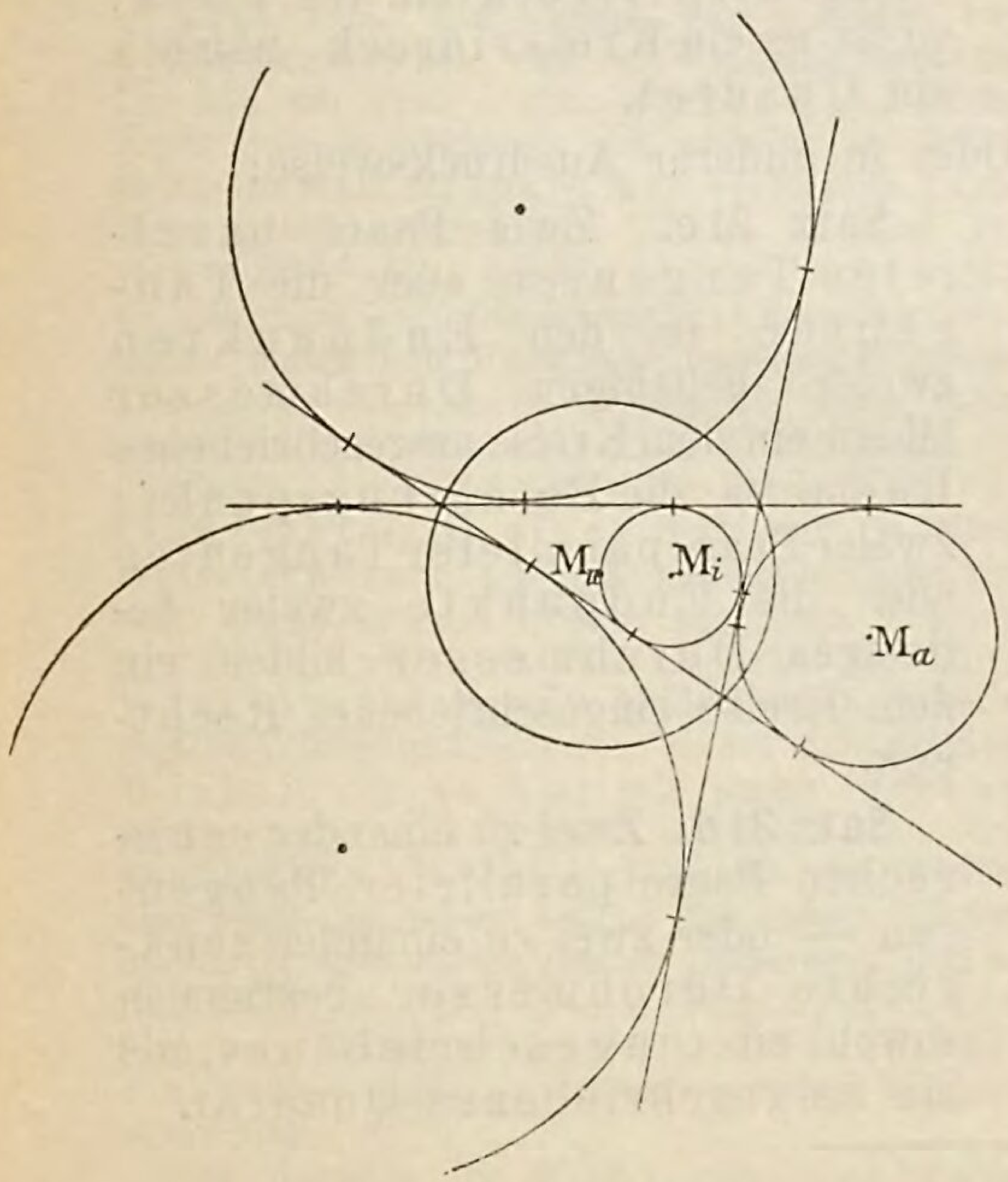
um- oder angeschriebenes n-Eck: $2n-4$ willkürliche Stücke aus $n-1$ Winkeln und $n-1$ Seiten,

Kreis-n-Eck: $2n-5$ willkürliche Stücke aus $n-2$ Winkeln und $n-1$ Seiten,

gültig für alle Zahlen n oberhalb 3.

Frage 96. Inwiefern bildet das Dreieck eine Ausnahme von den vorigen Ergebnisen?

Figur 84.



Antwort. Beim Dreieck ist es gar keine besondere Eigenschaft, dass es einem Kreise ein-, um- oder angeschrieben werden kann. Vielmehr ist schon jedes beliebige Dreieck ein „Kreisdreieck" (siehe Figur 84), indem es sowohl einem Kreise eingeschrieben, einem Kreise umgeschrieben und drei Kreisen angeschrieben werden kann. Daher kann es auch gar keine Beschränkung der Willkürlichkeit eines Dreiecks bilden, wenn eine dieser selbstverständlichen Eigenschaften noch besonders vorgeschrieben wird.

Erkl. 209. Von allen bisher betrachteten Figuren am Kreise ist das Dreieck die einzige allgemeine, welche sowohl Sehnenvieleck, als Tangentenvieleck ist (siehe Figur 84). Die noch dazukommende war nur das Quadrat, also der mit den meisten Besonderheiten ausgestattete Fall des Vierecks, welches ohne weitere Einzelbedingungen ein Kreisvieleck werden konnte (siehe Figur 82).

Frage 97. Welche Folgerungen ergeben sich aus den Antworten 93 bis 95 für das Viereck?

Antwort. Aus den Antworten 93 bis 95 ergeben sich als besondere Anwendungen die Eigenschaften einzelner Sehnen- oder Tangentenvierecke:

Satz 31. Ist ein Sehnenviereck ein Deltoid — oder ist ein Tangentenviereck ein Antiparallelogramm — so ist es ein Kreisviereck.

Satz 31a. Ist ein Sehnenviereck ein Parallelogramm, so ist es ein Rechteck; ist ein Tangentenviereck ein Parallelogramm, so ist es ein Rhombus; ist ein Kreisviereck ein Parallelogramm, so ist es ein Quadrat.

Satz 31b. Ist ein Sehnenviereck ein Rhombus, oder ist ein Tangentenviereck ein Rechteck, so ist es ein Kreisviereck, nämlich ein Quadrat.

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 31c. Zwei Paare paralleler Tangenten oder die Tangenten in den Endpunkten zweier beliebigen Durchmesser bilden ein dem Kreise umgeschriebenes Rhombus; die Berührungspunkte zweier Paare paralleler Tangenten oder die Endpunkte zweier beliebigen Durchmesser bilden ein dem Kreise eingeschriebenes Rechteck.

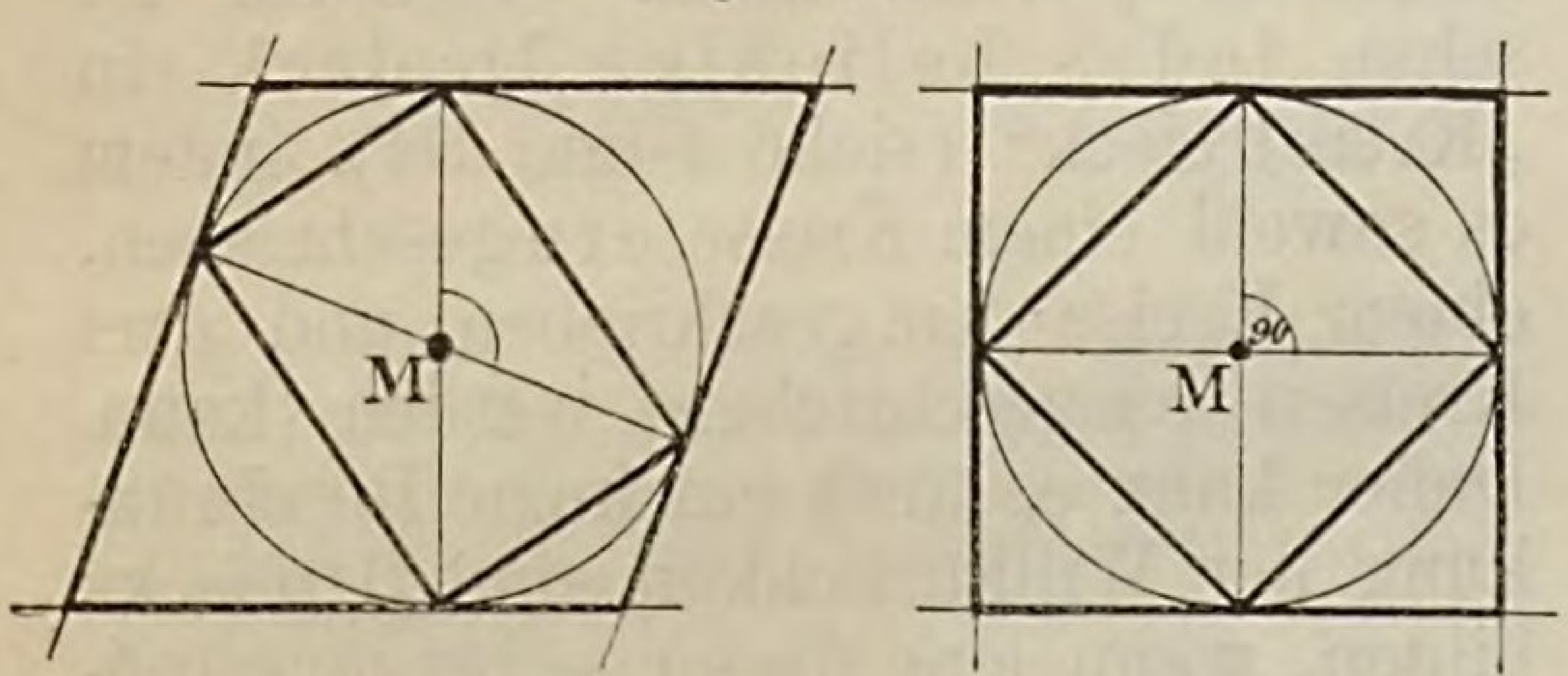
Satz 31d. Zwei zu einander senkrechte Paare paralleler Tangenten — oder zwei zu einander senkrechte Durchmesser bestimmen sowohl ein eingeschriebenes, als ein umgeschriebenes Quadrat.

Erkl. 210. Die Beweise der nebenstehenden Aussagen ergeben sich ohne weiteres aus den allgemeinen Sätzen: Ein Deltoid als Sehnenviereck hat einen Durchmesser als Diagonale, also rechte bezw. supplementäre Gegenwinkel; ein Antiparallelogramm als Tangentenviereck hat die Schenkelsumme gleich der Grundseitensumme.

Ein Parallelogramm als Sehnenviereck hat supplementäre und gleichgrosse Gegenwinkel, also Rechte; ein Parallelogramm als Tangentenviereck hat gleiche Summen der gleichen Gegenseiten, also nur gleiche Seiten; ein Parallelogramm als Kreisviereck hat rechte Winkel und gleiche Seiten.

Ein Rhombus als Sehnenviereck muss auch rechte Winkel haben, ein Rechteck als Tangentenviereck muss auch gleiche Seiten erhalten.

Figur 85.



Erkl. 211. Parallele Tangentenpaare sind nach Satz 12 die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers; sie bilden jedenfalls ein umgeschriebenes Parallelogramm. Damit in diesem, als einem Tangentenvierseit, die Gegenseiten gleiche Summen ergeben können, müssen alle vier Seiten gleich sein. — Im Viereck der Endpunkte zweier Durchmesser ist jeder Winkel Peripheriewinkel über dem Durchmesser, also ein rechter. — Erhält das erstgenannte Rhombus senkrechte Seiten, oder das letztgenannte Rechteck senkrechte Diagonalen, so wird jedes dieser Vierecke zum Quadrat.

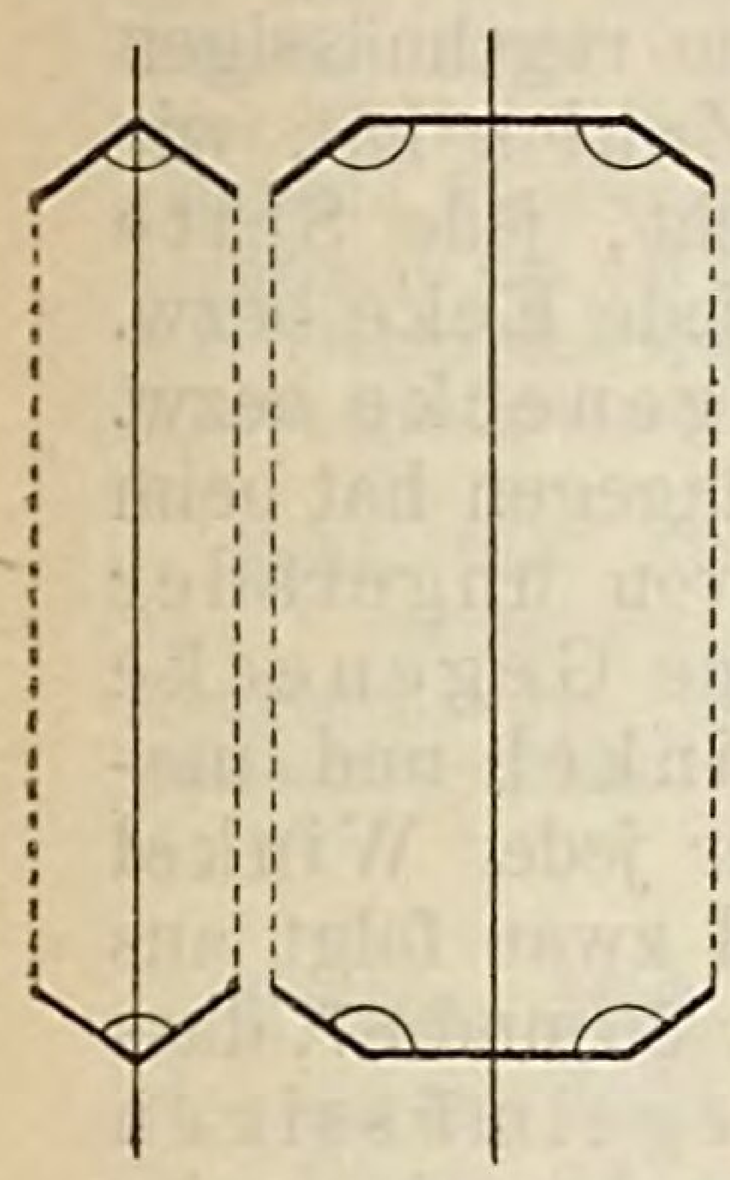
b) Ueber die regelmässigen Vielecke.

Frage 98. Was ist ein regelmässiges Vieleck oder ein reguläres Polygon?

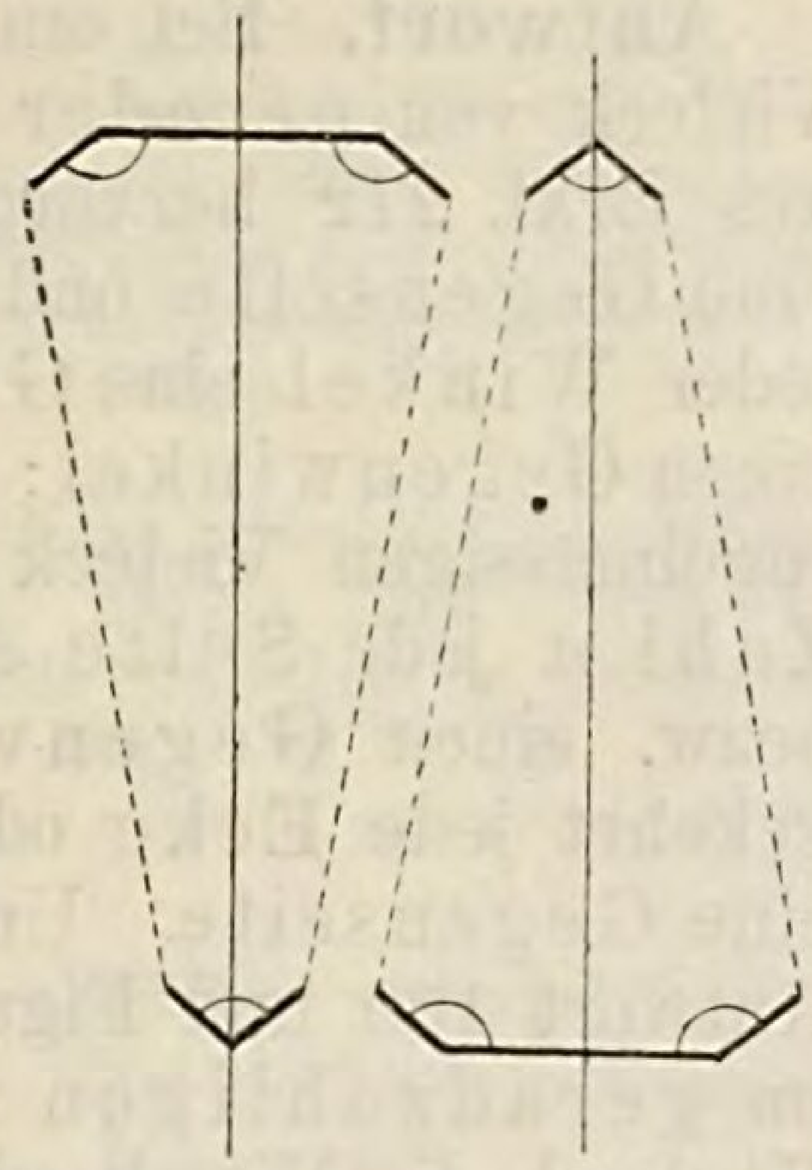
Antwort. Unter einem regelmässigen Vieleck versteht man ein solches Vieleck, in welchem sowohl alle Seiten unter sich, als auch alle Winkel unter sich gleichgross sind.

Frage 99. Welche Symmetrieeigenschaften des regelmässigen Vielecks folgen aus seiner Definition und in Berücksichtigung der Antworten der Fragen 210 bis 212 des III. Teiles?

Figur 86.



Figur 87.



Erkl. 212. Ein Vieleck von n Seiten hat n Mittelsenkrechte und n Winkelhalbierende. Ist nun die Zahl n eine gerade Zahl (siehe Figur 86), so schliessen sich an eine als Achse gewählte Mittelsenkrechte beiderseits paarweise gleiche Seiten und Winkel an, bis auf eine letzte Seite, die als nte mit jener ersten zu paaren wäre. Die Endpunkte derselben sind aber symmetrische Punkte beiderseits der Achse, also muss die Achse, welche die erste Seite senkrecht halbierte, auch diese letzte senkrecht halbieren. Und so fällt jede der n Mittelsenkrechten je einer Seite mit je einer Mittelsenkrechten einer gegenüberliegenden Seite zusammen. Ebenso schliessen sich bei gerader Zahl n an eine als Achse gewählte Winkelhalbierende beiderseits paarweise gleiche Winkel und Seiten an, bis auf einen letzten Winkel, der als nter mit jenem ersten zu paaren wäre. Die Schenkel desselben sind aber symmetrische Geraden beiderseits der Achse, also muss die Achse, welche den ersten Winkel halbierte, auch diesen letzten halbieren. Und es fällt auch jede der n Winkelhalbierenden je eines Winkels mit je einer Winkelhalbierenden eines gegenüberliegenden Winkels zusammen.

Ist dagegen die Zahl n eine ungerade Zahl (siehe Figur 87), so schliessen sich an eine als Achse gewählte Mittelsenkrechte beiderseits paarweise gleiche Seiten und Winkel an, bis auf einen letzten Winkel, der als nter keinen paarig entsprechenden besitzt. Da aber dessen Schenkel symmetrische Geraden beiderseits der Achse sind, so muss die Achse, welche die erste Seite senkrecht halbierte, auch diesen letzten Winkel halbieren. Und es fällt jede der n Mittelsenkrechten je einer Seite mit je einer Winkelhalbierenden eines gegen-

Antwort. Wenn man in einem regelmässigen Vieleck irgend eine der Mittelsenkrechten einer Seite oder irgend eine der Halbierungslinien eines Winkels als Achse herausgreift, so schliessen sich beiderseits derselben lauter symmetrische Stücke an, nämlich zuerst gleiche Seiten bezw. Winkelhälften, dann lauter gleichgrosse Winkel bezw. Seiten. Daher ist im regelmässigen Vieleck jede Mittelsenkrechte und auch jede Winkelhalbierende eine Symmetrieachse.

Aus Satz 97 des III. Teils folgt daher unmittelbar:

Satz 32. In jedem regelmässigen Vieleck gehen sämtliche Mittelsenkrechten und sämtliche Winkelhalbierenden durch einen und denselben Punkt, den Mittelpunkt des Vielecks; derselbe hat gleichen Abstand von allen Ecken und gleichen Abstand von allen Seiten des Vielecks, ist also zugleich Mittelpunkt eines dem regelmässigen Vieleck umgeschriebenen Kreises und eines demselben eingeschriebenen Kreises.

Satz 32 a. Das regelmässige n-Eck hat n Symmetrieachsen, nämlich jede der zu je zweien zusammenfallenden Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden. Je zwei benachbarte Achsen bilden einen Winkel von $\frac{180^0}{n}$, und durch Umdrehung um einen Winkel von $\frac{360^0}{n}$ kommt die ganze Figur mit sich selbst zur Deckung.

überliegenden Winkels zusammen; und ebenso ist rückwärts von einer Winkelhalbierenden zu schliessen, dass sie mit der Mittelsenkrechten ihrer gegenüberliegenden Seite zusammenfällt.

Frage 100. Welche Anwendung erfahren die Begriffe Gegenseite und Gegenecke bezw. Gegenwinkel beim regelmässigen Vieleck?

Antwort. Bei einem regelmässigen Vieleck von gerader Zahl n hat, wie aus Erkl. 212 hervorgeht, jede Seite eine Gegenseite und jede Ecke bezw. jeder Winkel eine Gegenecke bezw. einen Gegenwinkel; dagegen hat beim regelmässigen Vieleck von ungerader Zahl n jede Seite eine Gegenecke bezw. einen Gegenwinkel und umgekehrt jede Ecke oder jeder Winkel eine Gegenseite. Und zwar folgt aus Antwort 100 und Figur 86 und 87, dass im geradzahligen regelmässigen Vieleck die Mittelsenkrechten je zweier Gegenseiten und ebenso die Halbierungslinien je zweier Gegenwinkel zusammenfallen, dass also je zwei Gegenseiten parallel sind; — dass dagegen im ungeradzahligen regelmässigen Vieleck je zwei ungleichartige dieser Linien zusammenfallen, nämlich je eine Mittelsenkrechte und eine Winkelhalbierende an Gegenseite und Gegenecke.

Erkl. 213. In weiterer Ausführung der Erkl. 212 und der nebenstehenden Antwort könnte man folgende Aussagen formulieren:

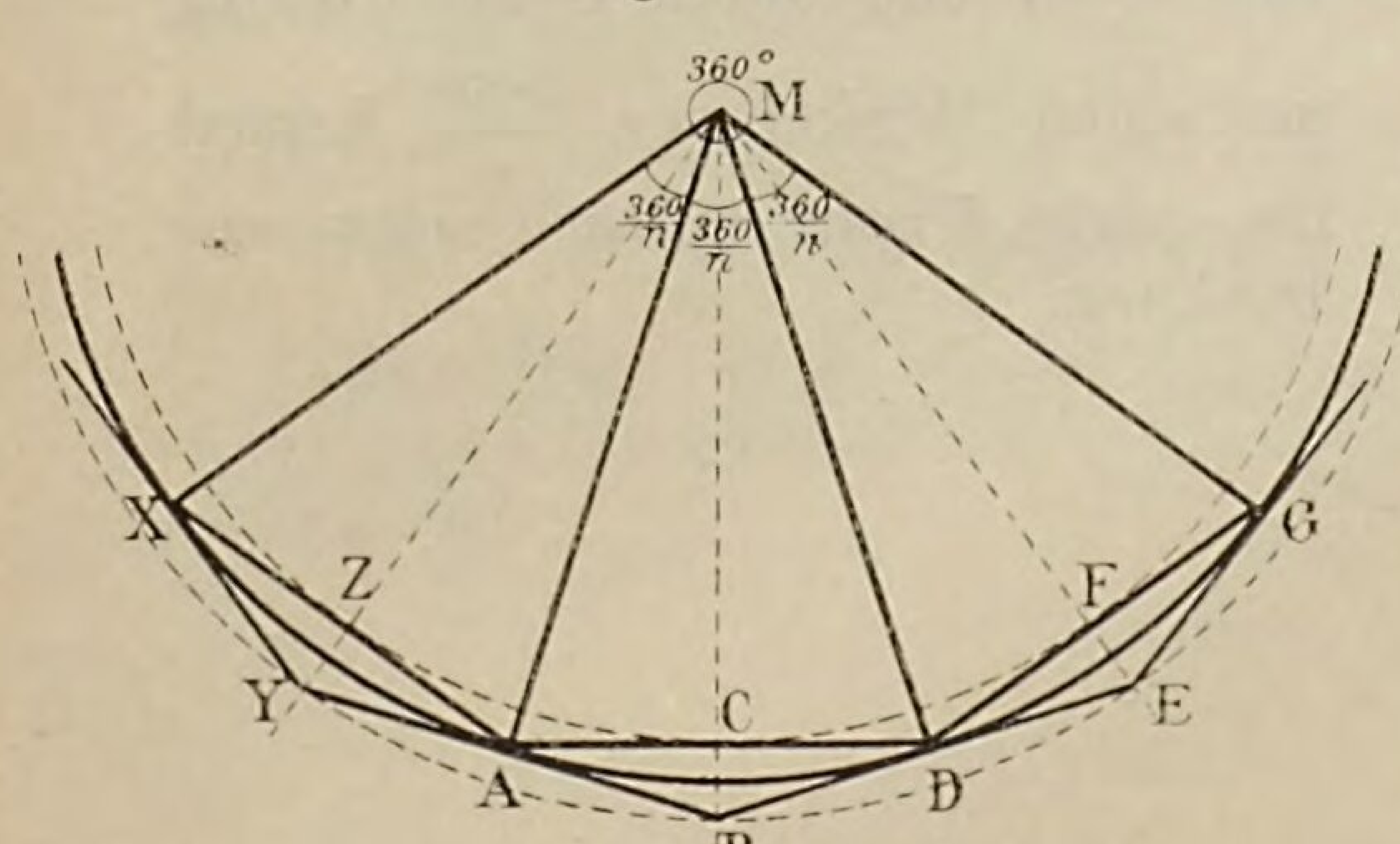
Im geradzahligen regelmässigen Vieleck — ist eine Senkrechte vom Mittelpunkt auf eine Seite oder die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit einer Seitenmitte zugleich Mittelsenkrechte dieser und der Gegenseite — oder geht die Verbindungslinie einer Seitenmitte mit der Mitte der Gegenseite durch den Mittelpunkt und ist Symmetrieachse sowie Mittelsenkrechte beider Gegenseiten — oder geht eine Winkelhalbierende oder die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit einer Ecke durch die Gegenecke sowie durch den Mittelpunkt, halbiert beide Gegenwinkel und ist Symmetrieachse — oder geht die Verbindungslinie zweier Gegenecken durch den Mittelpunkt und halbiert beide Gegenecken — u. s. w.

Im ungeradzahligen regelmässigen Vieleck ist die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit einer Seitenmitte zugleich Mittelsenkrechte, geht durch die Gegenecke und halbiert deren Winkel — oder ist die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit einer Ecke zugleich Winkelhalbierende ihres Winkels und Mittelsenkrechte ihrer Gegenseite — oder geht die Verbindungslinie einer Seitenmitte mit ihrer Gegenecke durch den Mittelpunkt, ist Symmetrieachse sowie Mittelsenkrechte jener Seite und Winkelhalbierende ihres Gegenwinkels — u. s. w.

Frage 101. Wie kann man sich ein regelmässiges Vieleck entstanden denken?

Antwort. Ein regelmässiges Vieleck kann man sich in folgender doppelten Weise entstanden denken (s. Figur 88): In einem Kreise teile man den Winkelraum von 360^0 um den Mittelpunkt durch n Radien in n gleiche Teile von je $\frac{360^0}{n}$, und betrachte dann entweder die ausgeschnittenen Kreispunkte als Ecken eines Vielecks, oder die Tangenten in diesen Kreispunkten als Seiten eines Vielecks. Das erstere Vieleck wird ein eingeschriebenes n-Eck, das letztere ein umgeschriebenes n-Seit. Dass beide lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel besitzen, beweist eine

Figur 88.



Erkl. 214. Denkt man sich bei der Umdrehung um $\frac{360^0}{n}$ den von zweien der Radien ausgeschnittenen Figurenteil als Ganzes, so erkennt man beim eingeschriebenen n-Eck die Deckung jeder Seite mit der nächsten, beim umgeschriebenen die Deckung jedes Winkels. Fasst man dann beim eingeschriebenen Vieleck das aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, bezw. beim umgeschriebenen das aus zwei Winkeln und der zwischenliegenden Seite gebildete Figurenstück als Ganzes auf, so erkennt man bei der Umdrehung auch die Deckung der Winkel des eingeschriebenen und der Seiten des umgeschriebenen Vielecks.

Erkl. 215. Derselbe Beweis der Seiten- und Winkelgleichheit könnte auch durch die Kongruenz der jeweils einander benachbarten Dreiecke geführt werden.

Umdrehung der Figur um den Mittelpunkt um den Betrag von $\frac{360^0}{n}$. Dadurch fällt jeder Radius auf den folgenden, also jede Ecke und Seite und Winkel eines der beiden Vielecke auf das nächstfolgende Element; und daher sind sämtliche Seiten und Winkel gleich, da durch wiederholte Umdrehungen jedes dieser Elemente mit jedem andern zur Deckung gebracht werden kann.

Frage 102. Welche weitere Beziehungen haben die beiden Vielecke der Figur 88 zum Kreise?

Erkl. 216. Man bezeichnet die beiden Radien eines regelmässigen Vielecks mit feststehenden Zeichen, nämlich den grossen Radius mit r, den kleinen mit ϱ, auch die Seiten mit S oder s. Durch einen Index wird dann beigefügt, welches die Ecken- bezw. Seitenzahl des betrachteten Vielecks ist. So bezeichnet man z. B.:

mit r_5 den grossen Radius eines regelmässigen Fünfecks,

mit ϱ_{10} den kleinen Radius eines regelmässigen Zehnecks,

mit s_n die Seite eines regelmässigen n-Ecks, das einem gegebenen Kreise eingeschrieben ist,

mit S_{2n} die Seite eines regelmässigen $2n$-Ecks, das einem gegebenen Kreise umgeschrieben ist.

In Figur 88 wäre also:

$s_n = AD = DG = \cdots XA$; $S_n = YB = BE$; und für das erstere Vieleck $r_n = MA$, $\varrho_n = MC$; für das letztere Vieleck $r_n = MB$, $\varrho_n = MA$.

Erkl. 217. Betrachtet man das Vieleck $ADG \cdots X$ in Bezug auf den Kreis der Punkte ZCF, so sind AZ und AC, DC und DF Tangenten vom gleichen Punkte, das Vieleck $ADG \cdots X$ wird das umgeschriebene Vieleck dieses Kreises. Ebenso entstehen beim Vieleck YBE in Bezug auf den Kreis der Punkte YBE als Radien die Strecken MY, MB, MC; man erhält die Dreiecke MYB, MBE mit Höhen MA und MD, als Winkelhalbierenden der vorigen Radien.

Erkl. 218. Für die gewöhnliche Anwendung wird von den beiden Arten der Entstehung des Vielecks meist nur die eine, nämlich die erste

Antwort. In dem eingeschriebenen Vieleck $ADG \cdots X$ entstehen gleichschenklige Dreiecke über den Seiten mit gemeinsamer Spitze M; die Höhen derselben sind die Winkelhalbierenden der Radien, haben also gleiche Länge $MC = MF = \cdots MZ$. Ein Kreis um M mit dieser Länge als Radius berührt also jede der Seiten des Vielecks im Mittelpunkte C, $F \cdots Z$. Dieser Kreis ist der eingeschriebene Kreis des Vielecks, der ursprüngliche sein umgeschriebener Kreis. Man nennt den Radius des umgeschriebenen Kreises auch den grossen Radius des Vielecks, den des eingeschriebenen Kreises den kleinen Radius des Vielecks.

In dem umgeschriebenen Vieleck $BE \cdots Y$ sind etwa AB und DB Tangenten in den Kreispunkten A und D, also muss ihr Schnittpunkt B nach Satz 13 auf der Winkelhalbierenden des Mittelpunktswinkels AMD liegen, also auf der Verlängerung der Winkelhalbierenden MC. Diese Strecke MB aber gelangt bei der Umdrehung zur Deckung mit der Strecke $ME \cdots MY$, also sind auch die Längen $MB = ME = \cdots MY$; und ein Kreis um M mit dieser Länge als Radius geht durch jede der Ecken des Vielecks $BE \cdots Y$. Dieser Kreis ist also für das neue Vieleck der umgeschriebene

gebraucht. Man erzeugt also ein gefordertes Vieleck als eingeschriebenes Vieleck eines Kreises mit beliebig gewähltem Radius.

Kreis, der ursprüngliche der eingeschriebene, oder es ist:

$$MB = ME = \cdots MY$$

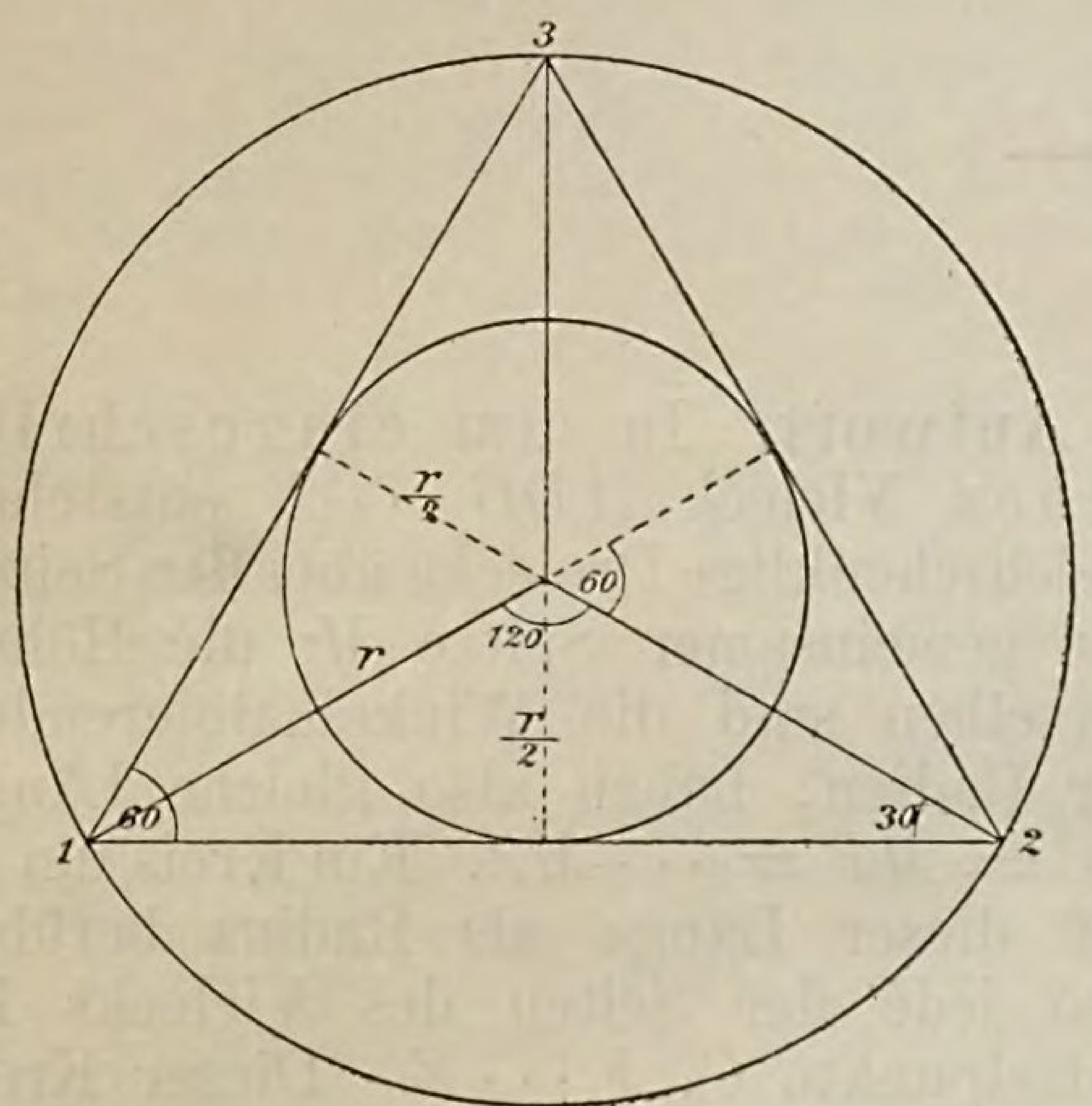
sein grosser Radius,

$$MA = MD = MG = \cdots MX$$

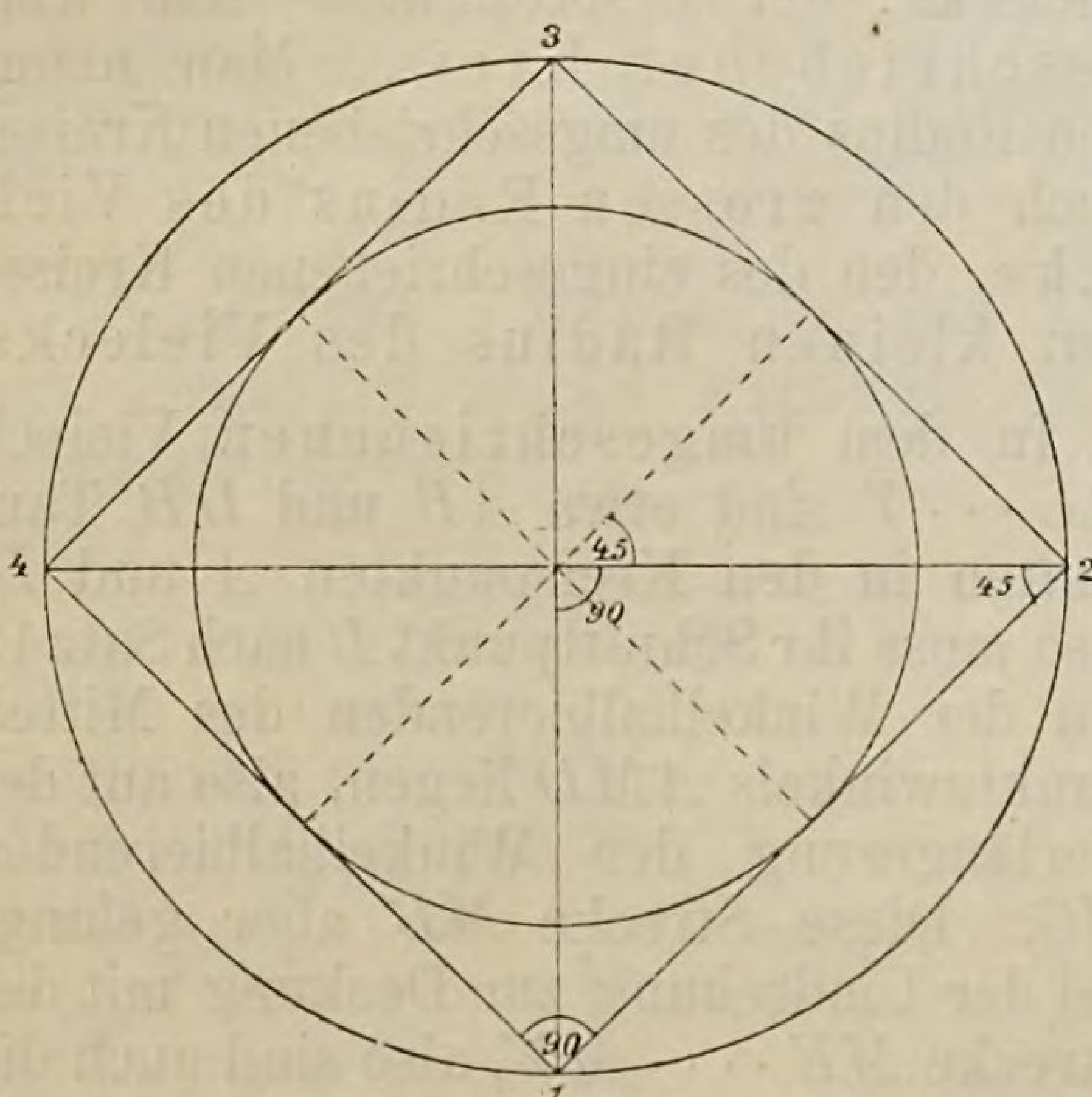
sein kleiner Radius.

Frage 103. Wie gestaltet sich die Anwendung der bisherigen Ergebnisse auf die einfachsten Fälle der regelmässigen Vielecke?

Figur 89.



Figur 90.



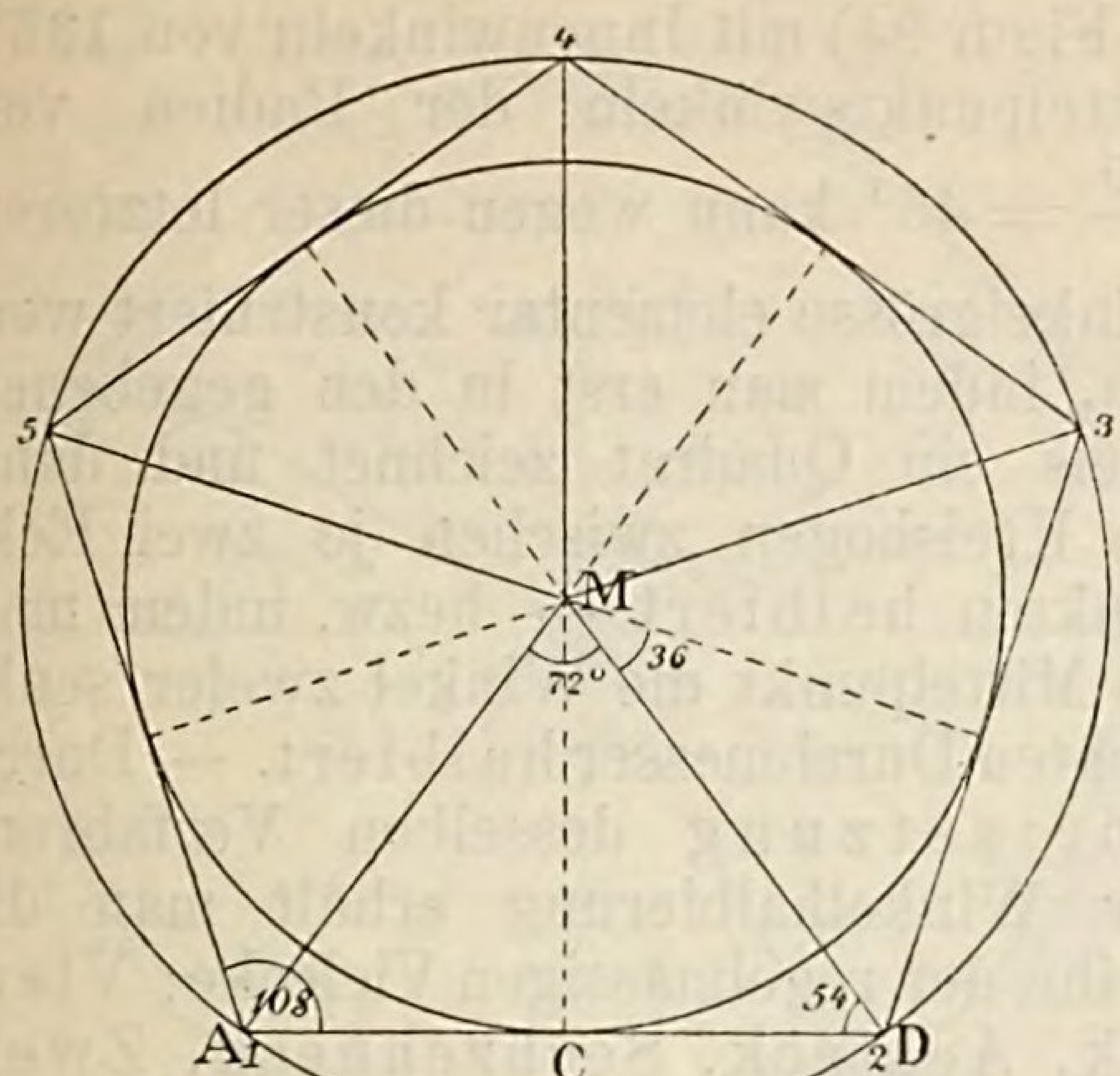
Antwort. Wenn die Zahl n die Reihe der Zahlen von 3 an durchläuft, so erhält man folgende Einzelfälle:

a) Das regelmässige Dreieck ist das gleichseitige Dreieck (siehe Figur 89). Dasselbe hat drei gleiche Seiten und drei gleiche Winkel von 60^0. Der Mittelpunktswinkel seiner Radien ist $\frac{360}{3} = 120^0$. Sein grosser Radius ist zwei Dritteile, der kleine Radius ein Dritteil der Höhe des Dreiecks, es ist nämlich jeder „obere Höhenabschnitt" ein grosser, jeder „untere Höhenabschnitt" ein kleiner Radius. Daher ist der grosse Radius kleiner als die ganze, aber grösser als die halbe Dreiecksseite, der kleine aber kleiner als die halbe Dreiecksseite.

b) Das regelmässige Viereck ist das Quadrat (siehe Figur 90). Dasselbe hat vier Winkel von 90^0, zum Mittelpunktswinkel der Radien ebenfalls $\frac{360}{4} = 90^0$. Der grosse Radius ist gleich der Hälfte der Diagonale, also wieder kleiner als die ganze, aber grösser als die halbe Vierecksseite. Der kleine Radius ist gleich der Hälfte der Mittelparallelstrecke, also gleich der halben Vierecksseite.

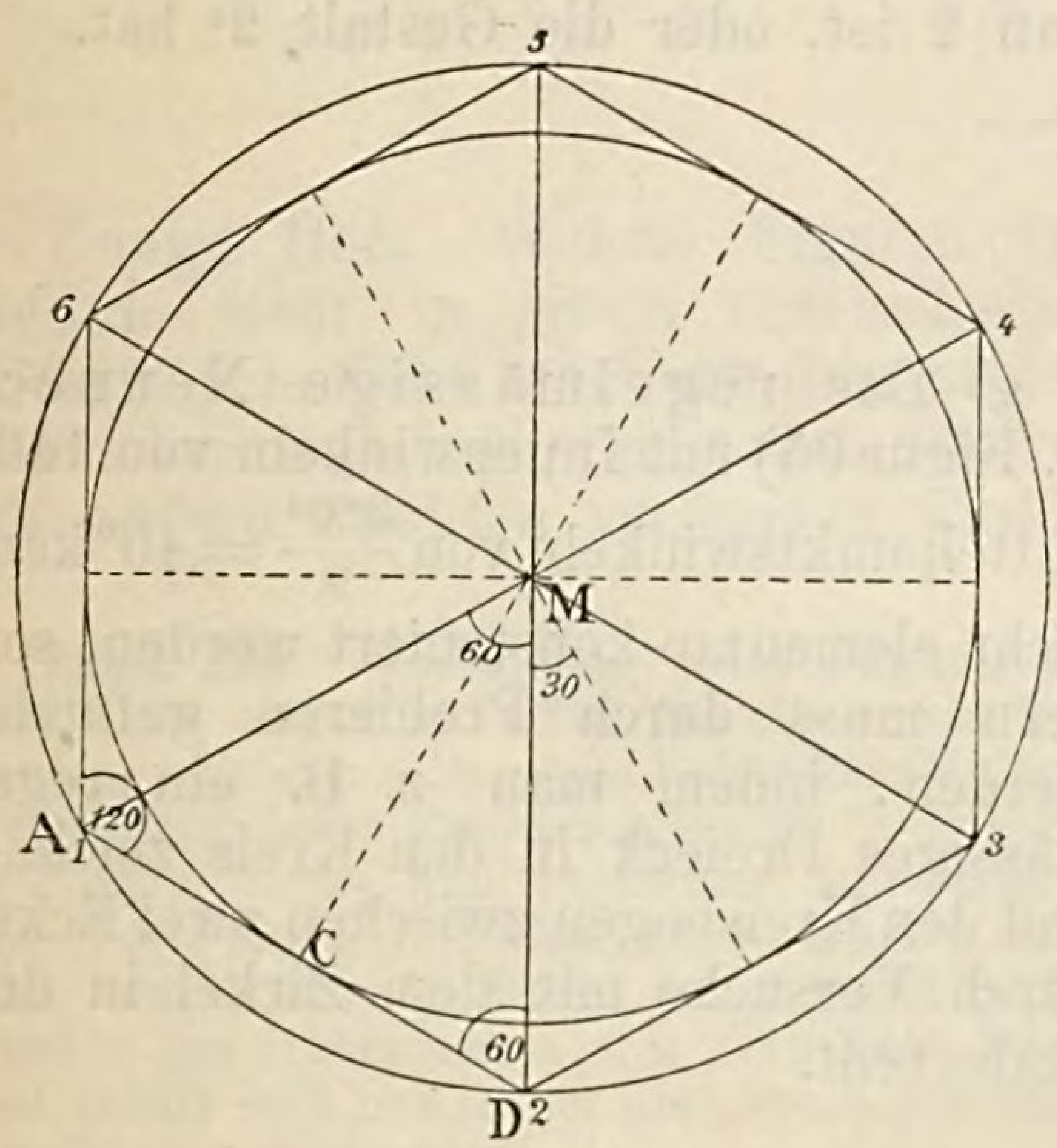
c) Das regelmässige Fünfeck (s. Figur 91) hat Innenwinkel von 108^0, der Mittelpunktswinkel der Radien ist $\frac{360^0}{5} = 72^0$. Der grosse Radius ist,

Figur 91.



wie immer, grösser als die halbe Vielecksseite, aber wegen der Winkel 72⁰, 54⁰, 54⁰ des Dreiecks MAD noch nicht so gross als die ganze Seite; der kleine Radius ist wegen der Winkel 36⁰, 54⁰, 90⁰ des Dreiecks MAC jetzt grösser als die halbe Vielecksseite. — Das regelmässige Fünfeck kann mit den Hilfsmitteln der bisherigen Ergebnisse der Elementargeometrie nicht konstruiert werden, sondern erst mittels der im VI. Teile dieses Lehrbuches zu gewinnenden Kenntnisse durch Anwendung der Lehre von der Proportionalität ähnlicher Figuren.

Figur 92.

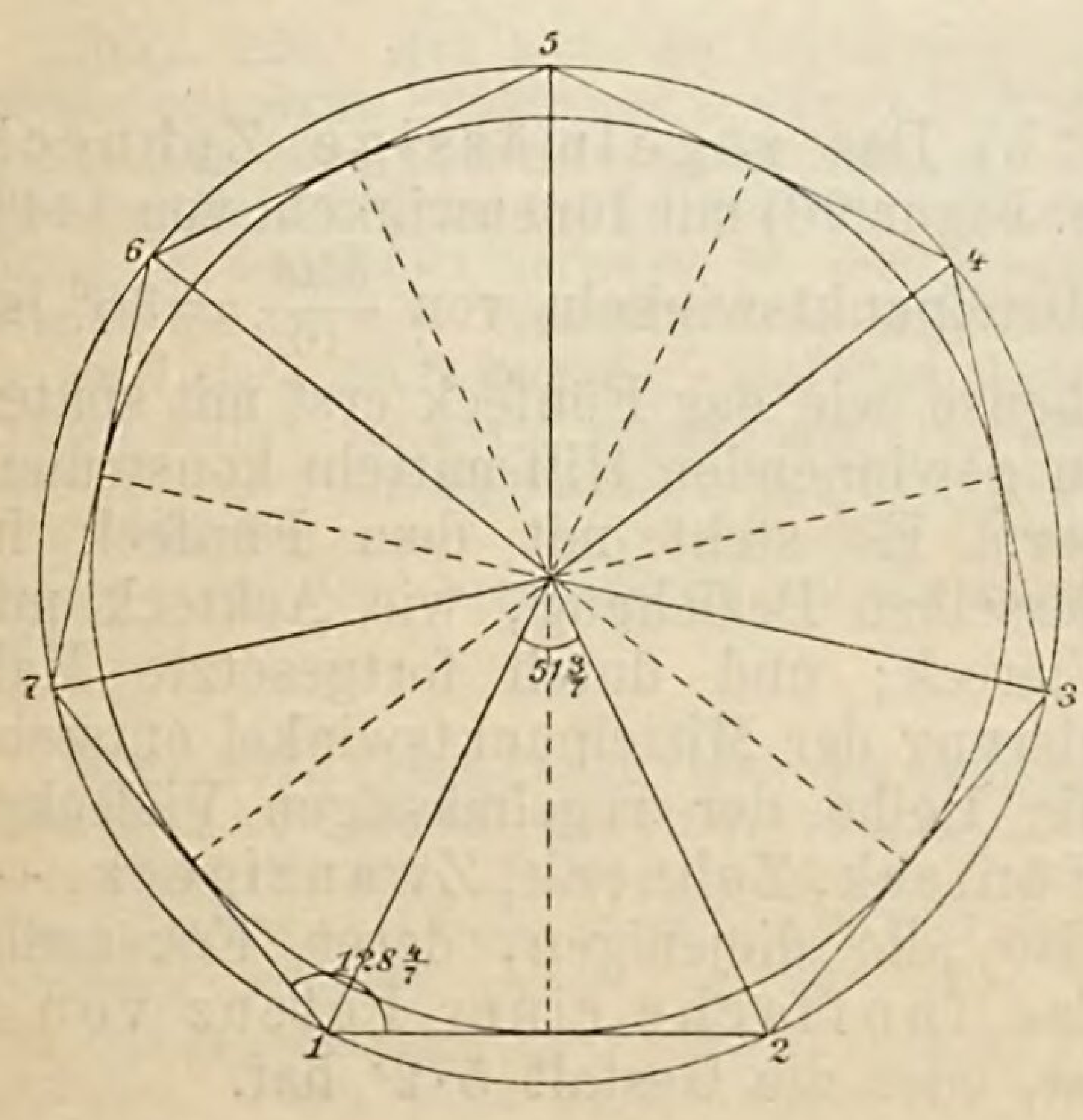


d) Das regelmässige Sechseck (s. Figur 92) hat Innenwinkel von 120⁰, der Mittelpunktswinkel der Radien ist $\frac{360}{6} = 60^0$. Daher hat das Dreieck ADM drei gleiche Winkel von 60⁰, und dadurch auch drei gleiche Seiten:

$$AD = AM = DM.$$

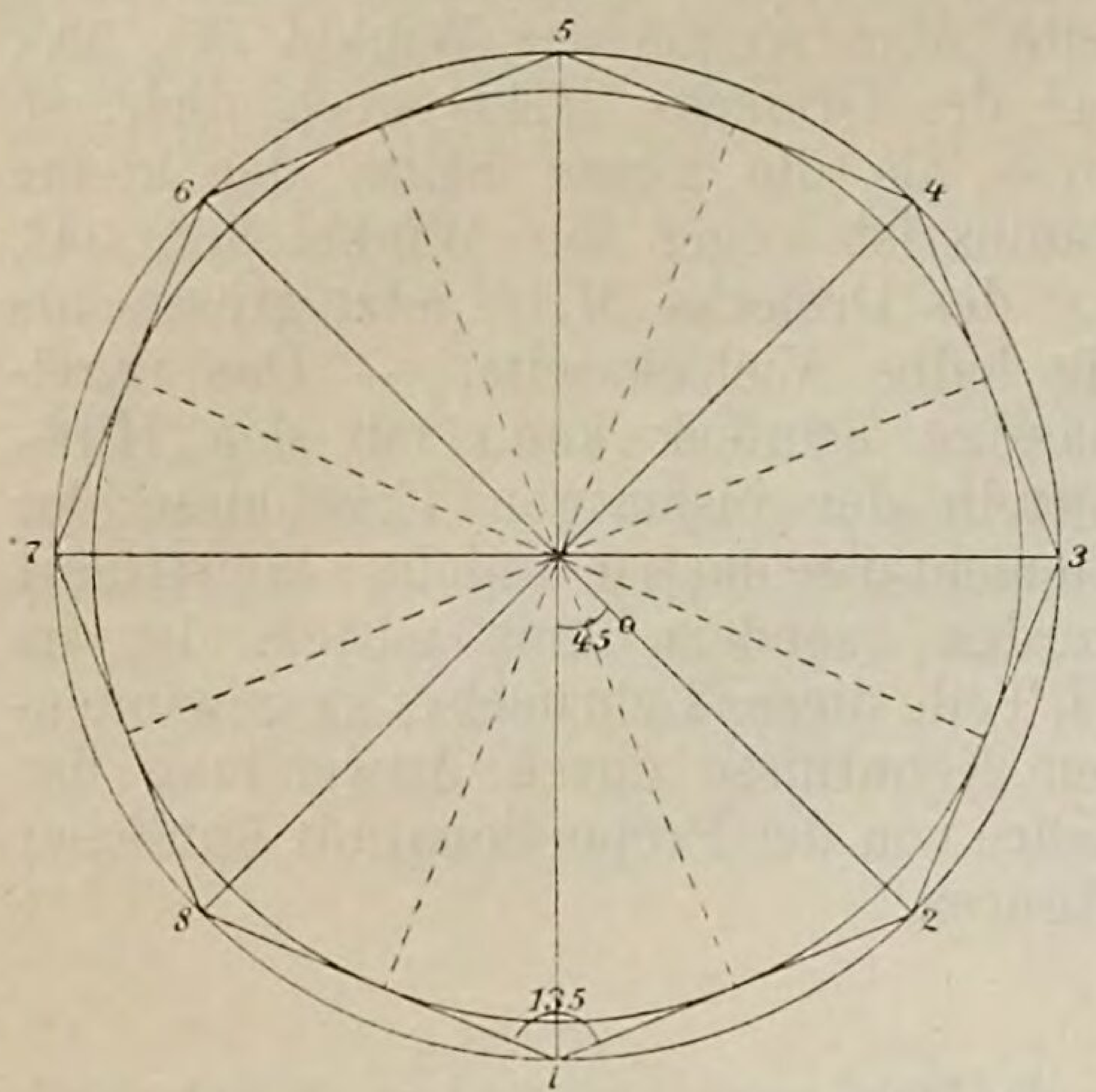
Also ist beim regelmässigen Sechseck der grosse Radius gleich der Sechsecksseite, oder umgekehrt: die Seite des regelmässigen Sechsecks ist gleich dem Radius des umgeschriebenen Kreises. Der kleine Radius ist grösser als die halbe Vielecksseite. — Jede Seite des regelmässigen Sechsecks ist ihrer Gegenseite parallel, ebenso wie dies beim Quadrat der Fall war.

Figur 93.



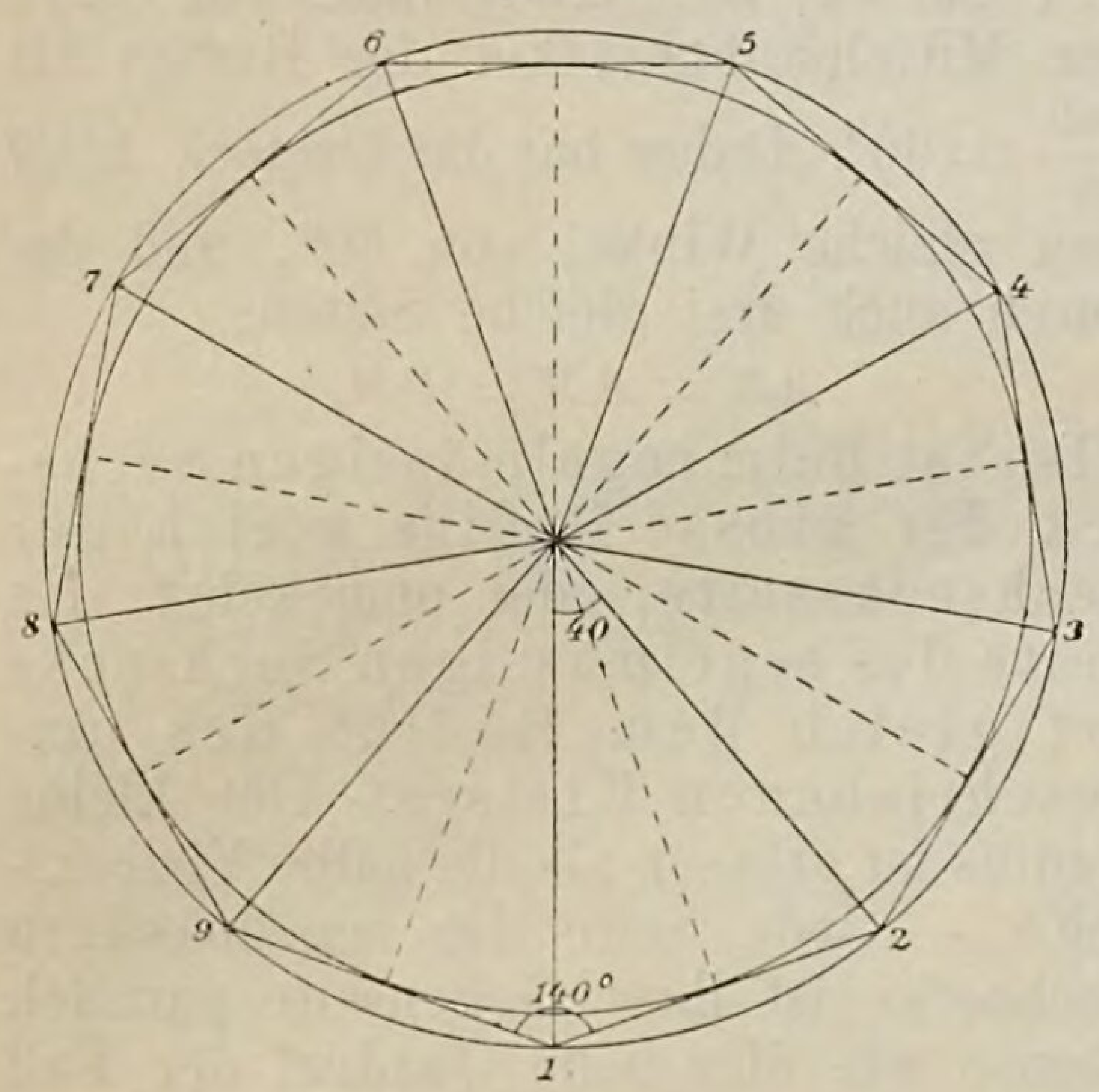
e) Das regelmässige Siebeneck (siehe Figur 93) hat Innenwinkel von $128\frac{4}{7}$ Grad, der Mittelpunktswinkel der Radien ist $\frac{360}{7} = 51\frac{3}{7}$ Grad. Der grosse Radius und (wie die Messung zeigt) auch der kleine Radius sind hier wie bei allen folgenden Vielecken grösser als die Vielecksseite. — Das regelmässige Siebeneck ist mit den Hilfsmitteln der Elementargeometrie überhaupt nicht konstruierbar, sondern kann nur durch Probieren gefunden werden.

Figur 94.



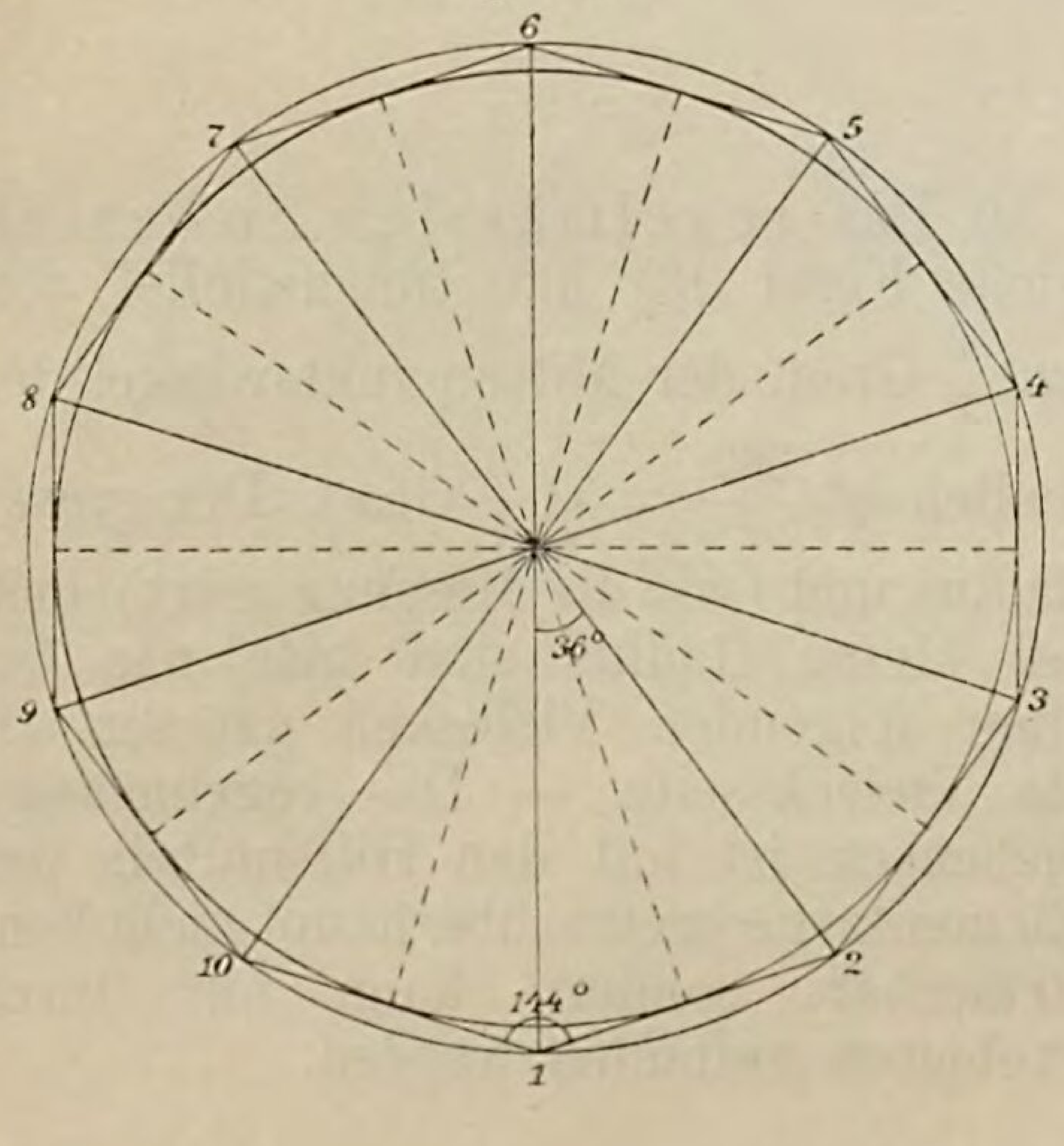
f) Das regelmässige Achteck (s. Figur 94) mit Innenwinkeln von 135°, Mittelpunktswinkeln der Radien von $\frac{360}{8} = 45^0$ kann wegen dieser letzteren Winkelgrösse elementar konstruiert werden, indem man erst in den gegebenen Kreis ein Quadrat zeichnet und dann die Kreisbogen zwischen je zwei Eckpunkten halbiert — bezw. indem man am Mittelpunkt die Winkel zweier senkrechten Durchmesser halbiert. — Durch Fortsetzung desselben Verfahrens der Winkelhalbierung erhält man die Reihe der regelmässigen Vielecke: Viereck, Achteck, Sechzehneck, Zweiunddreissigeck, ···, also alle diejenigen, deren Eckenzahl eine Potenz von 2 ist, oder die Gestalt 2^z hat.

Figur 95.



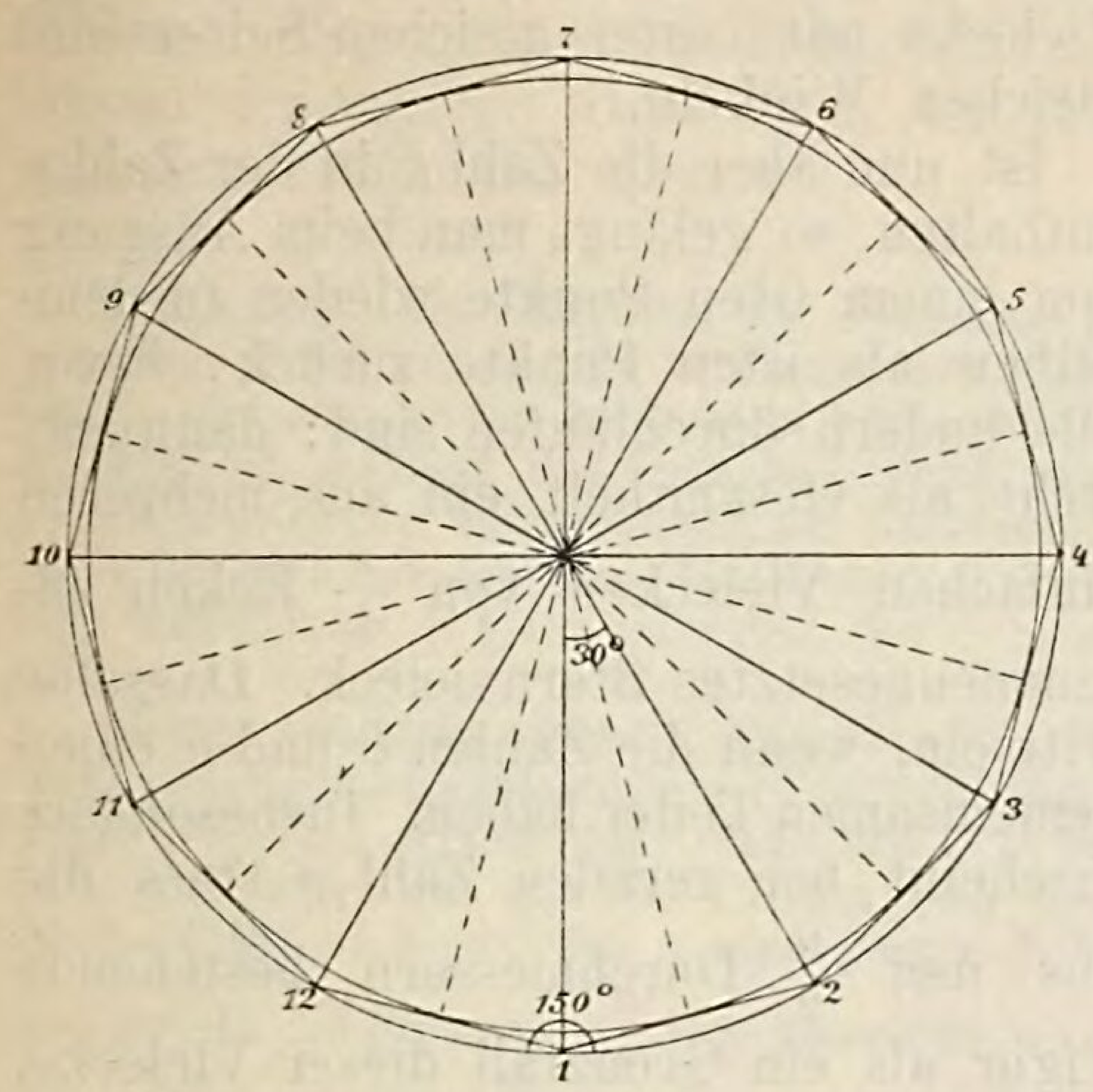
g) Das regelmässige Neuneck (s. Figur 95) mit Innenwinkeln von 140°, Mittelpunktswinkeln von $\frac{360^0}{9} = 40^0$ kann nicht elementar konstruiert werden, sondern muss durch Probieren gefunden werden, indem man z. B. ein regelmässiges Dreieck in den Kreis zeichnet und den Kreisbogen zwischen zwei Ecken durch Versuche mit dem Zirkel in drei Teile teilt.

Figur 96.



h) Das regelmässige Zehneck (s. Figur 96) mit Innenwinkeln von 144°, Mittelpunktswinkeln von $\frac{360^0}{10} = 36^0$ ist ebenso wie das Fünfeck erst mit später zu gewinnenden Hilfsmitteln konstruierbar. Es steht mit dem Fünfeck in derselben Beziehung, wie Ackteck mit Viereck; und durch fortgesetzte Halbierung der Mittelpunktswinkel entsteht die Reihe der regelmässigen Vielecke: Fünfeck, Zehneck, Zwanzigeck, ··, also alle diejenigen, deren Eckenzahl das fünffache einer Potenz von 2 ist, oder die Gestalt $5 \cdot 2^z$ hat.

Figur 97.



i) Das regelmässige Zwölfeck (s. Figur 97) mit Innenwinkeln von 150°, Mittelpunktswinkeln von $\frac{360}{12} = 30^0$ kann auf zweifache Weise gewonnen werden aus schon vorhandenen Vielecken, nämlich entweder durch Dreiteilung des rechten Mittelpunktswinkels beim Quadrat, oder durch Zweiteilung des Mittelpunktswinkels beim Sechseck. Denn beide Konstruktionen sind elementar ausführbar und liefern den Winkel von 30°. — Durch fortgesetzte Winkelhalbierung entsteht dann die Reihe der regelmässigen Vielecke: Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck, ···, also alle diejenigen, deren Eckenzahl das Dreifache einer Potenz von 2 ist, oder die Gestalt $3 \cdot 2^z$ hat.

Frage 104. Welche Figuren entstehen, wenn in einem regelmässigen Vieleck jede Ecke statt mit dem nächstfolgenden und vorhergehenden Punkte, mit andern Punkten verbunden wird?

Antwort. Wenn die Peripherie eines Kreises in n gleiche Teile geteilt ist, so kann jeder Punkt (als Punkt Null) verbunden werden mit dem erst-, d. h. nächstfolgenden und nächstvorhergehenden, oder mit dem zweitfolgenden und zweitvorhergehenden, oder mit dem dritten vorwärts und rückwärts, allgemein mit dem k-ten Punkte vor- und rückwärts, oder mit dem kten und dem $(n-k)$ten in gleicher Richtung. Es gäbe also im ganzen sovielerlei Verbindungsarten, als die Zahl $\frac{n}{2}$ ganze Einheiten enthält. Denn die Verbindung mit Punkten über der Hälfte, oder gar über der Zahl n selbst liefert wieder die gleichen Vielecke, nur in umgekehrtem bezw. gleichem Umlaufe.

Unter diesen Vielecken ist das erste [Verbindung jedes Punktes mit dem 1ten und $(n-1)$ten] das schon oben betrachtete; die andern sind überschlagene Vielecke von der Art der Sternvielecke, enthalten also im Innern das erstgenannte Vieleck und bestehen aus irgend welchen Verlängerungen von dessen Seiten. Wegen der Symmetrie

Erkl. 219. Verbindung jedes Punktes mit dem nten folgenden wäre dasselbe, wie Verbindung mit sich selbst, und liefert kein Vieleck; Verbindung jedes Punktes mit dem $(n+1)$ten, $(n+2)$ten vor- und rückwärts ist dasselbe, wie Verbindung mit dem 1ten, 2ten u. s. w. Man könnte also die Reihe der zu verbindenden Punkte ins unbegrenzte sich fortsetzen lassen und erhält doch nur immer die ganz beschränkte Anzahl von Vielecken.

Erkl. 220. Man kann die Verbindung entweder von einem Punkte aus in einer Richtung vornehmen oder nach beiden Richtungen. Bei gleicher Zahl k liefert beides dieselben Vielecke. Denn der kte Punkt vorwärts ist eben derselbe Punkt, als der $(n-k)$te rückwärts. Also liefert je ein Vieleck mit Sehnen nach dem kten, $2k$ten, $3k$ten Punkt vorwärts genau dieselben Seiten wie dasjenige mit Sehnen nach dem $(n-k)$ten, $(2n-2k)$ten u. s. f. vorwärts, d. h. wie dasjenige nach dem kten, $2k$ten, $3k$ten rückwärts.

Erkl. 221. Ueber Sternvielecke vergleiche man auch Aufgabe 131 und Erkl. 199 im II. Teile dieses Lehrbuches. Daselbst wurde die Summe der Spitzenwinkel beim Sternfünfeck und einem Sechseck gefunden zu $(n-4)\ 180^0$. Dies ist für das regelmässige Sternvieleck leicht zu bestätigen. Denn jeder Spitzenwinkel ist Peri-

pheriewinkel über einem Vielfachen von $\frac{360^0}{n}$, hat also als Grösse ein Vielfaches von $\frac{180}{n}$. Da es n solche Winkel sind, so entsteht ein Vielfaches von 180^0, nämlich wie leicht einzusehen $(n-2k)\cdot 180^0$; ist also $k=2$, wie bei den genannten beiden Fällen, so wird auch richtig $(n-2k)\,180 = (n-4)\cdot 180^0$.

Erkl. 222. Der Drehungswinkel einer Vielecksseite zur benachbarten ersten ist beim einfachen Vieleck gleich dem Aussenwinkel des Vielecks, also $\frac{360}{n}$, der Winkel mit der zweiten $2\cdot\frac{360^0}{n}$, mit der dritten $3\cdot\frac{360^0}{n}$. Es kann also eine Seite die Verlängerung der zweitbenachbarten schneiden, wenn $2\cdot\frac{360}{n}$, die der drittbenachbarten, wenn $3\cdot\frac{360}{n}$ u. s. w. noch unter 180^0 liegt. Indem dann jede Seite die kte benachbarte Seite trifft, entstehen die Spitzenpunkte desjenigen Vielecks, bei welchem jede Ecke mit der kten benachbarten verbunden ist. Daher kann k wachsen bis $k\cdot\frac{360}{n}=180^0$ ist, also auch hiernach wieder von 1 bis $\frac{n}{2}$. Und man erhält die verschiedenen Sternvielecke aus den einfachen durch Schnitt jeder Seite mit der Verlängerung der kten benachbarten vorwärts und rückwärts.

Erkl. 223. Ist k in n enthalten, z. B. $n=q\cdot k$, so läuft schon die qte Sehne wieder nach dem 0ten Punkte, und dann entsteht ein Stern-n-Eck aus k getrennten, mit Drehung um $\frac{360}{n}$ kongruent ineinander geschobenen einfachen Vielecken von der Eckenzahl $q=\frac{n}{k}$. Haben k und n einen gemeinschaftlichen Teiler t, z. B. $n=a\cdot t$, $k=b\cdot t$, so läuft die ate Sehne wieder durch den 0ten Punkt, denn sie geht durch den $a\cdot k$ten oder $a\cdot b\cdot t$ten oder $b\cdot n$ten Punkt, der eben wieder der nte oder 0te Punkt ist; dann entsteht ein Stern-n-Eck aus t getrennten, mit Drehung um $\frac{360}{n}$ kongruent ineinander geschobenen einfachen Vielecken oder Sternvielecken von der Eckenzahl $a=\frac{n}{t}$. Nur wenn also k und n keine gemeinschaftliche Teiler haben, oder wenn sie „relativ prim" sind, geht erst die nte Sehne wieder durch den 0ten Punkt, weil erst $n\cdot k$ durch n teilbar wird, aber kein kleineres Vielfaches von k.

sind sie aber sämtlich auch regelmässige Vielecke mit lauter gleichen Seiten und gleichen Winkeln.

Ist nun aber die Zahl k in der Zahl n enthalten, so gelangt man beim Ausgang von einem 0ten Punkte wieder zu demselben als nten Punkte zurück, bevor alle andern durchlaufen sind: dann entsteht als Gesamtheit ein aus mehreren einfachen Vielecken von $\frac{n}{k}$ Ecken zusammengesetztes Sternvieleck. Dasselbe tritt ein, wenn die Zahlen k und n einen gemeinsamen Teiler haben. Insbesondere erscheint bei gerader Zahl n stets die aus den $\frac{n}{2}$ Durchmessern bestehende Figur als ein Grenzfall dieser Vielecke.

Haben aber n und k keinen gemeinschaftlichen Teiler — und dies gilt bei einer Primzahl n für jede Zahl k, bei einer nicht primen Zahl n doch für alle Zahlen k, welche mit n keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen oder mit n „relativ prim" sind, — so entstehen jedesmal Sternvielecke aus n Sehnen, von denen erst die nte wieder nach dem 0ten Punkte führt.

Für jedes dieser Sternvielecke aber besteht ein umgeschriebener Kreis der Hauptecken, und ein eingeschriebener Kreis, der die Seiten berührt. Gemeinsamer Mittelpunkt beider ist der gemeinsame Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden der „Spitzenwinkel". Daneben lässt sich immer auch ein umgeschriebener Kreis der n Nebenecken zeichnen, welch letztere von dem im Innern liegenden einfachen und ebenfalls regelmässigen n-Eck gebildet werden.

Frage 105. Welche Arten von regelmässigen Sternvielecken entstehen auf Grund der vorigen Antwort in den einfachsten Fällen der Zahl n?

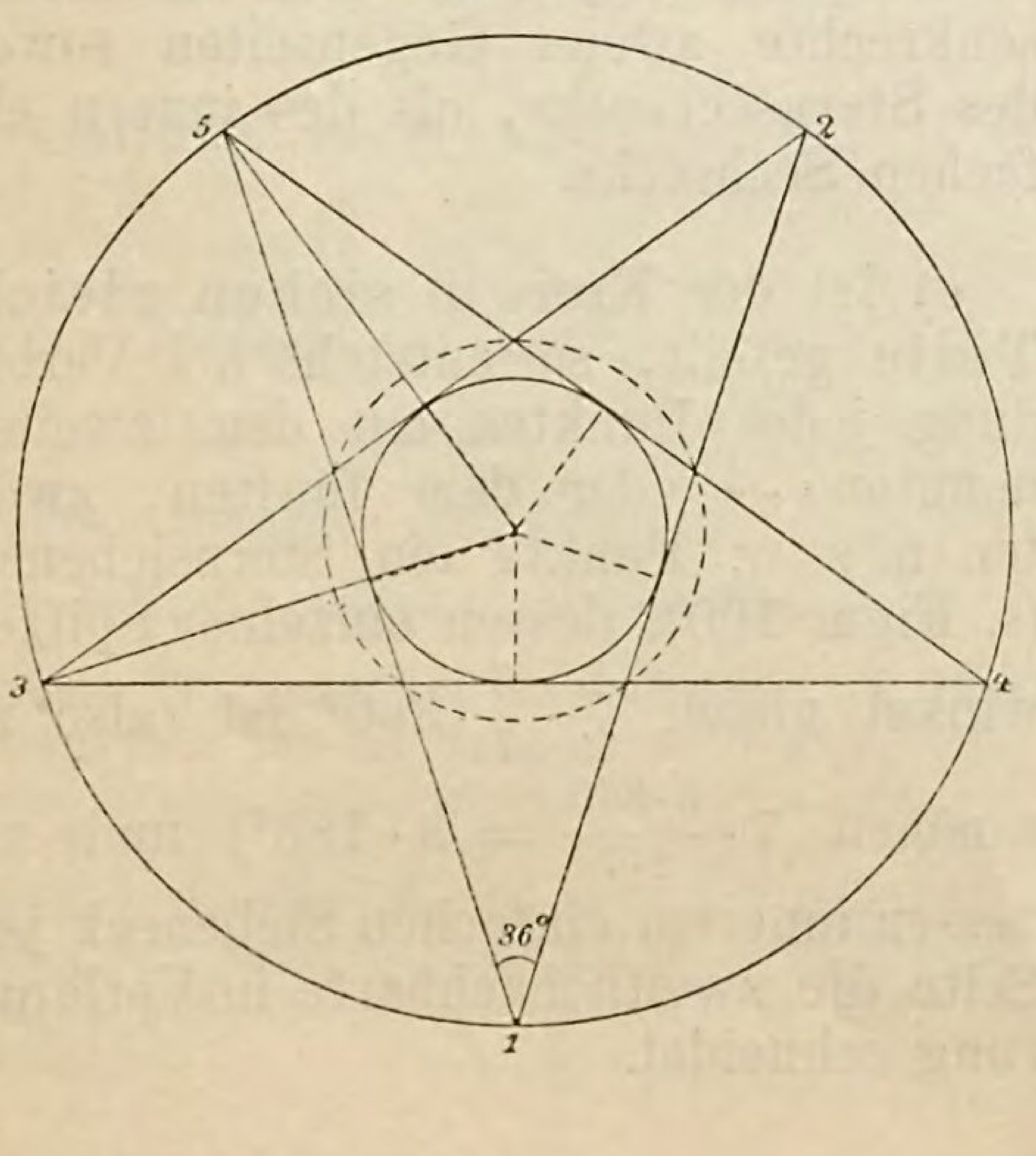
Erkl. 224. Ist allgemein die Kreislinie in n gleiche Teile geteilt und verbindet man jeden Punkt mit dem ersten beiderseits benachbarten Punkte, so entsteht das einfache regelmässige n-Eck, dasselbe entsteht auch bei Verbindung jedes Punktes mit dem $(n-1)$ten benachbarten, oder mit dem $(n+1)$ten oder dem $(2n \pm 1)$ten u. s. w.

Ebenso entsteht immer dasselbe Vieleck, wenn jeder Punkt verbunden wird mit dem kten oder dem $(n+k)$ten oder dem $(2n+k)$ten u. s. w., bezw. mit den $(n-k)$ten oder dem $(2n-k)$ten u. s. w. Ist n eine gerade Zahl, so entsteht die Figur von $\frac{n}{2}$ Durchmessern, wenn $k = \frac{n}{2}$ gesetzt wird; und keine Figur entsteht, wenn jeder Punkt verbunden wird mit dem nten, $2n$ten $\cdots$, denn dies ist stets jeder Punkt selbst. —

In nebenstehender Antwort ist vom Viereck an die Besprechung derjenigen Fälle weggelassen, bei welchen nur die Durchmesser oder nur die Punkte selbst erhalten würden. Es sind also weggelassen die Ziffern $k = \frac{n}{2}$, $k = n$, $k = 2n$, allgemein $k = n\left(z + \frac{1}{2}\right)$ und $k = n \cdot z$.

Erkl. 225. Das in Figur 98 dargestellte Sternfünfeck wurde von den alten Mathematikern (der Schule des Pythagoras) sehr ausführlich behandelt. Es dient daher häufig als magisches Zeichen und dergleichen. Jede Winkelhalbierende eines Spitzenwinkels ist Mittelsenkrechte einer Seite, und zwar seiner Gegenseite, nämlich

Figur 98.



Antwort. a) Ist der Kreis in drei gleiche Teile geteilt, so entsteht bei Verbindung jedes Punktes mit dem beiderseits ersten oder vierten, siebten u. s. w. benachbarten Punkte das gewöhnliche regelmässige Dreieck.

Bei Verbindung je mit dem zweiten oder fünften, achten u. s. w. benachbarten entsteht dieselbe Figur in umgekehrtem Umlauf.

Verbindung mit dem dritten, sechsten u. s. w. Punkte entsteht gar keine Figur, da nur die drei Teilpunkte selbst erhalten würden.

b) Ist der Kreis in vier gleiche Teile geteilt, so entsteht das regelmässige einfache Viereck, in positivem bezw. negativem Umlauf, wenn jeder Punkt verbunden wird mit dem ersten, fünften, neunten u. s. w. bezw. mit dem dritten, siebten, elften u. s. w. benachbarten Punkte vorwärts und rückwärts.

Verbindung mit dem zweiten, sechsten u. s. w. Punkte lieferte die beiden senkrechten Durchmesser, mit dem vierten, achten u. s. w. nur diese Punkte.

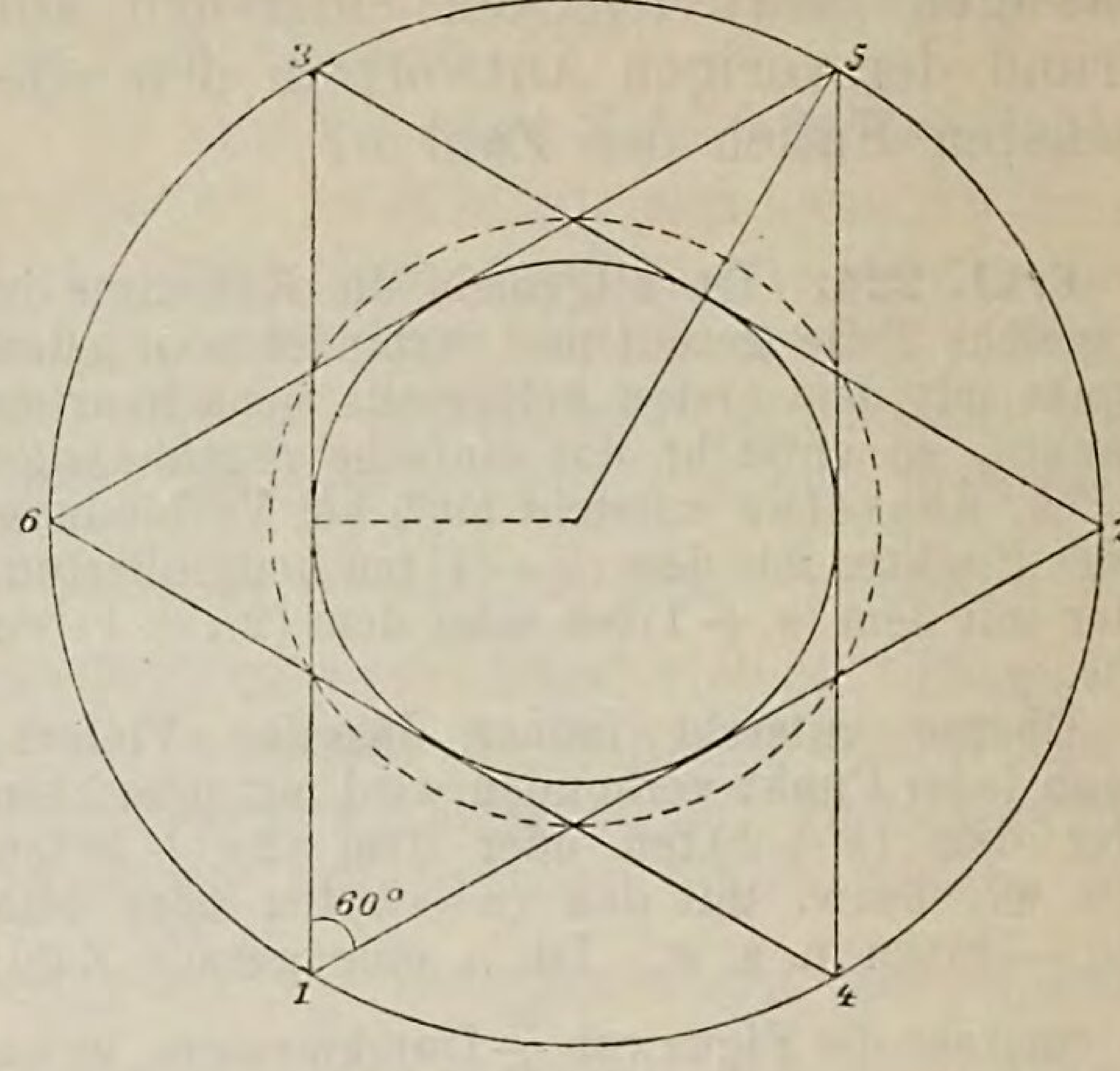
c) Ist der Kreis in fünf gleiche Teile geteilt, so entsteht das einfache regelmässige Fünfeck bei Verbindung jedes Punktes mit dem ersten, sechsten $\cdots$ bezw. mit dem vierten, neunten $\cdots$ Punkte.

Verbindung jeden Punktes mit dem zweiten, siebenten bezw. mit dem dritten, achten u. s. w. Punkte liefert das sogenannte „Pentagramm“, als erste der neu entstehenden Figuren (siehe Figur 98).

d) Ist der Kreis in sechs gleiche Teile geteilt, so entsteht ausser dem regelmässigen einfachen Sechseck bei Verbindung jedes Punktes mit dem zweiten u. s. w. eine aus zwei Dreiecken gebildete Figur, deren Inkreis der Inkreis des demselben Kreise eingeschriebenen regelmässigen Dreiecks ist (siehe Figur 99). Je zwei Gegenseiten sind

der dritten von seiner Ecke aus. Zugleich ist diese Linie Mittelsenkrechte einer Seite des innern Fünfecks und daher auch Winkelhalbierende eines Winkels dieses Fünfecks.

Figur 99.



Erkl. 226. Will man nur diejenigen Sternvielecke als neue Figuren anrechnen, welche in sich geschlossen sind, also nicht aus zwei oder mehr getrennten Figuren zusammengesetzt sind, so muss man auf Grund der Erkl. 223 aussagen, dass soviele verschiedene n-Ecke entstehen können, als in der ganzen Reihe Zahlen von 1 bis zu $\frac{n}{2}$ Zahlen „relativ prim“ zu n enthalten sind. Untersucht man diese Zahlen, so findet man, dass die im folgenden durch fetten Druck hervorgehobenen Ziffern allein übrig bleiben, also in folgender Anzahl:

3	**1**										1 Dreieck
4	**1**	2									1 Viereck
5	**1**	**2**									1 Fünfeck und 1 Sternfünfeck
6	**1**	2	3								1 Sechseck
7	**1**	**2**	**3**								1 Siebeneck und 2 Sternsiebenecke
8	**1**	2	**3**	4							1 Achteck und 1 Sternachteck
9	**1**	**2**	3	**4**							1 Neuneck und 2 Sternneunecke
10	**1**	2	**3**	4	5						1 Zehneck und 1 Sternzehneck
11	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**						1 Elfeck und 4 Sternelfecke
12	**1**	2	3	4	**5**	6					1 Zwölfeck und 1 Sternzwölfeck
13	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**					1 Dreizehneck und 5 Sterndreizehnecke
14	**1**	2	**3**	4	**5**	6	7				1 Vierzehneck und 2 Sternvierzehnecke
15	**1**	**2**	3	**4**	5	6	**7**				1 Fünfzehneck und 3 Sternfünfzehnecke
16	**1**	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8			1 Sechzehneck und 3 Sternsechzehnecke
17	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**			1 Siebzehneck und 7 Sternsiebzehnecke
18	**1**	2	3	4	**5**	6	**7**	8	9		1 Achtzehneck und 2 Sternachtzehnecke
19	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**		1 Neunzehneck und 8 Sternneunzehnecke
20	**1**	2	**3**	4	5	6	**7**	8	**9**	10	1 Zwanzigeck und 3 Sternzwanzigecke

u. s. w.

Erkl. 227. Ebenso wie innerhalb des Sternvielecks für das grösstmögliche k die sämtlichen Sternecke für kleinere k enthalten sind, so kann man auch sagen, dass das einfache Vieleck für $k = 1$ die sämtlichen übrigen liefert. Denn durch Verlängerung seiner Seiten kommen diejenigen Linien zum Schnitt, welche die übrigen Sternvielecke bilden. Nur liegen alle übrigen ausserhalb des ursprünglichen einfachen Vielecks, ebenso wie bei der erstbetrachteten Figur alle Vielecke für $k > 1$ dasjenige mit $k = 1$ als innerstes einschliessen.

Erkl. 228. In den Figuren 98 bis 105 sind nicht alle besprochenen Fälle dargestellt, sondern weggelassen sind sämtliche nur aus Durchmessern bestehenden Figuren. Ferner sind von den Figuren des Neunecks nur eine und vom Elfeck nur eine gezeichnet, um die darin enthaltenen zu vergegenwärtigen, das Zehneck aber ganz weggeblieben und ebenso das Zwölfeck. Letzteres würde aufzuweisen haben:

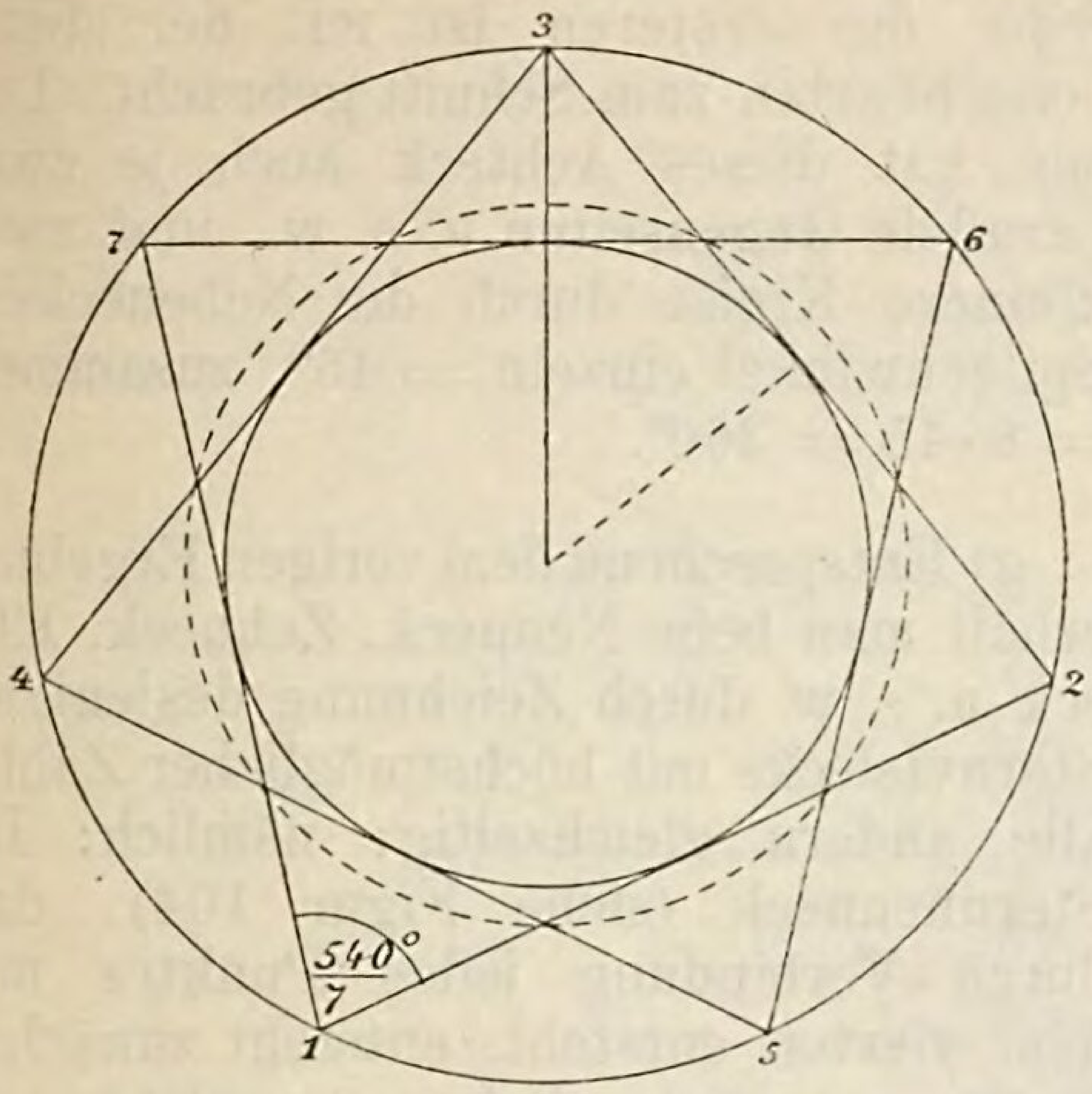
1) das einfache Zwölfeck,

2) das aus zwei Sechsecken bestehende,

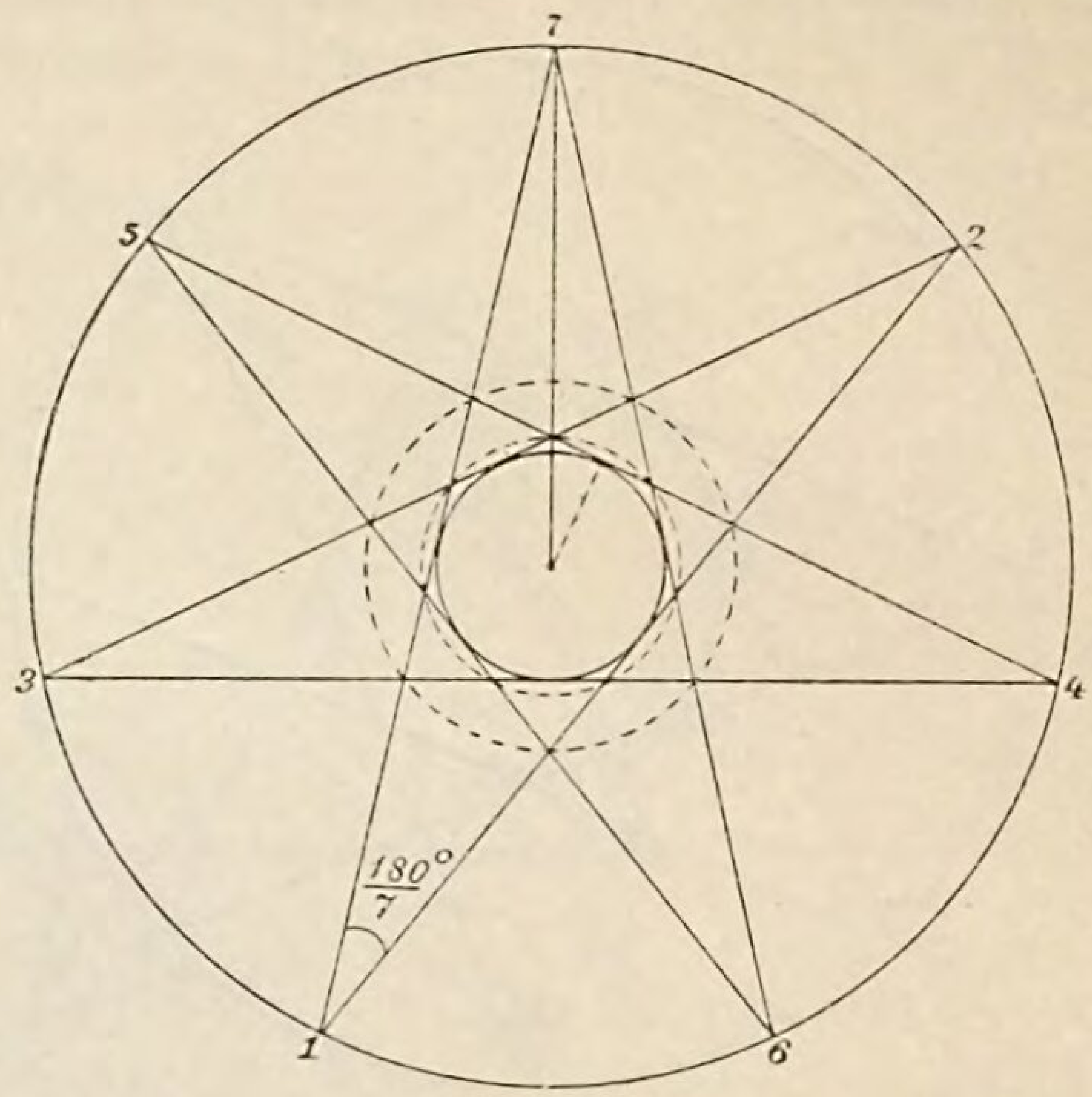
parallel. Jede Winkelhalbierende ist zugleich Winkelhalbierende zweier gegenüberliegenden Spitzenwinkel und Mittelsenkrechte zweier Gegenseiten sowohl des Sternsechsecks, als des innern einfachen Sechsecks.

e) Ist der Kreis in sieben gleiche Teile geteilt, so entsteht bei Verbindung jedes Punktes mit dem zweiten, neunten ··· oder dem fünften, zwölften u. s. w. Punkte ein Sternsiebeneck (s. Figur 100), dessen einzelner Spitzenwinkel gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot 360^0$ ist (also zusammen $7 \cdot \frac{3 \cdot 360}{2 \cdot 7} = 3 \cdot 180^0$) und von dessen innerem einfachen Siebeneck jede Seite die zweitbenachbarte in Verlängerung schneidet.

Figur 100.



Figur 101.



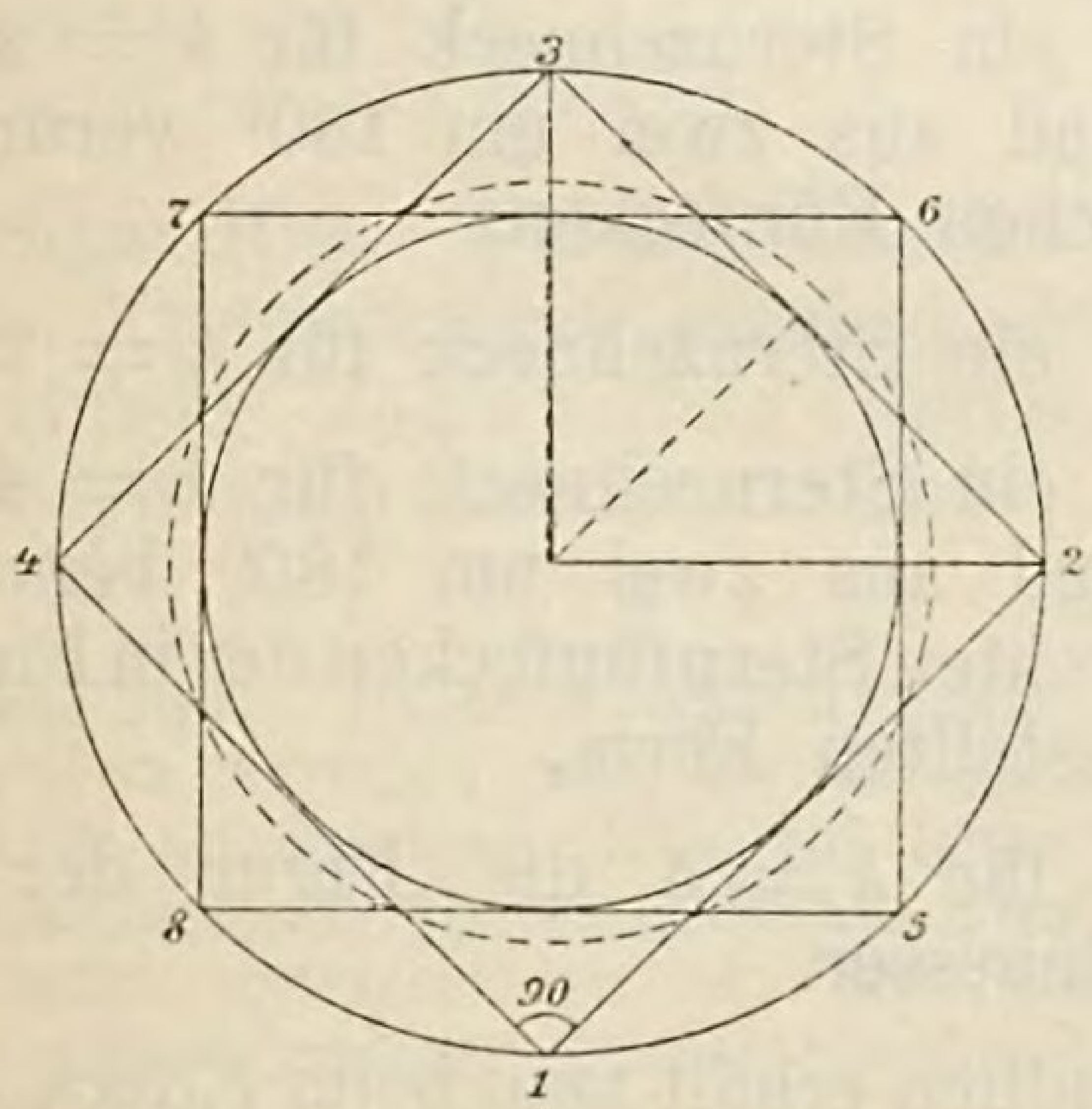
3) das aus drei Quadraten bestehende,

4) das aus vier Dreiecken bestehende,

5) das einzige in sich geschlossene Sternzwölfeck,

6) die Gesamtheit der sechs Durchmesser des Kreises.

Figur 102.



Erkl. 229. Aus Betrachtung der Figuren 104 und 105 und aus den nebenstehenden Auseinandersetzungen lassen sich leicht folgende allgemeine Schlüsse ziehen:

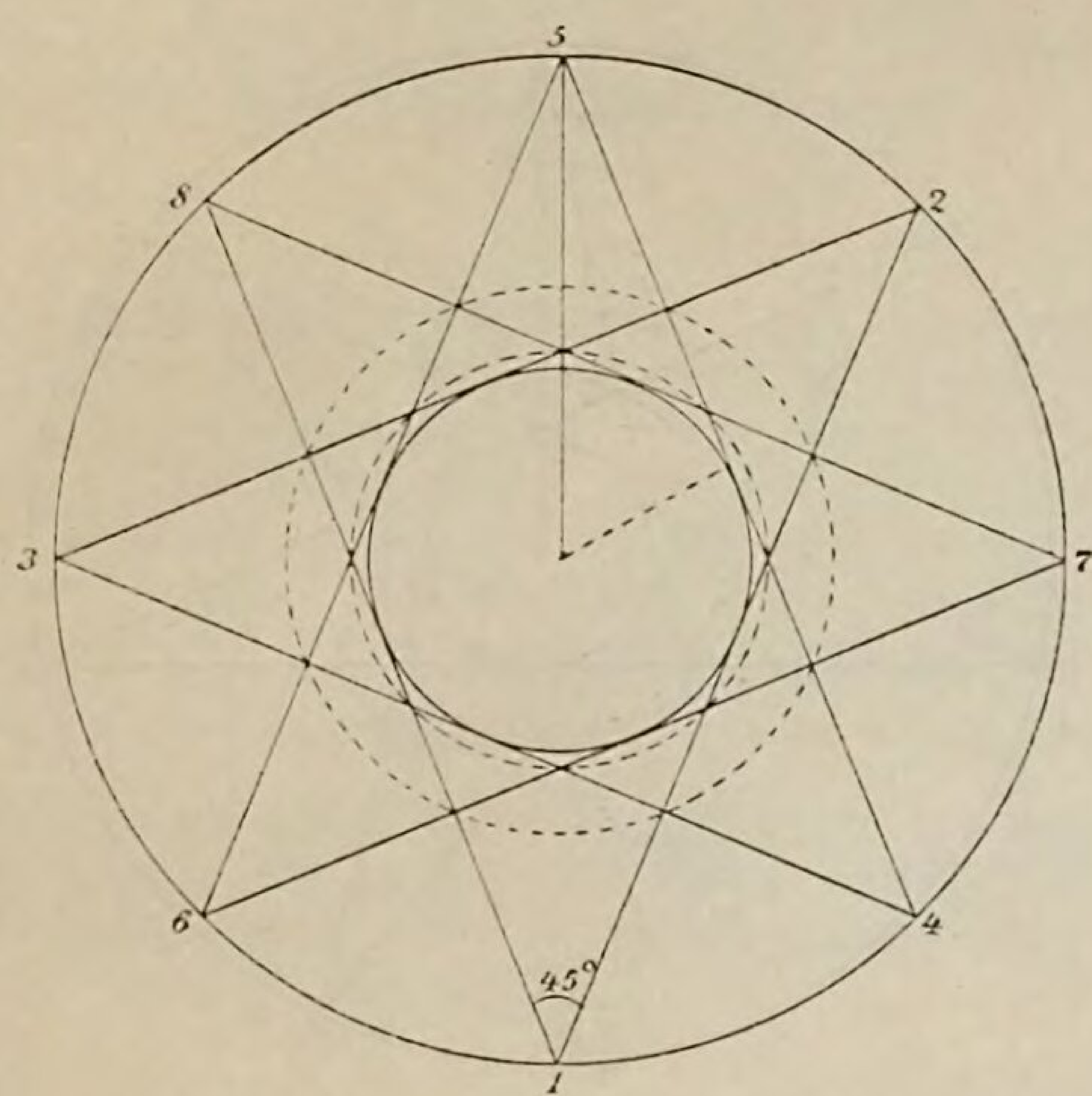
Die n Seiten des einfachen regelmässigen n-Ecks haben zusammen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Schnittpunkte. Dieselben verteilen sich zu je n auf $\frac{n-1}{2}$ Kreise, wobei für ein gerades n die unendlich fern liegenden Schnittpunkte paralleler Gegenseiten als Kreispunkte gelten. Je n auf einem Kreise liegenden Punkte bilden ein Stern-n-Eck, in dem jeder Punkt mit dem kten benachbarten verbunden ist, und als Schnittpunkt einer Seite des innersten einfachen regelmässigen n-Ecks mit der kten benachbarten Seite erscheint.

Bei Verbindung mit dem dritten, zehnten ··· oder dem vierten, elften ··· Punkte aber entsteht ein Sternsiebeneck (siehe Figur 101) dessen einzelner Spitzwinkel gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot 360^0$ ist (also zusammen $7 \cdot \frac{360^0}{2 \cdot 7} = 180^0$) und von dessen innerem einfachen Siebeneck jede Seite die drittbenachbarte in Verlängerung schneidet. Bei diesem Sternsiebeneck ist also sowohl das einfache Siebeneck, als das in Figur 100 dargestellte Sternsiebeneck im Innern des grossen nochmals vorhanden. Und daher hat man auch ausser dem grossen Umkreis noch einen Kreis durch die sieben Ecken des ersteren und einen durch die sieben Ecken des letzteren Siebenecks.

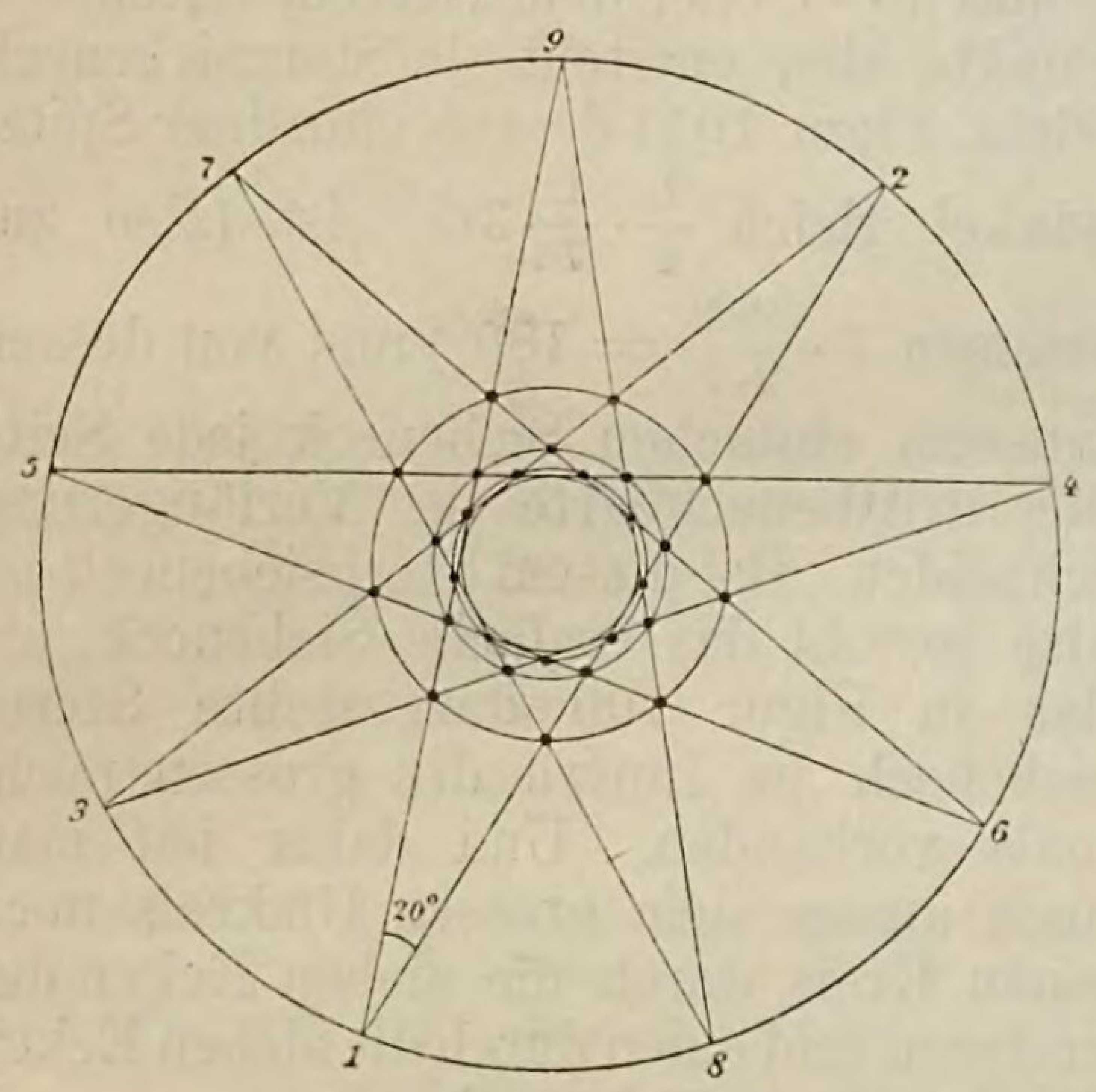
f) Ist der Kreis in acht gleiche Teile geteilt, so liefert die Verbindung mit dem zweiten u. s. w. Punkte ein Sternachteck aus zwei um 45^0 verschobenen kongruenten Vierecken (siehe Figur 102), dessen Inkreis der Inkreis des Vierecks ist, und dessen Winkelhalbierende zwei Gegenwinkel und zwei parallele Gegenseiten halbiert. Spitzenwinkel einzeln $= 90^0$, zusammen $4 \cdot 180^0$.

Verbindung mit dem dritten ··· bezw. fünften ··· Punkte aber liefert ein Sternachteck (siehe Figur 103), das im Innern ein einfaches regelmässiges Achteck enthält, sowie nochmals das vorgenannte

Figur 103.



Figur 104.



In demselben ist ein Spitzenwinkel Peripheriewinkel über $(n-2k)$ Bogenstücken von $\frac{360^0}{n}$, also hat jeder einzelne Spitzenwinkel im Sterneck kter Ordnung $\frac{n-2k}{n} \cdot 180^0 = 180^0 \left(1 - \frac{2k}{n}\right)$, also alle n Spitzenwinkel zusammen $(n-2k) \cdot 180^0$. Da aber k wachsen kann von 1, 2 bis $\frac{n}{2}$, so erhält man die Reihe der Sternecke mit Einzelwinkeln: $180\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, $180\left(1 - \frac{4}{n}\right)$, bis herab zu 0^0 (Durchm.) und Winkelsumme $(n-2)\,180^0$, $(n-4) \cdot 180^0 \cdots$ bis herab zu 0^0, worunter das erste jeweils die Winkelgrössen des einfachen regelmässigen Vielecks sind.

in Figur 102 dargestellte Achteck. Jede Seite des ersteren ist mit der drittbenachbarten zum Schnitt gebracht. Daher hat dieses Achteck auch je zwei parallele Gegenseiten u. s. w., und zwei kleinere Kreise durch die Nebenecken. Spitzenwinkel einzeln $= 45^0$, zusammen $= 8 \cdot 45 = 360^0$.

g) Entsprechend dem vorigen Ergebnis erhält man beim Neuneck, Zehneck, Elfeck u. s. w. durch Zeichnung desjenigen Sternvielecks mit höchstmöglicher Zahl k alle andern gleichzeitig; nämlich: Im Sternneuneck (siehe Figur 104), das durch Verbindung jedes Punktes mit dem vierten entsteht, entsteht zunächst im Sternneuneck mit $k = 3$, welches aus drei um 60 bezw. 120 Grad gedrehten Dreiecken besteht, sodann ein Sternneuneck mit $k = 2$, und im Innersten ein einfaches regelmässiges Neuneck.

Ebenso erhält man beim Zehneck ausser demjenigen einfachen für $k = 1$:

1) ein Sternzehneck für $k = 2$, bestehend aus zwei um 180^0 verdrehten einfachen Fünfecken,

2) ein Sternzehneck für $k = 3$,

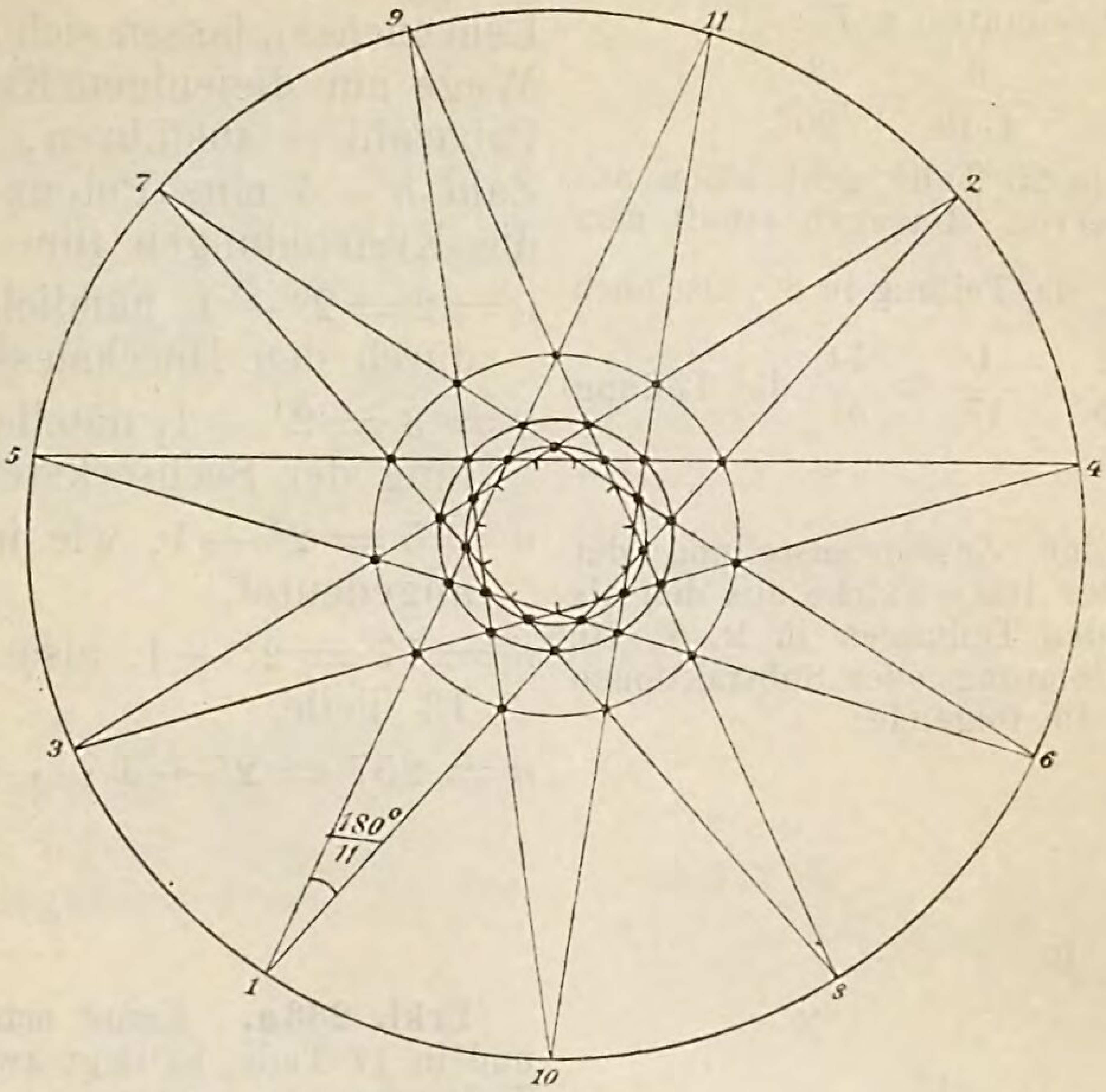
3) ein Sternzehneck für $k = 4$, bestehend aus zwei um 180^0 bezw. 36^0 verdrehten Sternfünfecken der in Figur 98 dargestellten Form,

4) für $k = 5$ die Figur der fünf Durchmesser.

Endlich erhält man beim Elfeck (siehe Figur 105) lauter geschlossene Sternelfecke für $k = 5$, $k = 4$, $k = 3$, $k = 2$, $k = 1$, weil 11 selbst Primzahl ist. Daher erhält man auch fünf Kreise, jeden durch 11 Punkte und dazu noch als sechsten den allen gemeinschaftlichen Inkreis. Eine einzige Winkelhalbierende ist zugleich in jedem der fünf Sternelfecke Winkelhalbierende eines Winkels und Mittelsenkrechte der Gegenseite. Die Spitzenwinkel sind in den fünf Sternecken der Reihe nach einzeln $\frac{1}{2} \cdot \frac{360}{11}$, $\frac{3}{2} \cdot \frac{360}{11}$, $\frac{5}{2} \cdot \frac{360}{11}$, $\frac{7}{2} \cdot \frac{360}{11}$, $\frac{9}{2} \cdot \frac{360}{11}$ und in Summe 180^0, $3 \cdot 180^0$, $5 \cdot 180^0$,

$7 \cdot 180^0$, $9 \cdot 180^0$. Letzteres ist eben die Innenwinkelsumme des innersten als einfachen Elfecks.

Figur 105.



Frage 106. Welche Vielecke bezw. welche Kreisteilungen ergeben sich aus den einmal bekannten durch elementare Konstruktionen?

Erkl. 230. Unter elementarer Konstruktion versteht man die der Elementargeometrie angehörigen Konstruktionen durch Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Kreisbogen. Sie werden unterschieden von den Konstruktionen mittels anderer Kurven als des Kreises, z. B. Ellipsen, Spiralen u. s. w.

Erkl. 231. Sind n Punkte auf dem Kreise in gleichen Abständen bekannt, und man lässt, wenn n gerade ist, stets einen Punkt aus, so bleiben $\frac{n}{2}$ Punkte, also eine Kreisteilung in $\frac{n}{2}$ gleiche Teile.

Ebenso kann man, wenn n durch 3 teilbar ist, durch Auslassung von je zwei Punkten $\frac{n}{3}$ Punkte in gleichen Abständen erhalten, also eine Kreisteilung in $\frac{n}{3}$ gleiche Teile. — Und so kann jede Teilung aus der in n Teile abgeleitet werden, deren Ziffer in n ohne Rest

Antwort. Wenn ein regelmässiges n-Eck, d. h. die Kreisteilung in n gleiche Teile bekannt ist, so kann daraus durch Ueberspringen von 1, 2 Punkten die Teilung in $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ u. s. w., sowie durch Winkelhalbierung in $2n$, $4n$, $8n$ u. s. w. gleiche Teile ausgeführt werden, also allgemein in $\frac{n}{z}$ und in $n \cdot 2^z$ Teile, wo z jede ganze positive Zahl bedeuten kann.

Sind zwei Kreisteilungen bekannt, etwa in n und in m gleiche Teile, wo $m > n$, so ist das Bogenstück zwischen je zwei Punkten der ersten Art $\frac{1}{n}$, der zweiten Art $\frac{1}{m}$ der Peripherie. Zwischen zweien dieser Punkte liegt also ein Stück von $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m \cdot n}$ der Peripherie. Wenn also m und n relativ

enthalten ist, also allgemein dargestellt ist durch $\frac{n}{z}$.

Erkl. 232. Aus zwei Teilungen, deren Ziffern nicht relativ prim sind, erhält man nur schon anderweitig bekanntes, z. B.:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{6}{4 \cdot 10} = \frac{3}{20}.$$

Aber die Teilung in 20 Teile geht schon aus derjenigen in 10 hervor. Dagegen erhält man aus $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ die Teilung in 30, also auch in 15 Teile, aus $\frac{1}{3} - \frac{1}{17} = \frac{14}{51}$ die Teilung in 51 Teile u. s. w.

Erkl. 233. Eine Zusammenstellung der Teilungszahlen unter 100, welche aus den als bekannt zu setzenden Teilungen in 2, 6, 10, 17 Teile durch Halbierung oder Subtraktionen hervorgehen, wäre die folgende:

2	3	5	17	15	51	85
4	6	10	34	30		
8	12	20	68	60		
16	24	40				
32	48	80				
64	96					

prim sind, so ist dieser Bruch nicht mehr zu kürzen, und man hat auch die Teilung in $m \cdot n$ gleiche Teile.

Wie der berühmte Mathematiker Gauss gezeigt hat (vergl. im VII. Teile dieses Lehrbuches), lassen sich auf elementarem Wege nur diejenigen Kreisteilungen mit Primzahl n ausführen, für welche die Zahl $n - 1$ eine Potenz von 2 ist, also die Kreisteilungen für:

$n = 2 = 2^0 + 1$, nämlich die Halbierung durch den Durchmesser,

$n = 3 = 2^1 + 1$, nämlich die Verdoppelung der Sechsecksteile,

$n = 5 = 2^2 + 1$, wie in Antwort 103c angedeutet,

$n = 17 = 2^4 + 1$, also nicht in 7, 11, 13 Teile,

$n = 257 = 2^8 + 1 \cdots$ u. s. w.

Erkl. 233a. Kennt man die Teilung in 5 und in 17 Teile, so liegt zwischen dem dritten Teilpunkte der ersteren und dem zehnten der letzteren genau $\frac{1}{85}$ der Peripherie, denn:

$$\frac{3}{5} - \frac{10}{17} = \frac{51 - 50}{85} = \frac{1}{85}.$$

7) Ueber den Kreis in Verbindung mit einem zweiten Kreis.

a) Ueber die Beziehungen zweier Kreise im allgemeinen.

Frage 107. Welche gerade Linie kommt für die Untersuchung der Beziehungen zweier Kreise hauptsächlich in Betracht?

Erkl. 234. Als unbegrenzte gerade Linie heisst die Zentrale auch Zentrallinie, die Strecke zwischen beiden Mittelpunkten heisst auch Zentralstrecke.

Beim Umklappen um die Zentrale kommt je ein Halbkreis mit einem andern zur Deckung.

Die Zentralstrecke kann gleich Null werden, wenn die Mittelpunkte beider Kreise zusammenfallen. Dann heissen beide Kreise konzentrisch sonst exzentrisch.

Antwort. Für zwei Kreise ist die wichtigste Linie die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte oder ihre Zentrale.

Da diese durch den Mittelpunkt jedes Kreises geht, ist sie Durchmesser jedes Kreises, also Symmetrieachse jedes einzelnen Kreises und folglich auch Symmetrieachse der von beiden Kreisen gebildeten Gesamtfigur.

Frage 108. Welche Folgerung für die Beziehungen zweier Kreise ergibt sich aus ihrer Symmetrie in Bezug auf die Zentrallinie.

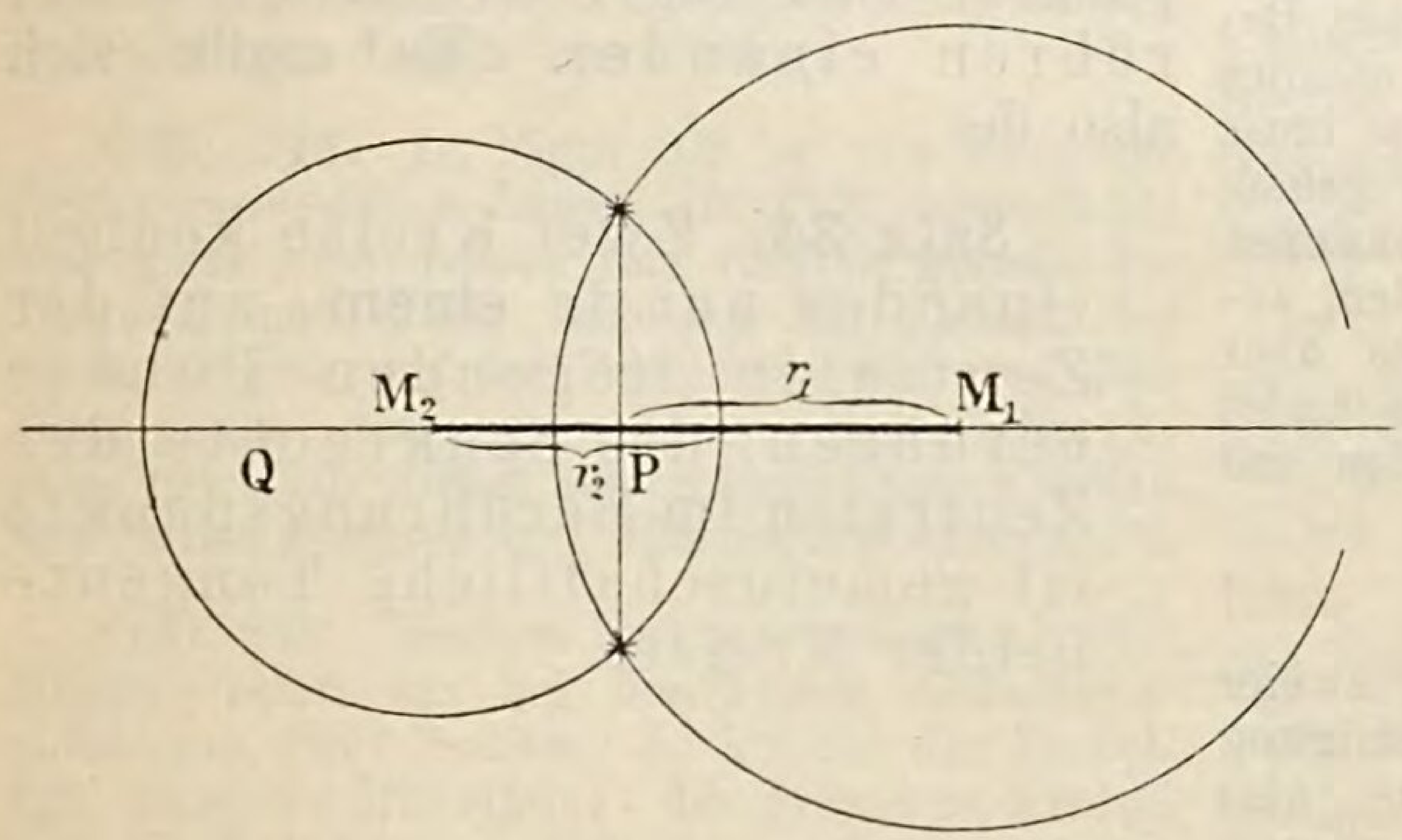
Antwort. Aus der Symmetrie der aus zwei Kreisen gebildeten Gesamtfigur in Bezug auf die Zentrale folgt, dass keine Eigenschaft dieser Figur nur in einfacher Anzahl auftreten kann, ausser etwa einem auf der Zentralen selbst gelegenen Punkte. Vielmehr muss jede durch einen Punkt, eine Gerade, einen Kreis, eine Fläche u. s. w. dargestellte Beziehung beider Kreise in doppelter Anzahl erscheinen, nämlich beiderseits der Zentrallinie, oder aber in einer zu sich selbst symmetrischen Lage in Bezug auf die Zentrale.

Erkl. 235. Die nebenstehende Ueberlegung bildet eine Bestätigung des Satzes 18c, wonach zwei Kreise keine drei Schnittpunkte haben können. Weitere Beziehungen, für welche dieselbe Anschauungsweise von Vorteil wird, bietet die Lage von Schnittpunkten, Berührungspunkten, Tangenten, gemeinschaftlichen Flächenstücken u. s. w. zweier Kreise.

Die Zentrallinie selbst ist als Achse eine sich selbst symmetrische Gerade, und daher nur in einfacher Anzahl vorhanden; was nicht mit ihr zusammenfällt, muss in gerader Anzahl auftreten.

Frage 109. Welche Anwendung des Vorigen ergibt sich für den Fall, dass zwei Kreislinien irgend einen nicht auf der Zentralen liegenden Punkt gemeinsam haben?

Figur 106.



Antwort. Wenn zwei Kreislinien einen gemeinsamen Punkt oder einen Schnittpunkt besitzen, der nicht auf der Zentralen liegt, so müssen sie auf der andern Seite der Zentralen noch einen symmetrisch gelegenen zweiten gemeinsamen Punkt oder Schnittpunkt haben. Die Verbindungslinie dieser beiden symmetrischen Punkte ist eine sich selbst symmetrische Achsensenkrechte, dieselbe wird also von der Achse senkrecht halbiert. Da aber beide symmetrischen Punkte Kreispunkte beider Kreise sind, so ist jene Achsensenkrechte eine Sehne sowohl im einen als im andern Kreis; man erhält also in Rücksicht auf Satz 18c den

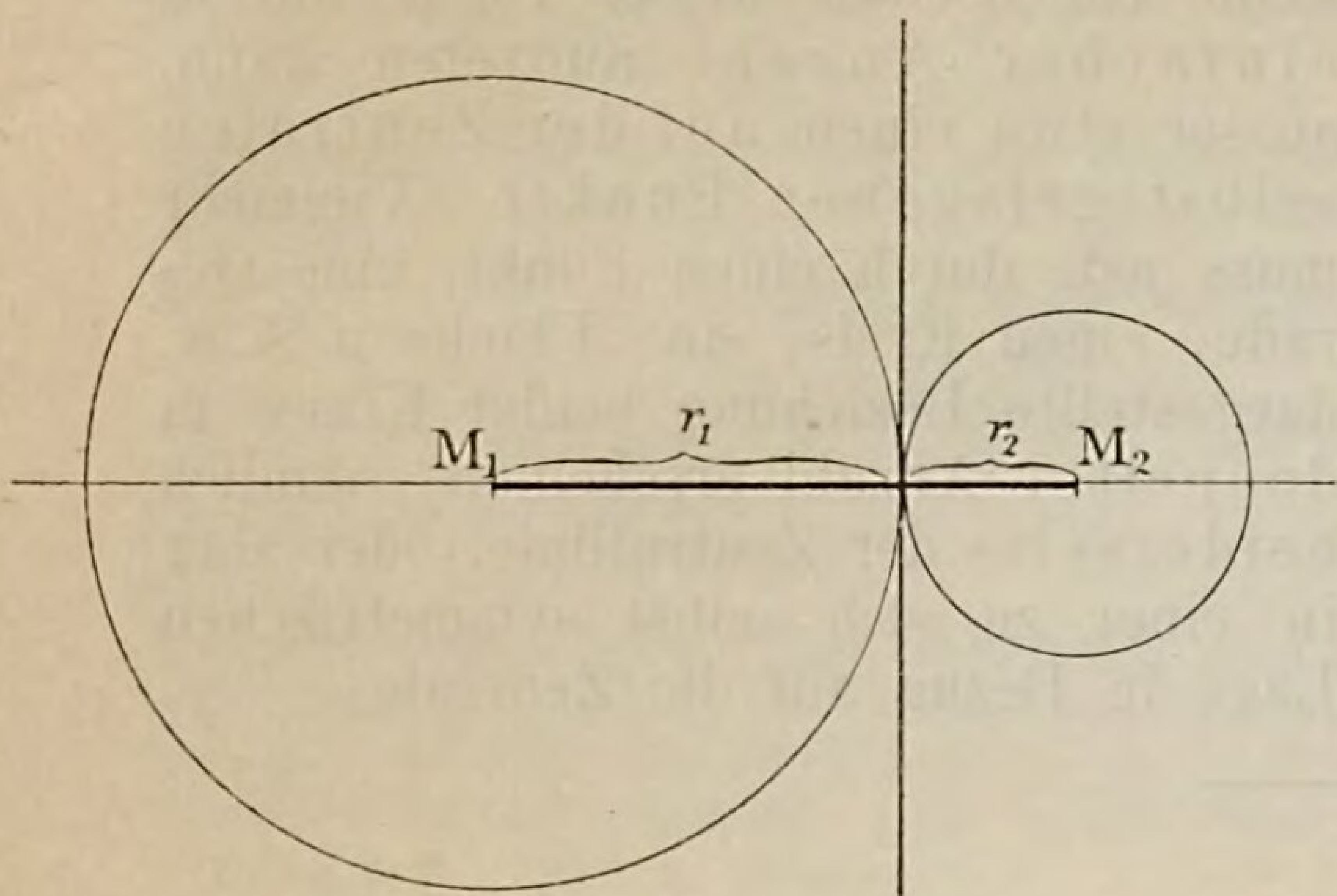
Satz 33. Zwei Kreise können einander nur in zwei zur Zentralen symmetrischen Punkten schneiden, die Zentrale ist Mittelsenkrechte ihrer gemeinschaftlichen Sehne.

Erkl. 236. Würden sich zwei gemeinsame Punkte zweier Kreise auf derselben Seite der Zentralen nachweisen lassen, so müssten die beiden Kreise vier gemeinsame Punkte haben, müssten also vollkommen zusammenfallen.

Erkl. 237. Wenn zwei Kreise einander schneiden, so muss ein Flächenteil des einen Kreises zugleich zur Fläche des andern Kreises gehören. Dieser gemeinsame Flächenteil wird von der Zentralen in zwei kongruente Hälften geteilt. Das innerhalb dieses krummlinigen Zweiecks gelegene Stück der Zentralen gehört den beiden Radien der zwei Kreise gleichzeitig an, welche auf der Zentralstrecke liegen.

Frage 110. Wie gestaltet sich dieselbe Ueberlegung für den Fall, dass zwei Kreise einen Punkt der Zentralen selbst gemeinsam haben?

Figur 107.



Erkl. 238. Die Sätze 33 und 34 erfahren vielfache Anwendungen in beiderlei Auffassungen: Sowohl das Eintreten der Berührung bezw. des Schneidens unter angegebenen Bedingungen wird damit ausgesprochen, als auch das Vorhandensein letzterer Bedingungen bei gegebener Berührung bezw. Durchschneidung. Ist nämlich eine Sehne oder Tangente gegeben, so muss deren Mittelsenkrechte durchs Zentrum gehen, also muss die Mittelsenkrechte der gemeinsamen Sehne oder Tangente mit der Zentralen zusammenfallen und umgekehrt. Näheres über die vielfache Verwendung dieser Sätze findet man in den Aufgaben über das Schneiden und Berühren von Kreisen.

Erkl. 239. Der Berührungspunkt zweier Kreise kann angesehen werden als Vereinigung zweier zusammengerückten Schnittpunkte, also als ein doppelter Punkt. Dies macht es auch begreiflich, dass ausser dem einzigen Berührungspunkte die zwei Kreise keinen gemeinsamen Punkt mehr haben können. Denn da der Berührungspunkt für zwei Punkte zählt, so wäre ja ein weiterer Punkt ein dritter.

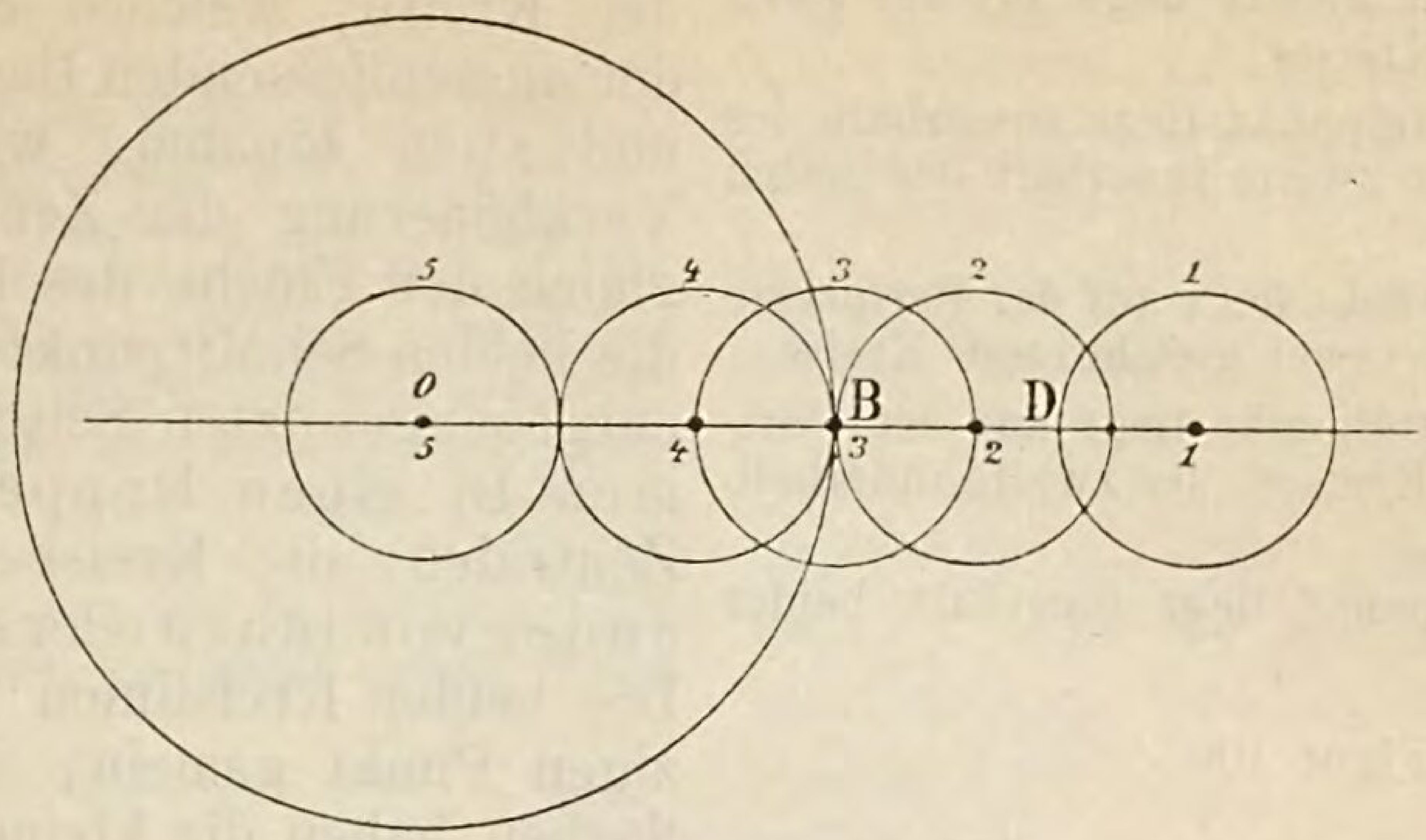
Erkl. 240. Nicht nur von Kreisen, sondern von krummen Linien im allgemeinen sagt man, sie berühren einander, wenn zwei ihrer Schnittpunkte einander unendlich nahe rücken oder zusammenfallen. Dann ist nach Erkl. 54 die Verbindungslinie dieser Punkte, die vorher Sehne war, zur gemeinsamen Tangente mit gemeinsamem Berührungspunkte geworden.

Antwort. Wenn zwei Kreise einen Punkt der Zentralen gemeinsam haben, so ist dieser Punkt Endpunkt der in der Zentrallinie liegenden Radien beider Kreise. Einen weiteren Punkt ausserhalb der Zentralen können die Kreise dann keinenfalls gemeinsam haben, da sie sonst drei gemeinsame Punkte haben müssten und zusammenfielen. Einen zweiten Punkt der Zentralen selbst könnten sie auch nicht gemein haben, da jeder Kreis mit derselben überhaupt nur die Endpunkte seines Durchmessers gemein hat, und Gleichheit dieser Durchmesser wieder Zusammenfallen beider Kreise zur Folge hätte.

Errichtet man in dem gemeinsamen Zentralenpunkte die Senkrechte auf der Zentralen, so ist dieselbe Tangente an jeden von beiden Kreisen. Die Kreise haben also eine gemeinsame Tangente mit gemeinsamem Berührungspunkte: man sagt, die Kreise berühren einander. Es ergibt sich also der

Satz 34. Zwei Kreise können einander nur in **einem**, auf der Zentralen liegenden Punkte berühren: die Senkrechte der Zentralen im Berührungspunkte ist gemeinschaftliche Tangente beider Kreise.

Figur 108.



Frage 111. Welche gegenseitigen Lagen können zwei Kreise einnehmen, und wie kann man diese Lagen finden?

Antwort. Um die verschiedenen gegenseitigen Lagen zweier Kreise zu untersuchen, denke man sich etwa einen grössern Kreis feststehend und einen kleinern Kreis auf der Zentralen ihrer ersten Lage bewegt, bis sein Mittelpunkt diese ganze Linie durchlaufen hat.

1) Ist sodann der Mittelpunkt des kleinern Kreises in weiter Ferne, so liegen die Kreise vollständig ausserhalb einander, haben keinen gemeinsamen Punkt noch Flächenteil.

2) Rücken die Kreise einander näher, so wird die Zentralstrecke und auch das zwischen beiden Kreisen liegende Stück der Zentrallinie kleiner und zuletzt wird letzteres gleich Null, wenn die beiden Kreise einander von aussen oder ausschliessend berühren. Die beiden Kreise haben diesen einzigen Punkt, aber keinen Flächenteil gemeinsam.

3) Rückt der kleinere Kreis noch näher gegen den Mittelpunkt des grössern, so wird die Zentralstrecke noch kürzer, der Berührungspunkt löst sich auf in die zwei symmetrischen Schnittpunkte der beiden Kreise; die Kreislinien haben zwei gemeinsame Punkte, die Kreisflächen ein gemeinsames Flächenstück, ein (krummliniges) Zweieck.

Ein besonderer Fall dieser gegenseitigen Lage beider Kreise ist es, wenn der Mittelpunkt des einen Kreises auf der Peripherie des andern liegt.

Erkl. 241. Dass man auf nebenstehende Weise alle möglichen verschiedenen gegenseitigen Lagen der beiden Kreise erschöpft, folgt:

1) aus der Symmetrie ihrer Gesamtfigur in Bezug auf die Zentrale,

2) daraus, dass gegenseitige Bewegung beider Kreise oder nur Bewegung des grösseren Kreises gegen den festen kleineren keine andern gegenseitigen Lagen hervorbringt.

Erkl. 242. In Figur 108 ist von jeder der fünf verschiedenen Lagen ein Fall dargestellt; und zwar vom dritten und fünften gerade der ausgezeichnete Fall, dass der Mittelpunkt des einen Kreises auf der Peripherie oder auf dem Mittelpunkte des andern Kreises liegt. Die allgemeinen Fälle dieser beiden Beziehungen finden sich in den Figuren 106, 123 bis 125 dargestellt.

Erkl. 243. Weitere besonderen Lagen beider Kreise treten ein bei besonderen Grössenbeziehungen ihrer Radien. So könnte der Einzelfall, dass der Mittelpunkt des grösseren Kreises auf die Peripherie des kleinen zu liegen kommt, bei Figur 108 erst in der fünften Gruppe auftreten, bei Figur 106 aber schon in der dritten. Wird in Figur 106 der kleinere Kreis gegen den Mittelpunkt des grössern verschoben, so rückt erst der Mittelpunkt 2 auf die Peripherie 1, alsdann auch bald der Mittelpunkt 1 auf die Peripherie 2, beides während die Kreise einander noch in zwei Punkten schneiden. Es kann auch beides gleichzeitig eintreffen, wenn nämlich die Radien beider Kreise gleichgross sind.

Erkl. 244. Man wird also bei schneidenden Kreisen je nach der Grösse ihrer Radien noch sechs Fälle auseinanderzuhalten haben (siehe Figur 109):

1) jeder Mittelpunkt liegt ausserhalb des andern Kreises,

2) der eine Mittelpunkt liegt ausserhalb des andern Kreises, der zweite liegt auf der Peripherie des ersten Kreises,

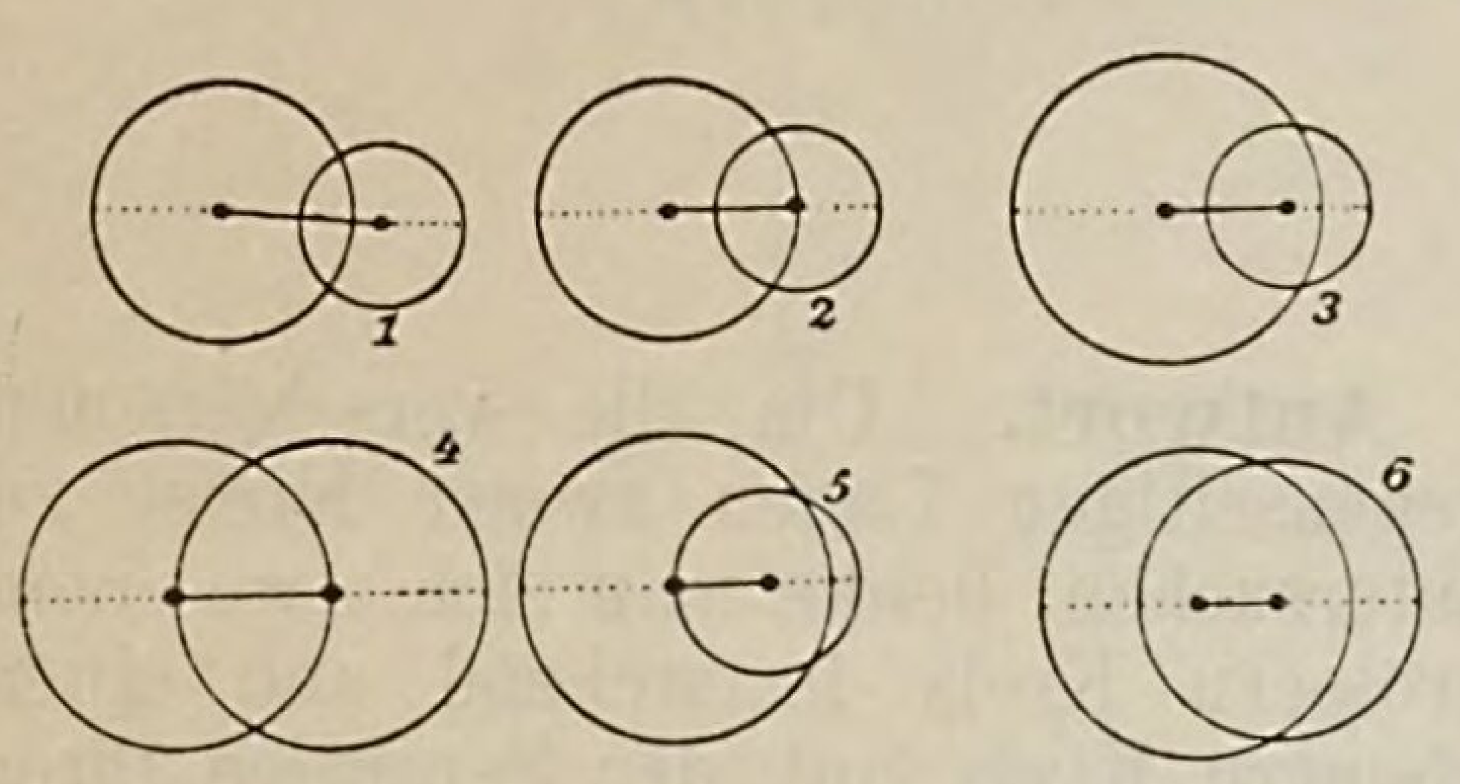
3) der eine Mittelpunkt liegt ausserhalb des andern Kreises, der zweite innerhalb des ersten Kreises,

4) jeder Mittelpunkt liegt auf der Peripherie des andern Kreises (zwei gleichgrosse Kreise),

5) der eine Mittelpunkt liegt auf der Peripherie des andern Kreises, der zweite innerhalb des ersten Kreises,

6) jeder Mittelpunkt liegt innerhalb beider Kreise.

Figur 109.



Erkl. 245. Auch bei dem Einschliessen des kleinern Kreises durch den grössern mit und ohne (einschliessende) Berührung sind die drei Fälle zu unterscheiden, dass der Mittelpunkt des grossen Kreises:

1) ausserhalb des kleinern Kreises liegt, oder

2) auf der Peripherie des kleinern Kreises, oder

3) innerhalb des kleinern Kreises.

Alle diese Fälle sind durch Zeichnung leicht herzustellen und übersichtlich auseinanderzuhalten.

4) Das gemeinsame Flächenstück beider Kreise, welches unmittelbar nach der ausschliessenden Berührung entstand und stets zunahm, wird bei weiterer Verkleinerung der Zentralstrecke ganz gleich der Fläche des kleinern Kreises, die beiden Schnittpunkte rücken auf der entgegengesetzten Seite wieder zusammen in einen Doppelpunkt auf der Zentralen: die Kreise berühren einander von innen oder einschliessend. Die beiden Kreislinien haben einen einzigen Punkt gemein, die beiden Kreisflächen haben die kleinere Fläche völlig gemeinschaftlich.

5) Wird die Zentralstrecke noch kürzer, so befindet sich der kleinere Kreis völlig im Innern des grössern, die Kreislinien haben keinen gemeinsamen Punkt, aber die Fläche des kleinern ist beiden Kreisflächen gemeinschaftlich.

Ein besonderer Fall dieser gegenseitigen Lage beider Kreise ist es, wenn der Mittelpunkt beider Kreise zusammenfällt, so dass die Zentralstrecke gleich Null wird: dann heissen die Kreise konzentrisch.

6) Bei weiterer Bewegung des kleinern Kreises in derselben Bewegungsrichtung auf der Zentralen entstehen wieder dieselben Lagen wie zuvor nur in umgekehrter Reihenfolge und achsig-symmetrisch zu den vorigen in Bezug auf eine Senkrechte zur Zentralen im Mittelpunkte des grössern Kreises als Achse.

Frage 112. Welche Grössenbeziehung hat die Zentrale zu den beiden Radien bei den vorigen fünf Lagenbeziehungen der beiden Kreise?

Antwort. Aus der Figur 108 erkennt man unmittelbar, dass im ersten Falle, wenn die beiden Kreise ganz auseinander liegen, die Zentralstrecke grösser ist als die Summe der Radien, dass im zweiten Falle, bei der ausschliessenden Berührung, die Zentralstrecke gleich der Summe der beiden Radien ist (siehe auch Figur 107), und dass im vierten Falle bei der einschliessenden Berührung die Zentralstrecke gleich der Differenz der beiden Radien ist. Da der dritte Fall, in

Erkl. 246. Die Richtigkeit der nebenstehenden Aussagen ergibt sich durch folgenden Ansatz, wenn man in Figur 108 die Mittelpunkte mit M, die Berührungspunkte mit B bezeichnet:

1) $M_0 M_1 = M_0 B + BD + M_1 D$
$= r_0 + r_1 + BD > r_0 + r_1$,

2) $M_0 M_2 = M_0 B + M_2 B = r_0 + r_2$
(auch Figur 107: $M_1 M_2 = r_1 + r_2$),

3) $M_0 M_3 = M_0 B = r_0 \begin{cases} < r_0 + r_3 \\ > r_0 - r_3 \end{cases}$
(auch Figur 106: $M_1 M_2 < r_1 + r_2$),

4) $M_0 M_4 = M_0 B - M_4 B = r_0 - r_4$,
5) $M_0 M_5 = 0 < r_0 - r_5$.

Erkl. 247. Für den dritten Fall, wobei die Kreise einander schneiden, lässt sich auch folgende Betrachtung anstellen (siehe Figur 106 und 108): Die Zentralstrecke zwischen den beiden Mittelpunkten M_1 und M_2 bildet die Grundseite eines Dreiecks, dessen Spitze der Schnittpunkt beider Kreise ist, und dessen andere Seiten die Radien r_1 und r_2 sind. Nach dem Satze über die Dreiecksseiten muss also die Seite $M_1 M_2$ grösser sein als die Differenz, aber kleiner als die Summe der beiden andern Seiten, also:

$$r_1 - r_2 < M_1 M_2 < r_1 + r_2.$$

welchem sich die Kreise schneiden, aus dem zweiten durch Verkleinerung, aus dem vierten durch Vergrösserung der Zentralstrecke entsteht, so muss in demselben die Zentrale kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der Radien sein; und da der fünfte Fall, wobei ein Kreis ganz im Innern des zweiten liegt, aus dem vierten durch weitere Verkleinerung der Zentralstrecke entsteht, so muss bei ihm die Zentralstrecke noch kleiner sein als die Differenz der beiden Radien.

Frage 113. Zu welchen Aussagen über die Lagebeziehungen zweier Kreise führen die bisherigen Ueberlegungen?

Antwort. Durch die bisherigen Ueberlegungen wird man zu folgenden Aussagen geführt:

Satz 35. Wenn zwei Kreise:

1) ganz auseinander liegen, so ist ihre Zentralstrecke grösser als die Summe der Radien;

2) wenn zwei Kreise einander ausschliessend berühren, so ist ihre Zentralstrecke gleich der Summe der Radien und der Berührungspunkt innerhalb der Zentralstrecke;

3) wenn zwei Kreise einander schneiden, so ist ihre Zentralstrecke kleiner als die Summe, grösser als die Differenz der Radien;

4) wenn zwei Kreise einander einschliessend berühren, so ist ihre Zentralstrecke gleich der Differenz der Radien, und der Berührungspunkt ausserhalb der Zentralstrecke;

5) wenn von zwei Kreisen einer ganz im andern eingeschlossen wird, so ist ihre Zentralstrecke kleiner als die Differenz der Radien.

Und umgekehrt:

Satz 35a. Ist die Zentralstrecke zweier Kreise:

1) grösser als die Summe der Radien, so liegen die Kreise ganz auseinander;

2) ist die Zentralstrecke zweier Kreise gleich der Summe der

Erkl. 248. Während für die ersten, zweiten, vierten und fünften Fälle der nebenstehenden Behauptungen die Beweise sich unmittelbar aus der Anschauung ergeben, können die andern ausser auf die in voriger Antwort enthaltene Weise auch direkt folgendermassen bewiesen werden:

Wenn zwei Kreise einander schneiden, so müssen Punkte P auf der Zentralstrecke vorhanden sein, die innerhalb beider Kreise liegen, und Punkte Q der Zentrallinie ausserhalb $M_1 M_2$, die ausserhalb des einen, ersten, aber innerhalb des andern, zweiten Kreises liegen. Dann ist:

$$M_1 P < r_1, \quad M_2 P < r_2,$$

also:

$$M_1 P + M_2 P = M_1 M_2 < r_1 + r_2$$

und $M_1 Q > r_1$, aber $r_2 > M_2 Q$, also:

$$M_1 Q + r_2 > M_2 Q + r_1$$

oder:

$$M_1 Q - M_2 Q = M_1 M_2 > r_1 - r_2.$$

Erkl. 249. Für die in Satz 35a ausgesprochene Umkehrung des Satzes 35 III lässt sich ebenfalls unmittelbarer Beweis erbringen:

Von den Punkten des einen, ersten Kreises, ist dem Mittelpunkte des andern, zweiten, nach Satz 2 am nächsten gelegen der eine X, am fernsten der andere Y der Schnittpunkte X und Y seiner Peripherie mit der Zentrallinie, und zwar ist dieser Abstand für beide Punkte:

$$M_1 X = M_1 M_2 - r_2, \quad M_1 Y = M_1 M_2 + r_2.$$

Ist nun nach Voraussetzung:

1) $M_1 M_2 < r_1 + r_2$, so wird $M_1 X < r_1 + r_2 - r_2$, also $M_1 X < r_1$, oder Punkt X liegt innerhalb des Kreises um M_1;

2) $M_1 M_2 > r_1 - r_2$, so wird $M_1 Y > r_1 - r_2 + r_2$, also $M_1 Y > r_1$, oder Punkt Y liegt ausserhalb des Kreises um M_1.

Wenn also Punkte sowohl innerhalb, als auch ausserhalb des Kreises um M_1 bestehen, welche dem Kreise um M_2 angehören, so müssen beide Kreise einander durchschneiden.

Erkl. 250. Auch die verschiedenen Lagebeziehungen zweier schneidenden Kreise, welche in Figur 109 dargestellt sind, beruhen auf Längenbeziehungen zwischen der Zentralstrecke und dem Radius der beiden Kreise: Es ist nämlich in den ersten drei Fällen der eine Radius kleiner als die Zentralstrecke und der andere erst auch kleiner, dann gleichgross, dann grösser wie die Zentralstrecke; im vierten Falle sind beide Radien gleich der Zentralstrecke, im fünften nur einer gleichgross, der andere grösser, im letzten Falle beide Radien grösser als die Zentralstrecke. Es ist also die Zentralstrecke selbst im ersten und zweiten Falle zwischen der halben und ganzen Radiensumme, im vierten gleich der halben, im fünften und sechsten kleiner als die halbe Radiensumme. Die Radien selbst sind im ersten und letzten Fall beide beliebig, im vierten Falle beide gleich, im zweiten aber muss der eine, im fünften der andere der grössere sein.

Radien, so berühren die Kreise einander ausschliessend in einem Punkte innerhalb der Zentralstrecke;

3) ist die Zentralstrecke zweier Kreise kleiner als die Summe, grösser als die Differenz der Radien, so schneiden die Kreise einander;

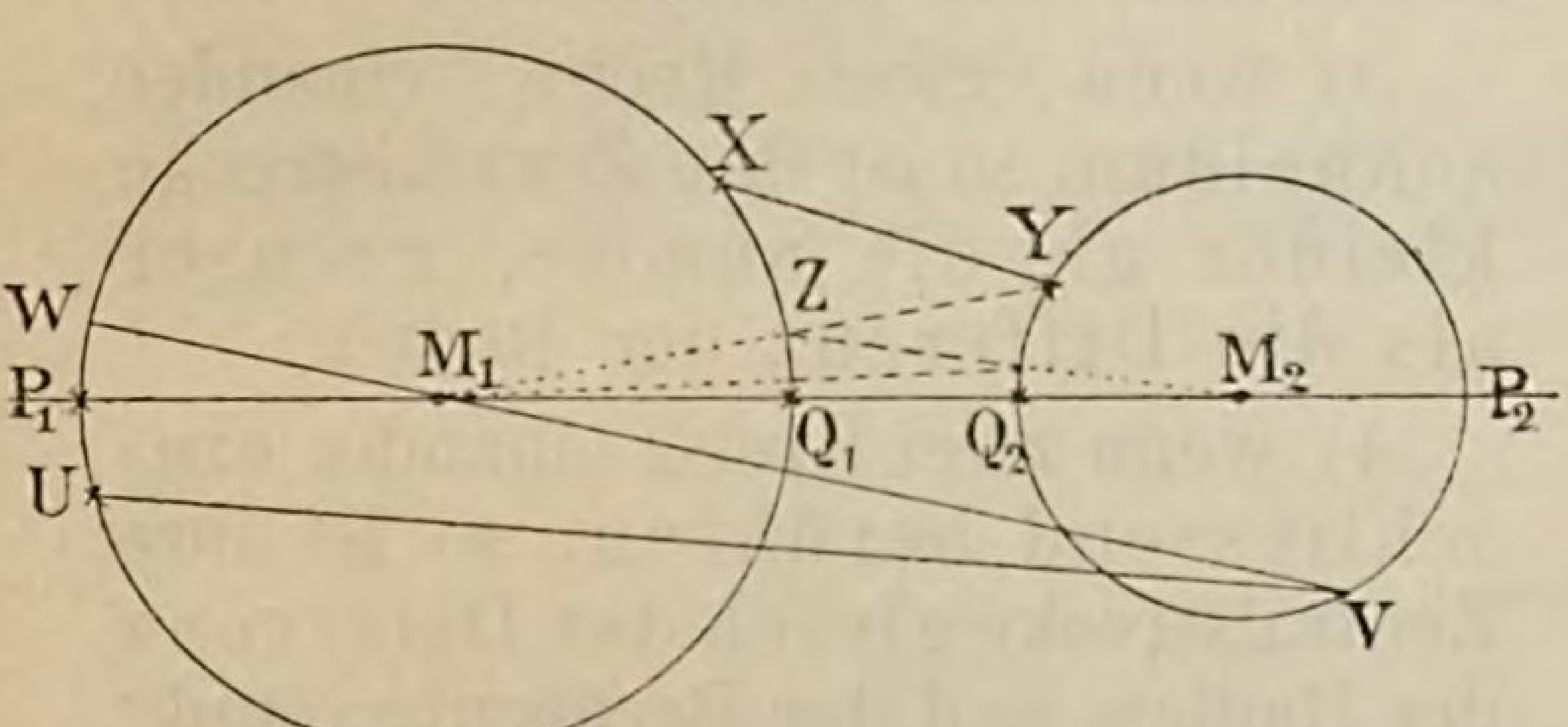
4) ist die Zentralstrecke zweier Kreise gleich der Differenz der Radien, so berühren die Kreise einander einschliessend in einem Punkte ausserhalb der Zentralstrecke;

5) ist die Zentralstrecke zweier Kreise kleiner als die Differenz der Radien, so wird der kleinere ganz vom grösseren eingeschlossen.

b) Ueber die einzelnen Lagenbeziehungen zweier Kreise.

Frage 114. Welche Abstände bestehen zwischen den Punkten zweier ganz auseinander liegenden Kreislinien in derselben Ebene?

Figur 110.



Erkl. 251. Die Zentralstrecke selbst besteht in Figur 110 aus drei aneinanderstossenden Stücken, nämlich:

$M_1M_2 = M_1Q_1 + Q_1Q_2 + M_2Q_2 = r_1 + Q_1Q_2 + r_2$,

also in Bestätigung des Satzes 35 grösser als $r_1 + r_2$, nämlich um das Stück Q_1Q_2.

Erkl. 252. Unter allen Strecken vom Punkte Y nach dem Kreis 1 ist nach Satz 2 die kürzeste die auf der Zentralen YM_1 liegende, nämlich YZ. Statt nun die fortgesetzte Zeichnung der Zentralen durchzuführen, könnte man etwas kürzer zum Ziel kommen, wenn man nach Zeichnung der ersten, nämlich eben YM_1 einen andern Weg einschlägt. Setzt man nämlich nun:

$$YZ = YM_1 - M_1Z = YM_1 - r_1$$

Antwort. Unter den Abständen zweier beliebigen Punkte zweier Kreislinien sind am bemerkenswertesten die auf der Zentrallinie gelegenen, nämlich in Figur 110 die vier Stücke P_1P_2, P_1Q_2, Q_1P_1, Q_1Q_2. Bezeichnet man die Länge der Zentralstrecke mit c, so findet man für diese vier Stücke die Grössen:

$$P_1P_2 = P_1M_1 + M_1M_2 + M_2P_2 = c + r_1 + r_2,$$
$$P_1Q_2 = P_1M_1 + M_1M_2 - M_2Q_2 = c + r_1 - r_2,$$
$$Q_1P_2 = M_1M_2 - M_1Q_1 + M_2P_2 = c - r_1 + r_2,$$
$$Q_1Q_2 = M_1M_2 - M_1Q_1 - M_2Q_2 = c - r_1 - r_2.$$

Unter diesen vier Abständen ist also P_1P_2 der grösste, Q_1Q_2 der kleinste. — Um nun mit diesen beiden auch andere beliebige Abstände, wie XY oder UV zu vergleichen, hat man nur den Satz 2 wiederholt anzuwenden. Es ist nämlich XY nach Satz 2 grösser als das Stück YZ auf der Zentralen von Y nach M_1, dieses Stück YZ wieder grösser als das Stück ZM_2 bis zum Kreise, und so kann man fortfahren, bis zuletzt das Stück Q_1Q_2 erhalten wird als kleinstes aller

und ersetzt darin das Stück $M_1 Y$ durch das nach Satz 2 wieder kleinere Stück $M_1 Q_2$, so wird:

$$YZ > M_1 Q_2 - r_1 = M_1 Q_2 - M_1 Q_1 = Q_1 Q_2,$$

also $YZ > Q_1 Q_2$, und da $XY > YZ$, so ist auch $XY > Q_1 Q_2$.

Aehnlich kann man verfahren mit der Strecke UV. Ist die erste Zentrale VW gezogen, und man verändert von da an den Weg der Beweisführung, so setzt man:

$$VW = VM_1 + M_1 W = VM_1 + r_1.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung das Stück VM_1 durch das nach Satz 2 jedenfalls grössere Stück $M_1 P_2$, so wird:

$$VW < M_1 P_2 + r_1 = M_1 P_2 + M_1 P_1 = P_1 P_2,$$

also $VW < P_1 P_2$, und da $UV < VW$, so ist auch $UV < P_1 P_2$.

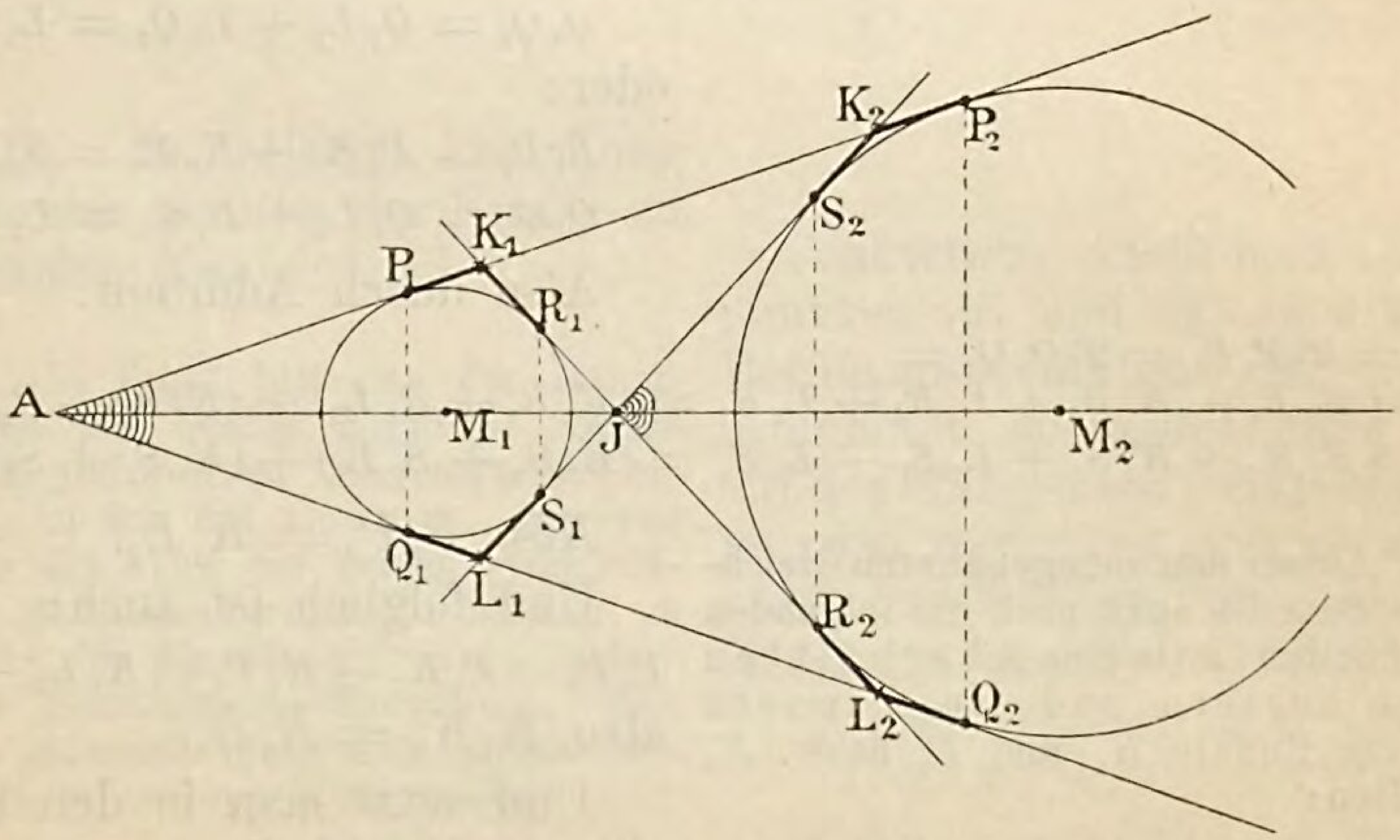
Erkl. 253. Entsprechend der Fassung des Satzes 2a könnte man die nebenstehende Aussage auch so fassen: „Die Abstände zwischen beliebigen Punkten zweier auseinander liegenden Kreislinien sind sämtlich grösser als die zwischen den Kreisen liegende Strecke der Zentralen, und kleiner als die die beiden Durchmesser der Kreise umfassende Strecke der Zentralen.“

Verbindungsstücke zwischen den Kreisen $M_1 M_2$.

Ebenso findet man, dass UV kleiner ist als das Stück VW auf der Zentralen VM_1, dieses Stück VW wieder kleiner als das entsprechende Stück auf der Zentralen WM_2 bis an den äusseren Kreispunkt, und wieder so fortzusetzen, bis endlich das Stück $P_1 P_2$ erhalten wird als grösstes aller Verbindungsstücke zwischen Punkten der Kreislinien $M_1 M_2$.

Satz 36. Es ist also unter allen Verbindungsstrecken zweier beliebigen Punkte auf zwei auseinander liegenden Kreislinien die kleinste und grösste auf der Zentrallinie enthalten, nämlich die erstere gleich der um die Radiensumme verminderten, die letztere gleich der um die Radiensumme vermehrten Zentralstrecke.

Figur 111.



Frage 115. Zu welchem Ergebnis führt die Betrachtung zweier Kreislinien als Umhüllungsfiguren ihrer Tangenten nach Antwort 29 und Figur 22?

Erkl. 254. In Figur 111 sind wegen der achsigen Symmetrie die Punkte P und Q, sowie R und S in beiden Kreisen zur Zentralen symmetrisch, also die vier Strecken $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $R_1 S_1$, $R_2 S_2$ Achsensenkrechte und „Berührungssehnen“ der vier Tangentenpaare.

Ferner ist auch der Kreis um M_1, für das Dreieck $AK_1 L_2$ Inkreis, der Kreis um M_2 für

Antwort. Wird eine jede der beiden Kreislinien durch ihre Berührungslinien erzeugt, so kann eine einzelne dieser Berührungslinien am andern Kreis vorbeigehen, ihn schneiden oder berühren. Im letzteren Falle wird die Erzeugende des einen Kreises zugleich Erzeugende des andern Kreises, man erhält gemeinschaftliche Tangenten beider

dasselbe Dreieck Ankreis, also sind schon nach Satz 25 die Tangentenabschnitte $K_1 R_1 = R_2 L_2$ und $K_1 R_2 = L_2 R_1$. Daraus folgt wieder die Gleichheit aller acht in Figur 111 hervorgehobenen Tangentenabschnitte, und daraus zunächst, dass auch:

$$P_1P_2 = P_1K_1 + K_1P_2 = R_2L_2 + K_1R_2 = K_1L_2,$$

sowie dass:

$$K_1K_2 = K_1P_2 - K_2P_2 = K_1R_2 - K_1R_1 = R_1R_2$$

ist.

Der nebenstehende Satz spricht daher die Gleichheit folgender Stücke aus, wobei A der Schnittpunkt der äussern, J der der innern Tangenten sei:

$$\sphericalangle KAJ = \sphericalangle LAJ;$$

$$\sphericalangle K_1JA = L_1JA,\ K_2JA = L_2JA,$$

$$\sphericalangle K_1JM_2 = L_1JM_2,\ K_2JM_2 = L_2JM_2;$$

$$P_1P_2 = Q_1Q_2 = K_1L_2 = K_2L_1,$$

$$K_1K_2 = L_1L_2 = R_1R_2 = S_1S_2.$$

Kreise (siehe Figur 111). Da bei auseinander liegenden Kreisen weder die Zentrale, noch eine Senkrechte derselben gemeinsame Tangente sein kann, so müssen solche nach Antwort 108 stets in doppelter Anzahl vorhanden sein und zwar als achsig-symmetrische Linien mit symmetrisch entsprechenden Punkten und gleichgrossen Strecken in Bezug auf die Zentrallinie als Achse.

Man erhält also zwei zu einander symmetrische gemeinschaftliche Tangenten, für welche beide Kreise je zu gleicher Seite liegen, als sogenannte äussere Tangenten, und zwei ebenfalls zu einander symmetrische gemeinschaftliche Tangenten, für welche beide Kreise zu verschiedenen Seiten liegen, als innere Tangenten (siehe Figur 111).

Aus der Symmetrie in Bezug auf die Zentrallinie erhält man ferner für die Tangentenabschnitte P_1P_2 bezw. Q_1Q_2 wegen der gleichlangen Tangentenabschnitte folgende Werte:

$$P_1P_2 = P_1K_1 + K_1P_2 = K_1R_1 + K_1R_2$$

$$Q_1Q_2 = Q_1L_2 + L_2Q_2 = L_2R_1 + L_2R_2$$

oder:

$$P_1P_2 = P_1K_2 + K_2P_2 = S_1K_2 + K_2S_2,$$

$$Q_1Q_2 = Q_1L_1 + L_1Q_2 = L_1S_1 + L_1S_2.$$

Also durch Addition:

$$P_1P_2 + Q_1Q_2 = 2\cdot P_1P_2 = 2\cdot Q_1Q_2 = \begin{cases} K_1R_1 + K_1R_2 + L_2R_1 + L_2R_2 = (K_1R_1 + R_1L_2) + (K_1R_2 + R_2L_2) = 2\cdot K_1L_2 \\ S_1K_2 + K_2S_2 + L_1S_1 + L_1S_2 = (K_2S_1 + S_1L_1) + (K_2S_2 + S_2L_1) = 2\cdot K_2L_1 \end{cases}$$

Erkl. 255. Ausser den obengenannten Gleichheiten sind im Satz 13 auch noch die folgenden je acht Gleichheiten zwischen Abschnitten auf je einer äussern und einer innern Tangente vom Punkte K_1 und L_1 bezw. K_2 und L_2 enthalten:

$$K_1P_1 = K_1R_1 = L_1Q_1 = L_1S_1 = K_2P_2 = K_2S_2 = L_2Q_2 = L_2R_2$$

und

$$K_1P_2 = K_1R_2 = L_1Q_2 = L_1S_2 = K_2P_1 = K_2S_1 = L_2Q_1 = L_2R_1;$$

und ebenso Gleichheit aller entsprechenden Winkel an den Punkten K_1 und L_1 unter sich bezw. K_2 und L_2 unter sich.

Zum Beweise hiefür kann ausser dem Nebenstehenden auch die Zusammenfassung der Kreise als Inkreise oder Ankreise in mehrfacher Weise benutzt werden:

1) wie oben M_1 Inkreis und M_2 Ankreis für das Dreieck AK_1L_2: $K_1R_1 = L_2R_2$;

Also $P_1P_2 = K_1L_2$.

Und folglich ist auch:

$$P_1P_2 - P_1K_1 - K_2P_2 = K_1L_2 - K_1R_1 - L_2R_2,$$

also $K_1K_2 = R_1R_2$.

Und setzt man in den beiden ersten obigen Gleichheiten:

$$K_1R_1 + K_1R_2 = L_2R_1 + L_2R_2,$$

und zerlegt diese Summe weiter in:

$$K_1R_1 + K_1R_1 + R_1R_2 = L_2R_2 + R_2R_1 + L_2R_2,$$

so fällt beiderseits R_1R_2 weg, und bleibt $2\cdot K_1R_1 = 2\cdot L_2R_2$ also $K_1R_1 = L_2R_2$.

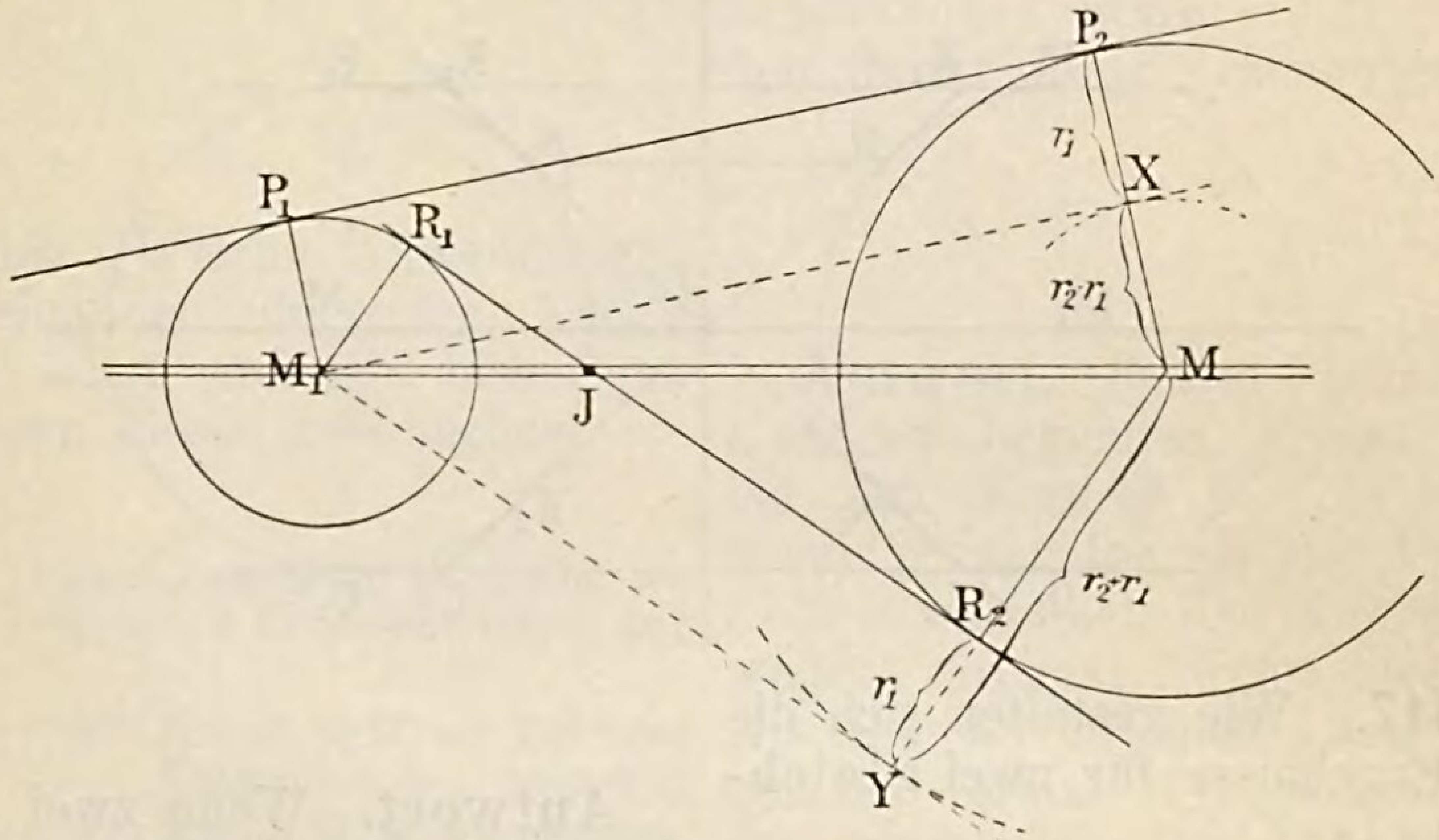
Satz 36a. An zwei ganz auseinander liegende Kreise sind vier gemeinschaftliche Tangenten möglich, zwei äussere und zwei innere. Die beiden äusseren und die beiden inneren

2) M_1 Inkreis und M_2 Ankreis für das Dreieck AK_2L_1: $K_2S_2 = L_1S_1$;

3) M_1 und M_2 Ankreise für das Dreieck K_1JK_2: $K_1R_1 = K_2S_2$;

4) M_1 und M_2 Ankreise für das Dreieck L_1JL_2: $L_1S_1 = S_2R_2$.

Tangenten zweier Kreise schneiden einander je auf der Zentrallinie und bilden mit dieser gleiche Winkel — die zwischen beiden Berührungspunkten oder zwischen entsprechenden Tangentenschnittpunkten unter sich oder mit Berührungspunkten liegenden Abschnitte auf den äusseren Tangenten und auf den inneren Tangenten sind wieder gleich (vergl. Erkl. 254 und 255).



Frage 116. In welcher Beziehung stehen die beiden Radien der Kreise zu den gemeinsamen Tangenten?

Erkl. 256. In Figur 112 sind der Raumersparnis wegen die beiden Figuren, welche für die äusseren und inneren Tangenten sich ergeben würden, in der Art vereinigt, dass von jeder Figur nur die eine der beiden symmetrischen Hälften gezeichnet vorliegt, nämlich in der obern Hälfte für die äussern, in der untern für die inneren gemeinsamen Tangenten. Man hat sich also jedesmal diese eine Hälfte der Figur symmetrisch verdoppelt zu denken.

Erkl. 257. Statt die Parallelen zur gemeinsamen Tangente durch den Mittelpunkt M_1 des kleineren Kreises zu ziehen, könnte man sie auch durch M_2 ziehen. Dann bildet die Parallele zur äussern Tangente P_2P_1 auf der Verlängerung der Strecke P_1M_1 einen Abschnitt M_1X von der Länge $r_2 - r_1$; und ebenso die Parallele zur innern Tangente R_2R_1 auf der Verlängerung der Strecke M_1R_1 einen Abschnitt R_1Y von der Länge r_2, also wieder:

$$M_1Y = r_1 + r_2.$$

Dann wären also die gezogenen Parallelen auch Tangenten an zwei Kreise um M_1 mit Radien $r_2 - r_1$ und $r_2 + r_1$. Die Länge der Parallelen

Antwort. Zieht man von den Mittelpunkten M_1 und M_2 die Radien zu den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten, so stehen diese nach Satz 5 auf den Tangenten senkrecht, also bilden je zwei derselben gleiche korrespondierende bezw. Wechselwinkel von 90^0 und sind daher parallel, nämlich in Figur 111:

$$M_1P_1 \parallel M_2P_2,\ M_1Q_1 \parallel M_2Q_2,$$
$$M_1R_1 \parallel M_2R_2,\ M_1S_1 \parallel M_2S_2.$$

Zieht man auch noch (s. Figur 112) durch M_1 Parallele zu den äusseren oder inneren Tangenten, so ist auch diese Parallele jeweils senkrecht zu denselben beiden Radien wie die Tangenten, bildet also ein Rechteck, nämlich $M_1P_1P_2X$ bezw. $M_1R_1R_2Y$.

Im ersten Rechteck ist als Gegenseite $P_2X = P_1M_1 = r$, also:

$$M_2X = M_2P_2 - P_2X = r_2 - r_1;$$

also würde wegen des rechten Winkels bei X die Parallele M_1X Tangente an

ist in diesem wie im nebenstehenden Falle gleich der Tangentenlänge $P_1 P_2$ bezw. $R_1 R_2$ zwischen den Berührungspunkten.

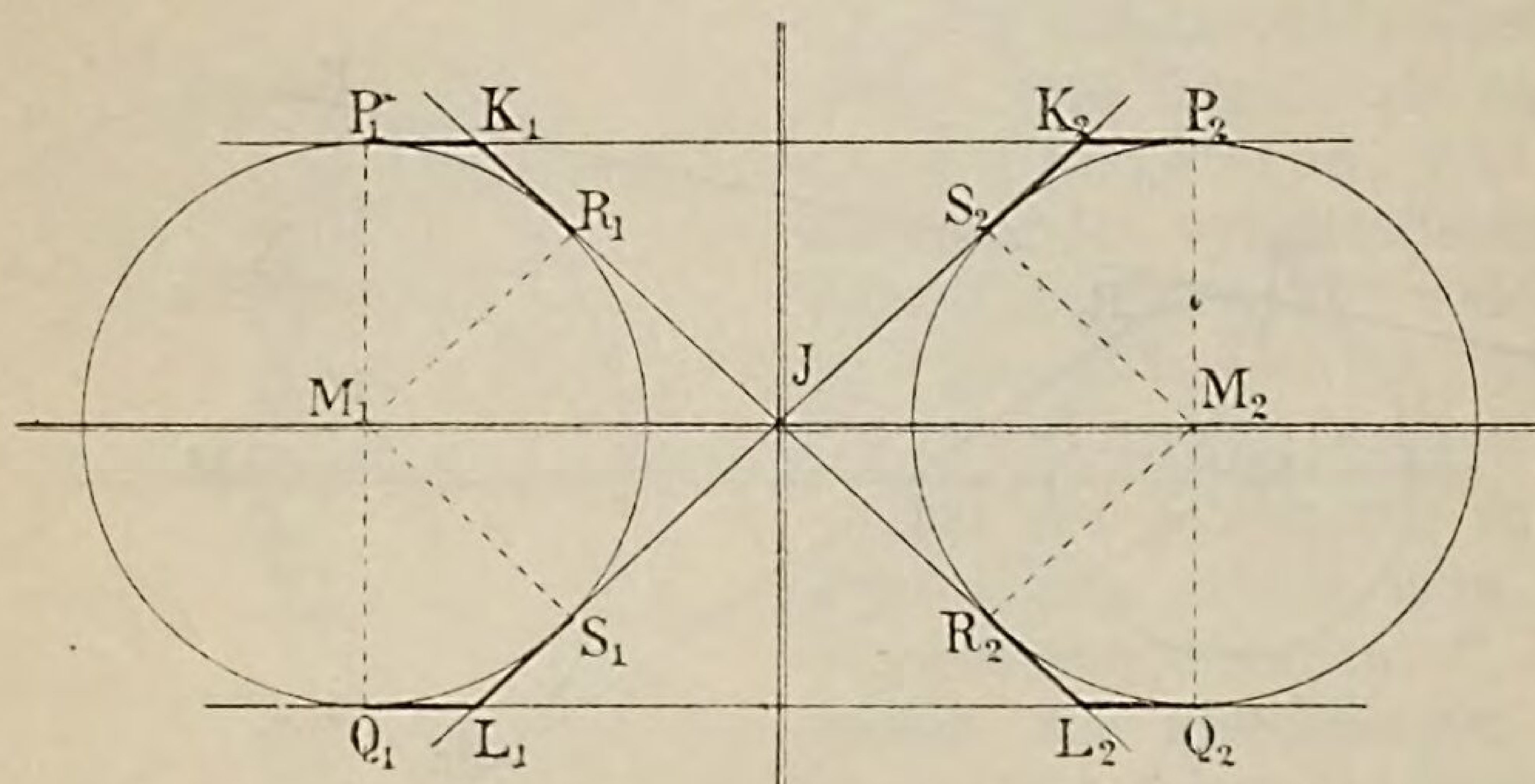
einem Kreis werden, der mit Radius $M_2 X$ von M_2 beschrieben würde.

Ebenso wird im Rechteck $M_1 R_1 R_2 Y$ als Gegenseite $R_2 Y = R_1 M_1 = r_1$, also:

$$M_2 Y = M_2 R_2 + R_2 Y = r_2 + r_1;$$

also würde wegen des rechten Winkels bei Y die Parallele $M_1 Y$ Tangente an einem Kreis werden, der mit Radius $M_2 Y$ um M_2 beschrieben würde.

Figur 113.



Frage 117. Wie gestalten sich die bisherigen Ergebnisse für zwei gleichgrosse Kreise?

Erkl. 258. Die Länge beider äusseren Tangenten zwischen den Berührungspunkten ist bei gleichgrossen Kreisen gleichlang mit der Zentralstrecke, erreicht also hier ihren höchsten Wert; denn wenn bei gleichbleibender Zentralstrecke ungleiche Kreise gezeichnet werden, so ist die äussere Tangente stets kleiner als jene. Es ist nämlich in Figur 112 die Tangentenstrecke $P_1 P_2 = M_1 X_1$, also als Kathete im rechtwinkligen Dreieck $M_1 M_2 X$ kürzer als die Hypotenuse $M_1 M_2$. Die Länge der inneren Tangenten zwischen den Berührungspunkten dagegen bleibt stets kleiner als die Zentralstrecke, denn sowohl in Figur 112 als Figur 113 ist $JR_1 < JM_1$ und $JR_2 < JM_2$, also $R_1 R_2 = JR_1 + JR_2$ auch kleiner als $JM_1 + JM_2 = M_1 M_2$.

Erkl. 259. Ein besonderer Fall der Lagenbeziehung zweier gleichgrossen Kreise wäre es, wenn die Zentralstrecke doppelt so gross würde, als die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten $r_1 = r_2$. Denn dann würde wegen der rechten Winkel bei R und S jedes der Dreiecke MJR oder MJS zu einem solchen der ebengenannten Art, die Vierecke $MRJS$, die sonst Deltoide sind, würden Quadrate, und die Länge der innern Tangenten würde gleich dem Durchmesser eines jeden der Kreise selbst.

Antwort. Wenn zwei auseinanderliegende Kreise gleichgross sind, so ist ihre Gesamtfigur nicht bloss in Bezug auf die Zentrallinie achsig-symmetrisch, sondern auch in Bezug auf die Mittelsenkrechte ihrer Zentralstrecke. Denn wird um diese umgeklappt, so kommen die beiden Durchmesser der Kreise, also auch beide Kreislinien zur Deckung.

Wegen dieser Symmetrie müssen die beiden äusseren Tangenten zu dieser neuen Achse senkrecht stehen, sie werden parallel zur Zentrallinie und zu einander, die in Figur 112 gezogene Parallele $M_1 X$ fällt mit der Zentrallinie zusammen, da die Strecke:

$$M_2 X = r_2 - r_1 = 0$$

wird. Die Radien $M_1 P_1$, $M_2 P_2$ nach den Berührungspunkten werden zur Zentralen senkrecht und bilden ein Rechteck $M_1 M_2 P_1 P_2$. Die äussere gemeinsame Tangente wird also zu einer „Parallelen im Abstande r zur Zentralen“; die Berührungssehne $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ wird Durchmesser. Die inneren Tan-

Erkl. 260. Zu beachten ist auch, dass bei Parallelverschiebung einer äussern Tangente wegen der achsigen — und bei Drehung einer innern Tangente um J wegen der zentrischen Symmetrie aus beiden Kreisen stets gleichlange Sehnenstücke ausgeschnitten werden.

genten müssen wegen der Symmetrie zu beiden Achsen einander auf beiden Achsen, also im Schnittpunkt beider, d. h. im Mittelpunkt der Zentralstrecke schneiden.

Die in Satz 36 und Erkl. 255 aufgestellten Gleichheiten bleiben bestehen mit der Erweiterung, dass auch die nur durch Indices verschiedenen Stücke ebenfalls den gleichen Wert erhalten.

Wegen der achsigen Symmetrie zu den beiden senkrechten Achsen ist die Figur nach Satz 97 des III. Teils auch zentrisch-symmetrisch in Bezug auf den Punkt J als Symmetriezentrum.

Frage 118. Welche Anwendungen zweier auseinander liegenden Kreise finden sich schon in den bisherigen Untersuchungen dieses Lehrbuches?

Antwort. 1) Die Figur zweier auseinander liegenden Kreise ergab sich bei den Figuren 60 bis 63 dreimal, wenn je der Inkreis des Dreiecks mit einem einzelnen der Ankreise — und weitere dreimal, wenn zwei Ankreise mit einander zu einem Paare zusammengefasst werden. Die Winkelhalbierende des zugehörigen Dreieckswinkels ist die Zentrale beider Kreise, zwei Dreiecksseiten sind äussere, bezw. innere Tangenten beider Kreise. Die dritte Dreiecksseite ist die eine der inneren bezw. äusseren Tangenten; die Tangentenabschnitte treten auf dort wie hier, und wegen des am Schnittpunkt der inneren und äusseren Tangenten gelegenen Tangentenwinkels gehen auch die Halbierungslinien der übrigen vier Innen- bezw. Aussenwinkel des Dreiecks durch den Mittelpunkt je eines der Kreise.

Dabei erhielt man noch beim gleichschenkligen Dreieck ein Paar, beim gleichseitigen Dreieck drei Paare gleichgrosser Kreise.

2) Ferner entsteht die Figur zweier auseinander liegenden Kreise bei den Vierecken, welchen zwei Kreise ein- und bezw. angeschrieben werden können.

Und zwar hat man beim Antiparallelogramm in Figur 76 IV bezw. Figur 80 II zwei gleichgrosse Kreise, beim Deltoid in Figur 77 bezw. 81 zwei ungleiche

Erkl. 261. Unter Ausschluss der Fälle, wo zwei einander berührende Kreise entstehen, hat man:

in Fig. 60, 61, —, 63: Kreise $M_0 M_1$ mit äusseren Tangenten b, c, innerer a,
in Fig. 60, 61, —, 63: Kreise $M_0 M_2$ mit äusseren Tangenten a, c, innerer b,
in Fig. 60, —, —, 63: Kreise $M_0 M_3$ mit äusseren Tangenten a, b, innerer c;
in Fig. 60, 61, 62, 63: Kreise $M_1 M_2$ mit inneren Tangenten a, b, äusserer c,
in Fig. 60, 61, 62, 63: Kreise $M_2 M_3$ mit inneren Tangenten b, c, äusserer a,
in Fig. 60, 61, 62, 63: Kreise $M_3 M_1$ mit inneren Tangenten a, c, äusserer b.

Erkl. 262. Auch in Figur 113 ist das Viereck $K_1 L_2 L_1 K_2$ als ein überschlagenes Antiparallelogramm der Art Figur 76 IV oder 80 II anzusehen. Und in Figur 112 sind die Deltoide aus Figur 77 und 81 zu erkennen, nämlich:

1) AK_1JL_1A mit Inkreis M_1 und Ankreis M_2,

2) AK_2JL_2A ebenfalls mit Inkreis M_1 und Ankreis M_2,

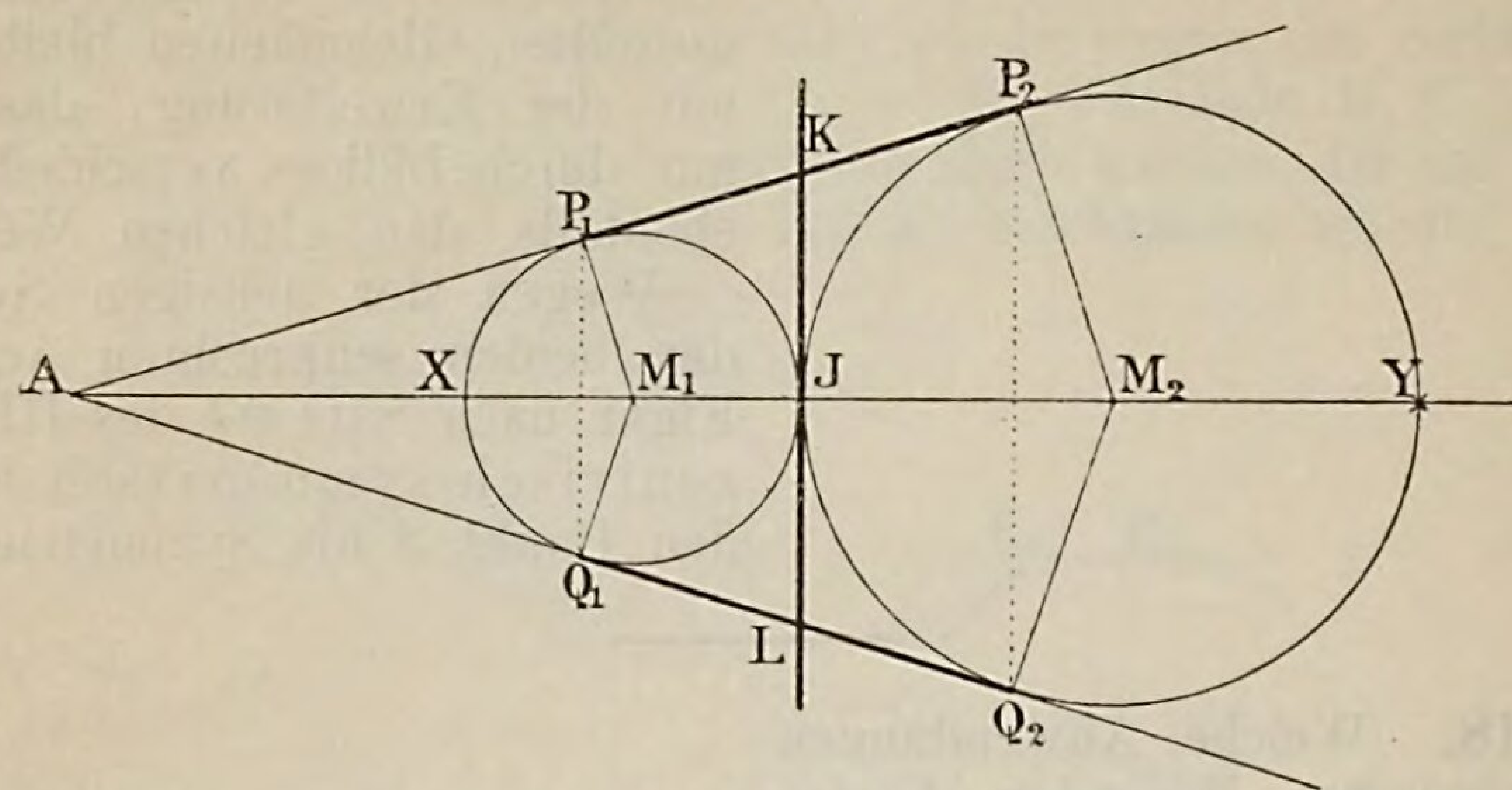
3) das überschlagene Viereck $K_1 K_2 L_1 L_2 K_1$ mit Ankreisen M_1 und M_2.

Umgekehrt folgt aus dieser Uebertragung der Anschauungen, dass auch einerseits beim Deltoid die Tangentenabschnitte an Inkreis und Ankreis von den Schnittpunkten seiner Seiten und deren Verlängerungen gleichlang sind, sowie dass anderseits bei Figur 111 und 113 die vier Schnittpunkte $K_1 K_2 L_1 L_2$ der inneren und äusseren Tangenten stets ein Kreisviereck

bilden, nämlich, dass ausser den beiden Ankreisen auch ein Umkreis durch die vier Punkte geht.

Kreise, für welche je die gleichen Deltoidseiten als äussere und innere Tangenten auftreten.

Figur 114.



Frage 119. Welche Abänderungen erleiden die bisherigen Beobachtungen bei zwei einander ausschliessend berührenden Kreisen?

Erkl. 263. Die Zentralstrecke besteht in Figur 107 und 114 aus zwei aneinander stossenden Stücken, nämlich:

$$M_1 M_2 = M_1 J + M_1 J = r_1 + r_2,$$

wie in Satz 35 angegeben wurde.

Da $XY = 2r_1 + 2r_2 = 2(r_1 + r_2)$ ist, so ist $M_1 M_2 = \frac{1}{2} \cdot XY$, also ist die doppelte Zentralstrecke die Länge, unterhalb welcher alle Abstände zweier Punkte der beiden Kreislinien bleiben müssen.

Erkl. 264. Lässt man die beiden Kreise in Figur 111 und 113 einander näherrücken, so werden die Winkel $K_1 JA$, $L_1 JA$ und ihre Scheitelwinkel immer grösser und wachsen bis zum rechten Winkel, der Winkel $K_1 J K_2$ dagegen wird immer kleiner bis zu Null. Gleichzeitig werden die Strecken JR_1 und JS_2, also auch $R_1 R_2$ und $S_1 S_2$ immer kleiner, und erreichen bei Figur 114 den gemeinschaftlichen Wert Null, während vorher stets die Strecken JR_2 und JS_2 an dem grössern der beiden Kreise grösser waren, als die an dem kleinern.

Erkl. 265. Wollte man Figur 112 für ausschliessend berührende Kreise wiederholen, so würde sich für die äussere Tangente $P_1 P_2$ wieder das Rechteck $M_1 P_1 P_2 X$ ergeben mit dem Kreise um M_2 mit Radius $r_2 - r_1$. Für die innere Tangente aber wird $M_2 Y = r_2 + r_1 = M_2 M_1$, die Tangente $M_1 Y$ in M_1 an diesem Kreis wird selbst Senkrechte zur Zentralen, also parallel zur Tangente KL in Figur 114.

Antwort. 1) Wenn zwei Kreise einander ausschliessend berühren, so haben sie einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Berührungspunkt, also entsteht einmal der Abstand Null zwischen Punkten beider Kreise. Für alle übrigen Abstände zeigt dann eine mit Antwort 114 bezw. Erkl. 252 gleichlautende Ueberlegung, dass die Summe der beiden Durchmesser die grösstmögliche aller Abstandsstrecken ist zwischen zwei beliebigen Punkten beider Kreislinien.

2) Von den gemeinschaftlichen Tangenten bleiben die äusseren unverändert wie bei zwei auseinanderliegenden Kreisen, die beiden inneren dagegen fallen zusammen in die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise im Berührungspunkte. Daher fallen die Punkte R und S mit J zusammen und beide Punkte K und L ergeben je einen einzigen. Von diesem Schnittpunkte der äusseren Tangenten mit den inneren gehen dann je drei gleichlange Tangentenabschnitte an die beiden Kreise, nämlich:

$$KP_1 = KJ = KP_2 = LQ_1 = LJ = LQ_2,$$

also halbiert die innere Tangente die Strecke der äussern. Ferner folgt, dass

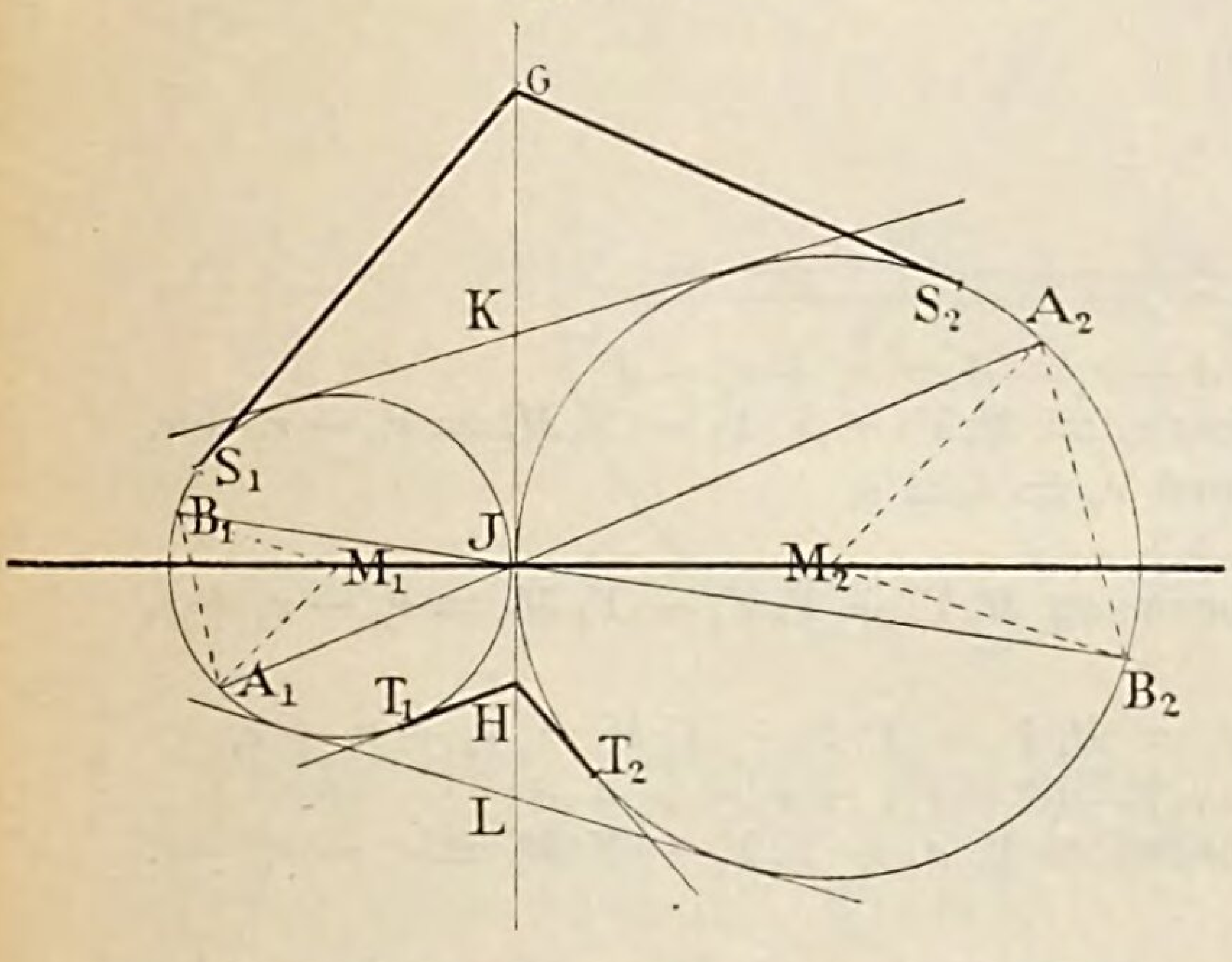
auch die Länge $P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = KL$, also die innere gleich der äussern Tangente ist.

3) Die in Antwort 116 und 117 angestellten Ueberlegungen behalten für ausschliessend berührende Kreise unveränderte Geltung.

4) Kreispaare der untersuchten Art fanden sich bereits in Figur 61 ($M_0 M_3$) und 62 (M_0 mit $M_1 M_2 M_3$).

Frage 120. Welche besonderen Eigenschaften folgen aus der Gemeinsamkeit der Tangente und des Berührungspunktes für die beiden Kreise?

Figur 115.



Antwort. 1) Zieht man von irgend einem Punkte G oder H (s. Figur 115) der gemeinsamen Tangente KL an beide Kreise die Tangenten GS_1, GS_2 oder HT_1, HT_2, so müssen die beiden an denselben Kreis gehenden Strecken nach Satz 13 gleichlang sein, also $GJ = GS_1$ und $GJ = GS_2$. Folglich müssen sowohl die drei Strecken GJ, GS_1, GS_2, als auch HJ, HT_1, HT_2 gleichgross sein, oder

von jedem Punkte der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkte zweier Kreise gehen drei gleichlange Tangentenabschnitte an beide Kreise.

2) Zieht man durch den Berührungspunkt J irgend eine Sekante $A_1 A_2$ der beiden Kreise, so bildet dieselbe mit der Tangente in J für beide Kreise Sehnentangentenwinkel $A_1 JL = A_2 JK$. Da ersterer nach Satz 17 gleich der Hälfte des Bogens $A_1 T_1 J$ ist, und letzterer gleich der Hälfte des Bogens $A_2 S_2 J$, so findet man,

dass eine Sehne durch den Berührungspunkt zweier Kreise in beiden Kreisen Bogenstücke von gleichem Mittelpunktswinkel ausschneidet, also mit parallelen Radien.

3) Zieht man eine zweite Sehne $B_1 B_2$ durch den Berührungspunkt, so wird durch die Verbindungslinien $A_1 B_1$ bezw. $A_2 B_2$ je ein Peripheriewinkel auf dem gleichgrossen Bogen gebildet, nämlich:

Erkl. 266. Denkt man sich auf der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt den Punkt G wandernd von oben aus dem Unendlichen nach K, J, L und weiter ins Unendliche, so ist ursprünglich in unendlicher Ferne der Winkel gleich Null, die Tangentenabschnitte unendlich und parallel der Linie GH selbst als Tangenten in den Endpunkten der beiden Durchmesser. Solange dann G oberhalb K bleibt, bleibt der Winkel $S_1 G S_2$ ein hohler, die Berührungspunkte $S_1 S_2$ bleiben ausserhalb P_1 und P_2. Dann wird der Winkel überstumpf und im Punkte J wird er $360^0 = 0^0$, um jenseit J dieselben Werte rückwärts zu durchlaufen; dabei bleiben die Berührungspunkte T_1 und T_2 wieder innerhalb der Bogen $Q_1 J$ und $Q_2 J$, solange Punkt H innerhalb JL bleibt.

Erkl. 267. Nach der Anschauungsweise in Satz 16 f kann man für nebenstehenden Satz auch sagen: Eine durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehende Sekante bildet Sehnen, welche von den Peripheriepunkten beider Kreise unter dem gleichen Winkel gesehen werden.

Und den letzten Satz kann man umkehren in folgender Weise: Zieht man durch die Kreismittelpunkte oder durch die Schnittpunkte A_1 und A_2 einer durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehenden Sekante beliebige Parallelen ($A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$), so liegen die Kreisschnittpunkte dieser Parallelen in beiden Kreisen auf einer Geraden durch den Berührungspunkt. — Denn wenn man die Dreiecke JA_1B_1 und JA_2B_2 untersucht, so ist wegen der Sekante A_1JA_2 der $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$, ferner wegen der Parallelität auch $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$, folglich muss auch der dritte Winkel $\sphericalangle A_1JB_1 = A_2JB_2$, also:

$$\sphericalangle B_1JB_2 = 180^0.$$

sein.

$$\sphericalangle A_1B_1J = \frac{1}{2}\widehat{A_1T_1J}$$

und

$$\sphericalangle A_2B_2J = \frac{1}{2}\widehat{A_2S_2J},$$

also sind die Winkel $A_1B_1J = A_2B_2J$. Da diese Winkel ausserdem der Lage nach Wechselwinkel sind, so ergibt sich, dass

die Verbindungssehnen der Schnittpunkte je zweier durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehenden Sekanten in beiden Kreisen parallel sind.

Frage 121. Welche Abstandsstrecken entstehen zwischen den Punkten zweier schneidenden Kreise?

Erkl. 268. Wenn an den sechs Lagebeziehungen der Figur 109 die Durchführung für die Lage der Zentralstrecke gemacht wird, so erhält man:

1) $M_0M_1 = M_0X_1 + X_1Y_0 + Y_0M_1 = r_0 - d + d + r_1 - d = r_0 + r_1 - d$
bezw. $= M_0Y_0 + Y_0Y_1 - Y_1M_1 = r_0 - r_1 + e$,

2) $M_0M_2 = M_0X_2 + X_2Y_0 = r_0 - d + d = r_0$ und $r_2 = d = e$,

3) $M_0M_3 = M_0X_3 + X_3M_3 = r_0 - d + r_3 = r_0 + r_3 - d$
bezw. $= M_0Y_0 + Y_0Y_3 - Y_3M_3 = r_0 - r_3 + e$,

4) $M_0M_4 = X_4Y_0 = d = r_0 = r_4 = e$,

5) $M_0M_5 = X_5M_5 = r_5$ und $r_0 = d$ bezw. $M_0M_1 = M_0Y_0 + Y_0Y_5 - Y_5M_5 = r_0 - r_5 + e$,

6) $M_0M_6 = X_6Y_0 - X_6M_0 - Y_0M_6 = d - (d - r_0) - (d - r_6) = r_0 + r_6 - d$
bezw. $= M_0Y_0 + Y_0Y_6 - Y_6M_6 = r_0 - r_6 + e$.

Wo hierin nicht ausdrücklich $r_1 + r_2 - d$ oder $r_1 - r_2 + e$ steht, kann dieser Ausdruck dadurch herbeigeführt werden, dass der Posten $r_2 - d$ oder $-r_2 + e$ beigefügt wird; denn es ist in solchen Fällen stets $r_2 = d$ bezw. $r_2 = e$.

Erkl. 269. Statt mit der Strecke $Y_1Y_2 = e$ hätte die Durchführung auch gemacht werden können mit der Strecke $X_1X_2 = f$ und hätte dann ergeben $c = r_2 - r_1 + f$. Da aber in den Figuren 109 stets der Radius des ersten Kreises grösser ist als der des zweiten, so ist $r_1 - r_2$ positiv, $r_2 - r_1$ negativ, und daher f stets grösser als e.

Dass wirklich:

$$c = r_1 - r_2 + e = r_2 - r_1 + f,$$

lässt sich leicht bestätigen, da dann durch Umsetzung:

$$2r_1 + e = 2r_2 + f, \text{ beides} = X_1Y_2.$$

Erkl. 270. Zwischen c, e, f allein besteht die Gleichung $c = \frac{1}{2}(e + f)$, denn Addition von $c = r_1 - r_2 + e = r_2 - r_1 + f$ liefert $c + c = e + f$.

Antwort. 1) Die Abstandsstrecke der Mittelpunkte selbst ist M_1M_2. Bezeichnet man in Figur 116 mit X_1Y_1 und X_2Y_2 die auf der Zentrallinie liegenden Durchmesser der beiden Kreise in gleicher Richtung, mit d das Stück X_2Y_1 und mit e X_1Y_2, so setzt sich M_1M_2 in den sechs verschiedenen Lagen zweier schneidenden Kreise, welche in Figur 109 dargestellt sind, verschiedenermassen zusammen. Es ist aber jedesmal (vergl. Erkl. 253) die Zentralstrecke kleiner als $r_1 + r_2$, nämlich um das Stück d, und grösser als $r_1 - r_2$, nämlich um das Stück e.

2) Wenn zwei Kreise einander schneiden, so haben sie zwei gemeinsame Punkte, also kommt zweimal der Abstand Null vor zwischen Punkten beider

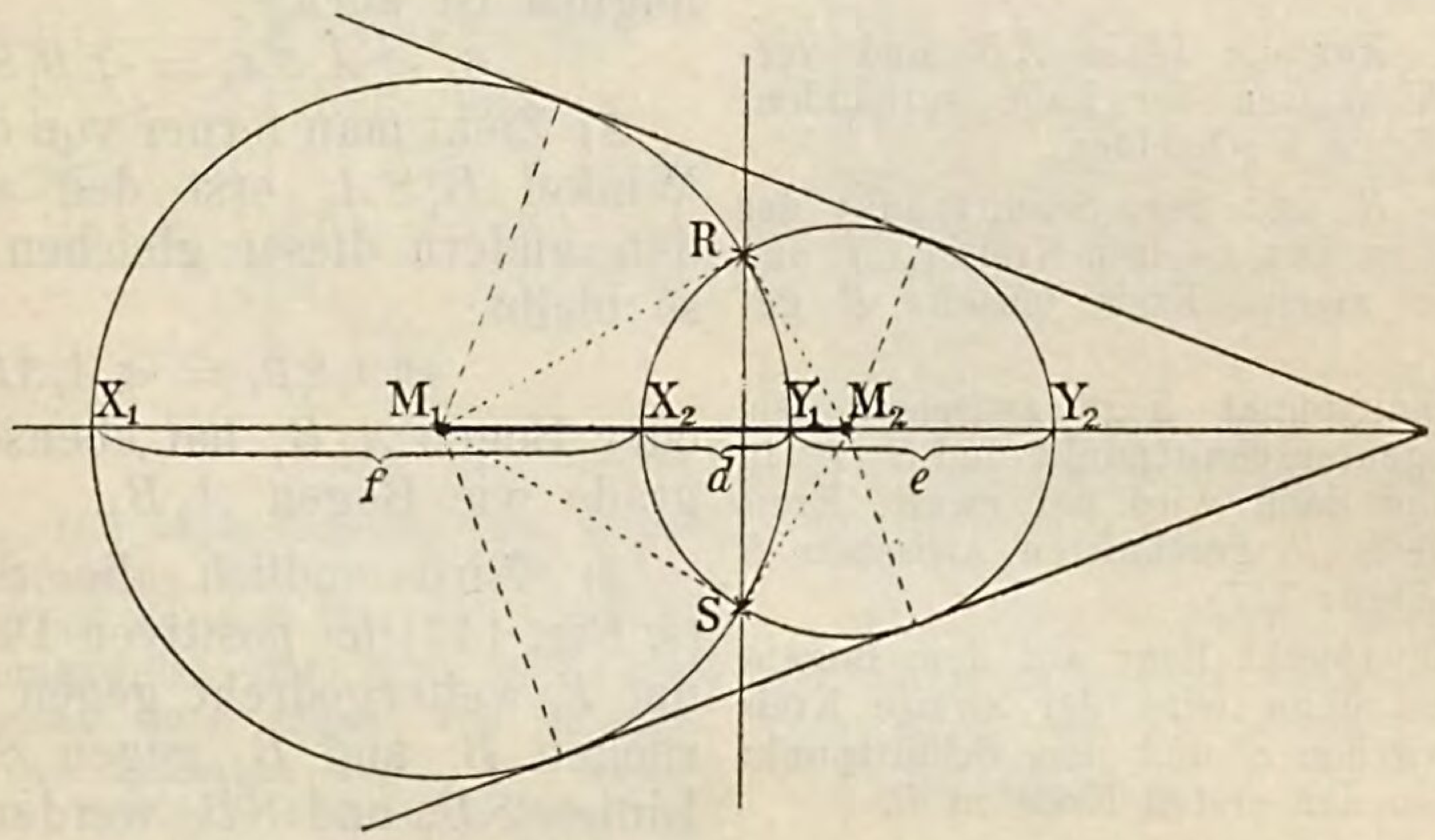
Kreise. Für alle übrigen Punkte der beiden Kreislinien zeigt sich, wie in Antwort 114 bezw. Erkl. 252, dass die auf der Zentrallinie liegende Strecke X_1Y_2 die grösstmögliche aller Abstandsstrecken ist zwischen zwei beliebigen Punkten beider Kreislinien. Bezeichnet man die Länge der Zentralstrecke mit c, so ist:

$$X_1Y_2 = c + r_1 + r_2,$$

also nach vorigem:

$$2r_1 \text{ oder } 2r_2 < X_1Y_2 < 2(r_1 + r_2).$$

Figur 116.



Frage 122. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Tangenten zweier schneidenden Kreise?

Erkl. 271. In Figur 116 ist der besondere Fall dargestellt, dass $\sphericalangle \varphi = 90^0$ ist. Wenn dann der Schnittpunkt R mit den Mittelpunkten verbunden wird, so ist jeder dieser Radien senkrecht auf seiner Tangente, muss also mit der andern Tangente zusammenfallen, da diese ja ebenfalls auf der vorigen Tangente senkrecht stehen soll. Wenn also zwei Kreise einander rechtwinklig schneiden, so geht die Tangente des einen Kreises im Berührungspunkt je durch den Mittelpunkt des andern Kreises.

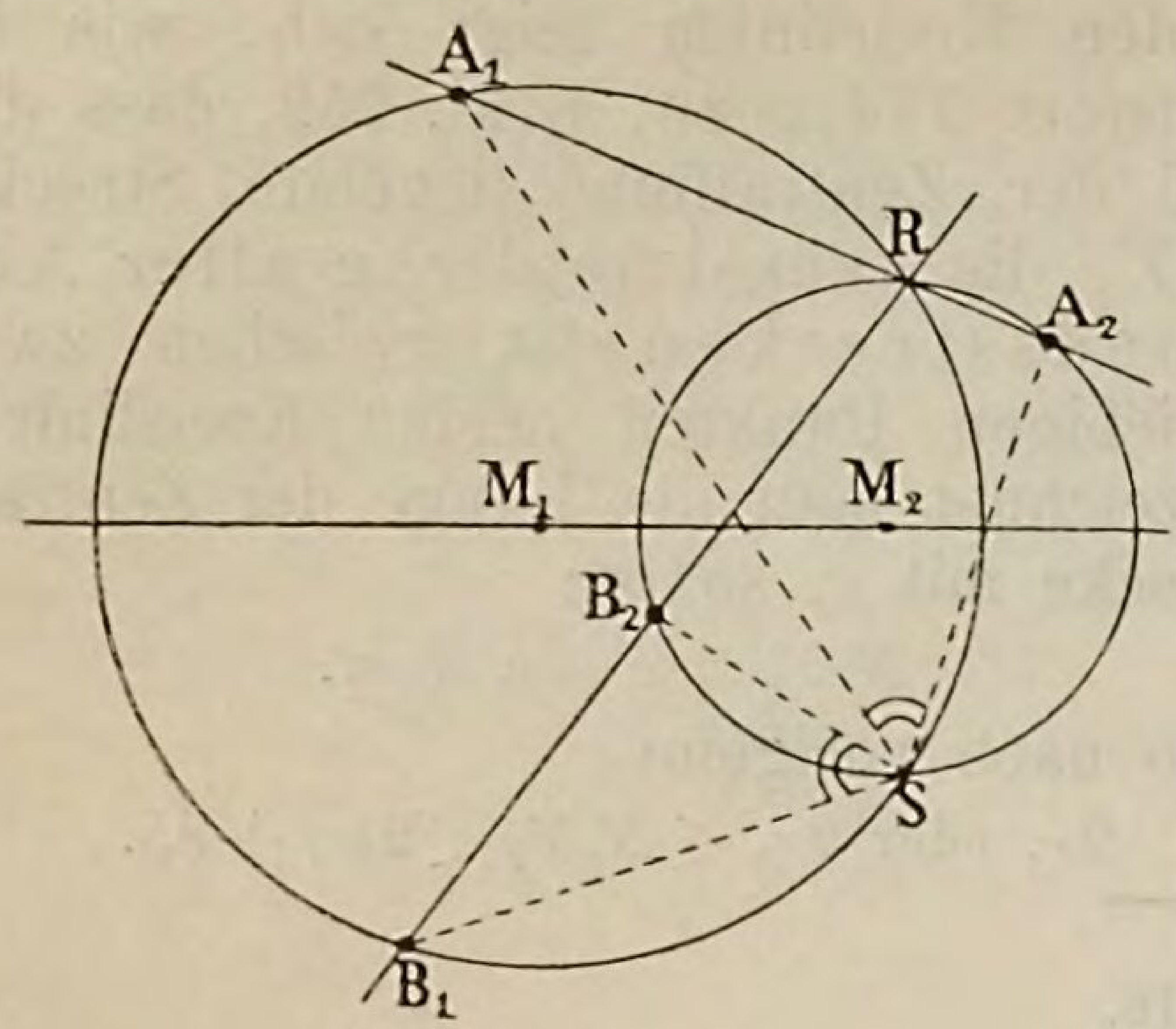
Antwort. 1) Wenn zwei Kreise einander schneiden, so behalten dieselben zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten bei, die inneren Tangenten aber verschwinden vollständig. An deren Stelle dagegen tritt die gemeinschaftliche Sehne RS der beiden Kreise.

2) In den Schnittpunkten R und S der beiden Kreise gibt es an jeden der Kreise eine Tangente, und der Schnittwinkel φ dieser beiden Tangenten heisst der Schnittwinkel der beiden Kreise; man sagt daher, die Kreise schneiden einander unter dem Winkel φ, wenn die Tangenten in den Schnittpunkten den Winkel φ bilden.

Frage 123. Welche Eigentümlichkeiten zeigen die durch den Schnittpunkt zweier Kreise gehenden Sekanten?

Antwort. 1) Zieht man durch den Schnittpunkt R (s. Figur 117 und 118)

Figur 117.



Erkl. 272. Für die Linie AR sind verschiedene Möglichkeiten der Lage vorhanden: Sie kann den Kreis 1 schneiden:

1) zwischen R und dem Schnittpunkt der Tangente in R an den zweiten Kreis (A_1), und dann wird der zweite Kreis jenseits R geschnitten (A_2).

2) Der Schnittpunkt liegt zwischen dem genannten Tangentenschnittpunkt und S (B_1 in Figur 117), und dann wird der zweite Kreis ebenfalls diesseits R geschnitten zwischen R und S (B_2 in Figur 117).

3) Der Schnittpunkt liegt auf dem Bogenstück SR, und dann wird der zweite Kreis geschnitten zwischen S und dem Schnittpunkt der Tangente an den ersten Kreis in R.

Erkl. 273. Im ersten der genannten Fälle umfasst die Strecke $A_1 A_2$ den Punkt R zwischen sich, im zweiten Falle liegt R ausserhalb $B_1 B_2$ jenseits B_2, im dritten Falle läge R ausserhalb $C_1 C_2$ jenseits C_1. Dabei sind jeweils die Grössen der Peripheriewinkel zu beachten; denn in jedem Kreise treten zweierlei zu einander supplementäre Grössen auf, deren eine auf dem einen Bogen RS, deren andere auf dem andern Bogen RS steht.

Erkl. 274. Bei dem Uebergang der vom Punkte R ausgehenden Linie durch die Lage der Sehne RS springt der Winkel B_2SB_1 aus dem einen Scheitelwinkel der Tangenten in den andern Scheitelwinkel über, dabei dieselbe Grösse festhaltend. — Der Winkel dieser Tangenten oder Schnittwinkel beider Kreise kann verschieden gross sein: In Figur 117 ist er ein spitzer, in Figur 118 ein stumpfer, in Figur 116 ein rechter.

Erkl. 275. Beim Uebergang des Punktes A_1, B_1 u. s. w. gegen den Punkt S (oder R) selbst wird die Linie AR zunächst Tangente an den Kreis M_2, von da an schneidet sie den Kreis M_2 in Punkten des Bogens RS (B_2 in Figur 117), und bis A ganz nach S gelangt, fällt B_2 auch nach S, und die Linie B_1S wird Tangente in S

die Sehnen A_1RA_2 und B_1RB_2, so stehen im Kreise um M_1 die Peripheriewinkel A_1 und B_1 über demselben Bogen RS, also gleichgross. Im Kreise um M_2 sind die Peripheriewinkel A_2 und B_2 in Figur 118 ebenso gleich, in Figur 117 über den beiderlei Bogen RS, also supplementär, nämlich:

$$\sphericalangle A_2 = 180^0 - \sphericalangle RB_2S = \sphericalangle B_1B_2S.$$

Vergleicht man daher die Winkel der Dreiecke A_1A_2S und B_1B_2S, so findet man:

$$1)\ \sphericalangle SA_1A_2 = \sphericalangle SB_1B_2,$$
$$2)\ \sphericalangle SA_2A_1 = \sphericalangle SB_2B_1,$$

folglich ist auch:

$$3)\ \sphericalangle A_1SA_2 = \sphericalangle B_1SB_2.$$

2) Zieht man ferner von dem grössten Winkel B_1SA_2 erst den einen, dann den andern dieser gleichen Winkel ab, so bleibt:

$$\sphericalangle A_1SB_1 = \sphericalangle A_2SB_2,$$

oder Bogen A_1B_1 hat ebensoviel Bogengrade wie Bogen A_2B_2.

3) Wird endlich die Sekante RB (s. Fig. 117) im positiven Drehungssinne um R weitergedreht gegen RS hin, so rücken B_1 und B_2 gegen S selbst, die Linien SB_1 und SB_2 werden Tangenten in dem Schnittpunkte S. Der Winkel $A_1SA_2 = B_1SB_2$ geht also in der Grenze über zum Winkel der Tangenten der Kreise, also dem Schnittwinkel der beiden Kreise.

4) Da weiter in Figur 118 wegen der Sekanten A_1RA_2 und B_1RB_2 die Bogen $A_1B_1 = A_2B_2$, und foglich auch wegen der Sekanten A_1SE_2 und D_2SB_1 derselbe Bogen $A_1B_1 = D_2E_2$, so muss auch der vom Winkel A_1 ausgeschnittene Bogen $A_2E_2 = A_2D_2 + D_2E_2$ gleich sein dem vom Winkel B_1 ausgeschnittenen Bogen $D_2B_2 = A_2D_2 + A_2B_2$.

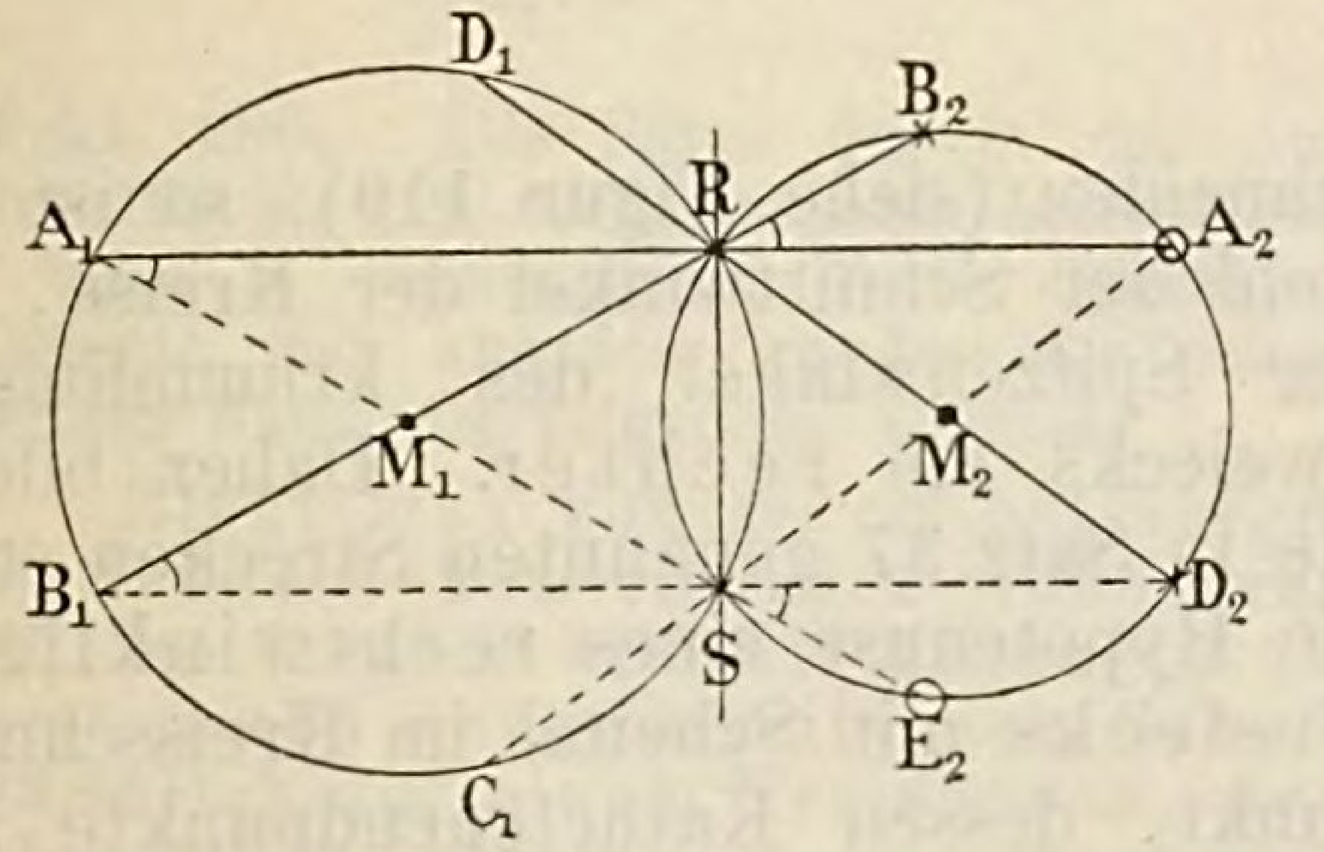
5) Wird die eine der Linien SA_1 oder RB_1 zum Durchmesser, wie in Figur 118, so wird das Dreieck SA_1R bezw. RB_1S zu einem rechtwinkligen mit rechtem Winkel bei R bezw. S. Folglich bildet die Verlängerung der Linie RA_1 bezw. SA_1 auch im andern Kreise anderseits von RS ein rechtwinkliges Dreieck, also muss die Linie

an den Kreis M_1. Dann ist der im Kreis M_2 ausgeschnittene Bogen zu nehmen vom Schnittpunkte dieser Tangente an durch R hindurch bis nach S selbst. Dieser Bogen wird aber ausgeschnitten durch die beiden Tangenten der beiden Kreise im Schnittpunkte S als die Schenkel des Sehnentangentenwinkels, welche eben auch den Schnittwinkel beider Kreise bilden.

SA_2 bezw. RD_2 ebenfalls Durchmesser werden, und die Punkte A_1RA_2 und B_1SD_2 liegen auf einer geraden Linie.

Frage 124. Welche Aussagen über schneidende Kreise ergeben die vorigen Ueberlegungen?

Figur 118.



Antwort. Die Ergebnisse der in voriger Antwort angestellten Ueberlegungen lassen sich folgendermassen in Sätzen aussprechen:

Satz 37. Die Verbindungslinien des einen Schnittpunktes zweier Kreise mit den beiden Kreisschnittpunkten jeder durch den andern Schnittpunkt der Kreise gezogenen Sekante bilden stets gleichgrosse Winkel, nämlich gleich dem Schnittwinkel der beiden Kreise.

Satz 37a. Zwischen den Schnittpunkten zweier durch denselben Schnittpunkt zweier Kreise gehenden Sekanten liegen in beiden Kreisen gleichgrosse Bogen (in gleichem Umlaufssinne).

Satz 37b. Zwischen den Schnittpunkten je zweier von den Peripheriepunkten des einen von zwei schneidenden Kreisen durch die zwei Schnittpunkte gehenden Sekanten mit dem andern Kreise liegen beidemale stets gleichgrosse Bogenstücke, deren Peripheriewinkel dem Schnittwinkel der beiden Kreise supplementär ist.

Satz 37c. Die zweiten Schnittpunkte derjenigen Durchmesser zweier schneidenden Kreise, welche von einem Schnittpunkte ausgehen, liegen auf einer geraden Linie mit dem andern Schnittpunkte.

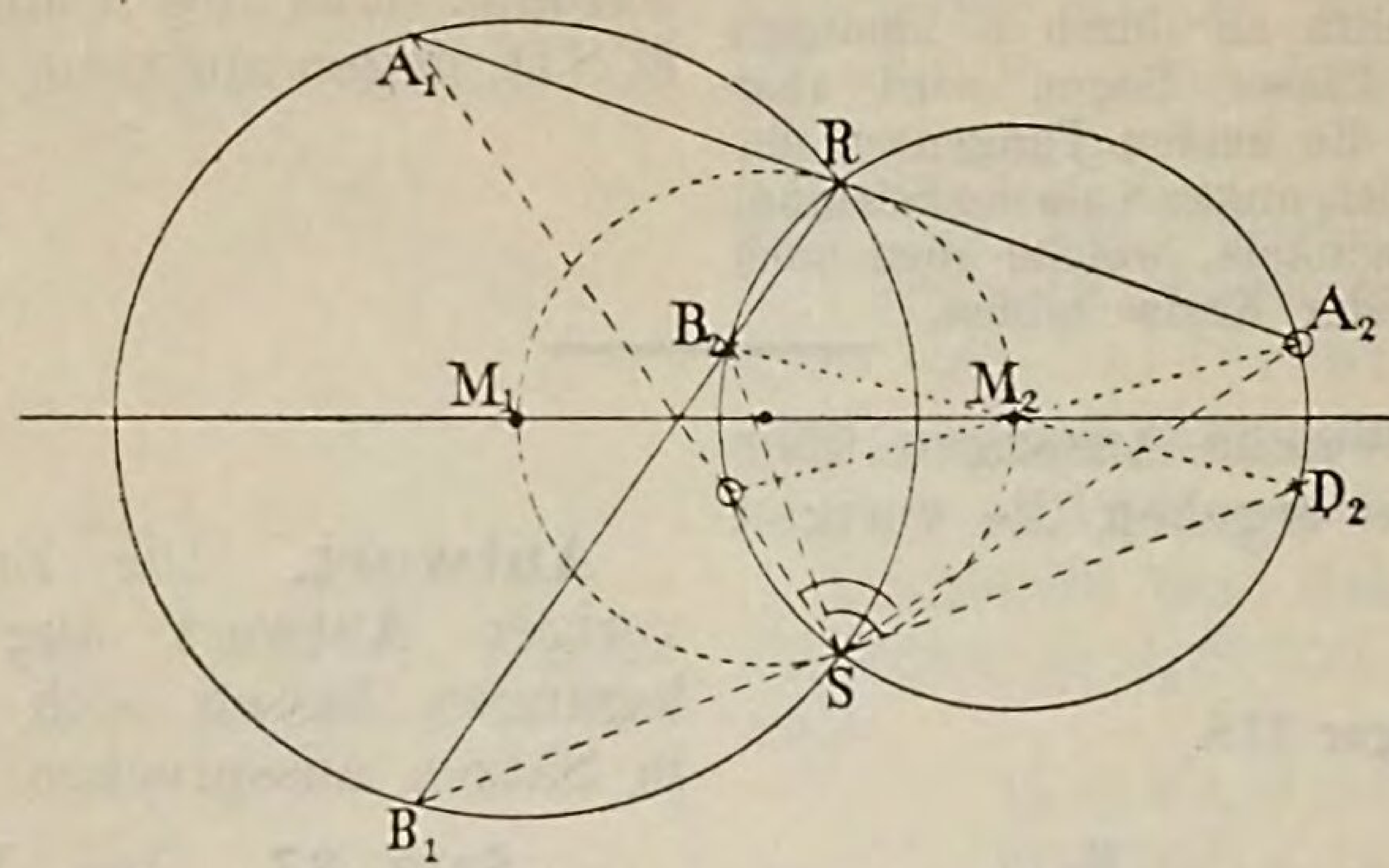
Erkl. 276. Der nebenstehende Satz 37 gibt die Zusammenfassung des ersten und dritten Teiles der vorigen Antwort 123. In Benützung der Anschauungsweise der Erkl. 89 könnte man statt dessen auch sagen: Die Strecken, welche auf den Sekanten durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise durch deren zwei andere Kreisschnittpunkte gebildet werden, werden vom zweiten Schnittpunkte der beiden Kreise stets unter demselben Gesichtswinkel gesehen, nämlich gleich dem Schnittwinkel beider Kreise.

Erkl. 277. Unter dem Schnittwinkel beider Kreise hat man den Winkel derjenigen Tangentenrichtungen zu verstehen, welche im Schnittpunkt an beiden Kreisen in derselben Umlaufsrichtung gezogen sind. Der Winkel des krummlinigen Zweiecks RSR ist aber der Winkel zweier Tangenten in entgegengesetztem Umlaufssinne, also supplementär zum Schnittwinkel der beiden Kreise. Der erstere Winkel tritt auf in Satz 37, der letztere in Satz 37b. Im letzteren ist ferner zu beachten, dass die Bogen A_1C_1 (durch Linien aus A_2) und D_2B_2 (durch Linien aus B_1) zwar nicht der Länge nach gleich sind, wohl aber dem Winkelmass nach, da letzteres beidemale gleich ist dem Winkel des krummlinigen Zweiecks RSR.

Frage 125. Welche Besonderheiten haben nach den vorigen Sätzen zwei Kreise aufzuweisen, welche einander rechtwinklig durchschneiden?

Antwort. Wenn zwei Kreise einander unter einem rechten Winkel durch-

Figur 119.



Erkl. 278. Ein Kreis, welcher einen andern rechtwinklig schneidet, heisst auch ein Orthogonalkreis desselben (vom griechischen ὀρθός = gerade, recht, und γόνος = Winkel, also wörtlich ein „Rechtwinkelkreis"). Eine weitere Eigenschaft rechtwinklig schneidender Kreise ist die in Erkl. 271 erwähnte, dass je die Radien des einen nach den Schnittpunkten die Tangenten des andern sind. Daraus folgt weiter, dass ein Kreis, welcher die Zentralstrecke beider Kreise als Durchmesser hat, durch beide Mittelpunkte und durch beide Schnittpunkte geht. Wegen der Symmetrie zur Zentrallinie können nur bei Orthogonalkreisen beide Schnittpunkte mit beiden Mittelpunkten auf einem Kreise liegen.

schneiden (siehe Figur 119), so ist sowohl der Schnittwinkel der Kreise, als der Spitzenwinkel des krummlinigen Zweiecks ein rechter. Daher bilden die in Satz 37 genannten Strecken stets die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Scheitel im Kreisschnittpunkt, dessen Kathetenendpunkte auf den beiden Kreislinien wandern; und die Verbindungslinien dieses Kreisschnittpunktes mit den Endpunkten der Strecken schneiden beide Kreise je in den Endpunkten eines Durchmessers.

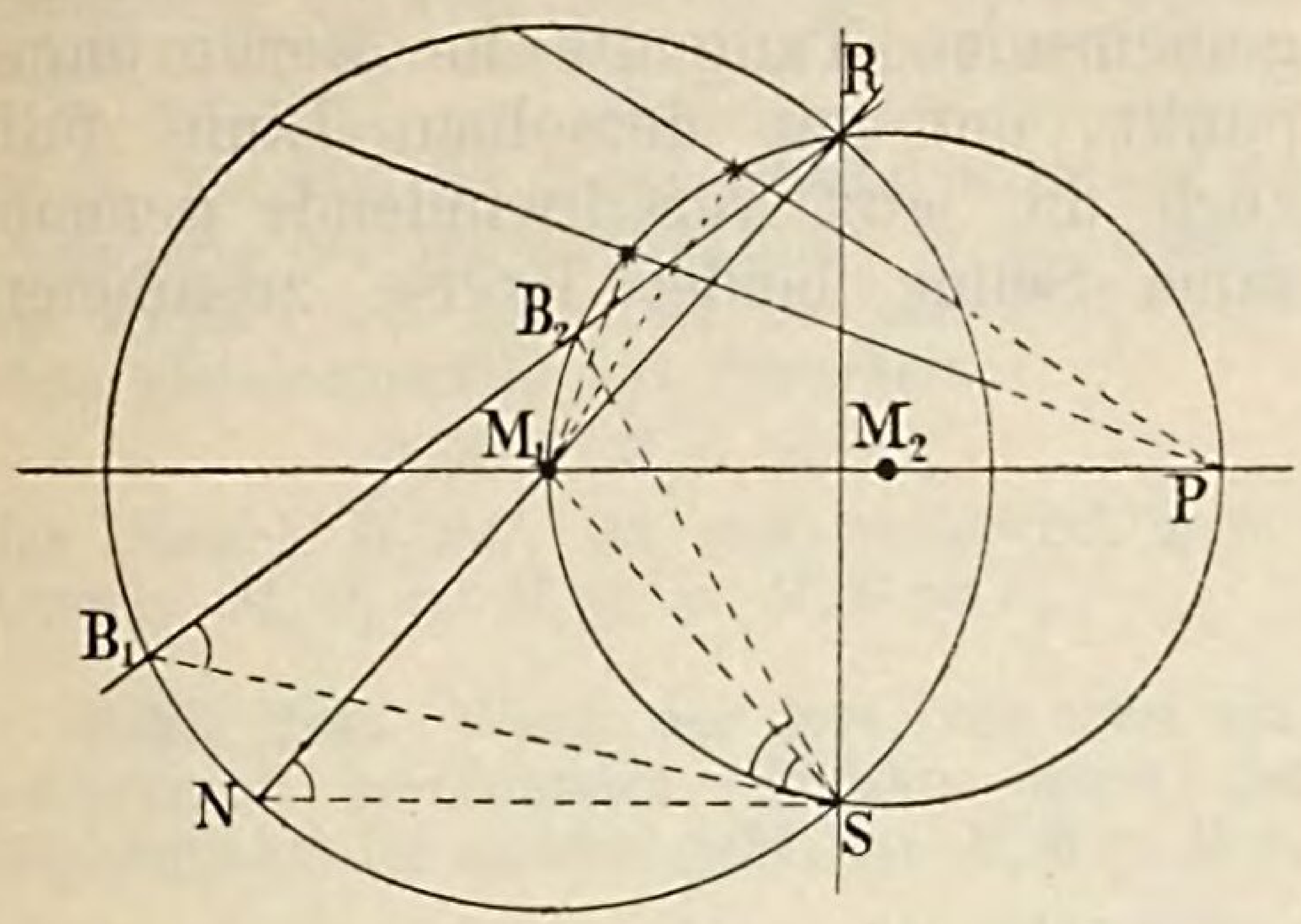
Ferner wird der Peripheriewinkel der im Satz 37b genannten Bogenstücke ein rechter, also müssen die Bogen Halbkreise werden, und man erhält die Aussage: Die Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier einander senkrecht durchschneidenden Kreise mit je einem gleichen Punkte der einen Kreislinie schneiden die andere in den Endpunkten eines Durchmessers.

Frage 126. Welche Beziehungen finden statt zwischen zwei einander schneidenden Kreisen, deren einer durch den Mittelpunkt des andern geht?

Erkl. 279. Wenn zwei Kreise der nebenstehenden Art einander unter einem Winkel von 60° schneiden würden, so müssten alle Dreiecke der Art B_1B_2S oder NM_1S auch gleichseitige Dreiecke werden. Denn dann würde der Winkel $B_1SB_2 = 60^0$ werden, also $\sphericalangle B_2B_1S$ ebenfalls 60° und folglich auch der dritte Winkel $B_1B_2S = 60^0$.

Antwort. 1) Wenn von zwei einander schneidenden Kreisen der eine durch den Mittelpunkt des andern geht, so bilden wieder die in Satz 37 genannten Verbindungslinien mit einander und mit der Sekante durch den andern Schnittpunkt R stets Dreiecke mit gleichgross bleibenden Winkeln. Wird insbesondere die Sekante RN durch den

Figur 120.



Mittelpunkt M_1 selbst gezogen (siehe Figur 120), so wird der Winkel RSN ein rechter, $M_1N = M_1S = M_1R$ als Radius, folglich $\sphericalangle M_1NS = M_1SN$. Daher sind wegen der gleichbleibenden Winkel alle die Dreiecke gleichschenklig, welche den einen Punkt S zur Grundseitenecke und die zwischen den Kreisschnittpunkten einer Sekante durch R liegende Strecke zum gegenüberliegenden Schenkel haben.

2) Zeichnet man im Kreise um M_2 die Peripheriewinkel über dem Durchmesser M_1P, so wird der durch P gehende Schenkel Sekante im Kreis M_1, der durch M_1 gehende Schenkel wird zur Senkrechten auf diese Sehne vom Mittelpunkt ihres Kreises, also zur Mittelsenkrechten. Daher werden alle Sehnen des Kreises M_1, deren Verlängerung durch den Endpunkt P des Durchmessers M_1P gehen, in ihrem andern Schnittpunkt mit dem Kreise M_2 halbiert. Unter ihnen ist insbesondere auch die Linie PR selbst als Kathete des rechtwinkligen Dreiecks M_1RP, wofür M_1R Radius, PR Tangente am Kreis M_1 mit Sehnenlänge Null.

Erkl. 280. Alle Sätze der in den Antworten 124 bis 126 vorkommenden Arten lassen sich auch in verschiedener Weise umkehren. So könnte man aus dem zweiten der nebenstehenden Sätze die folgenden ableiten:

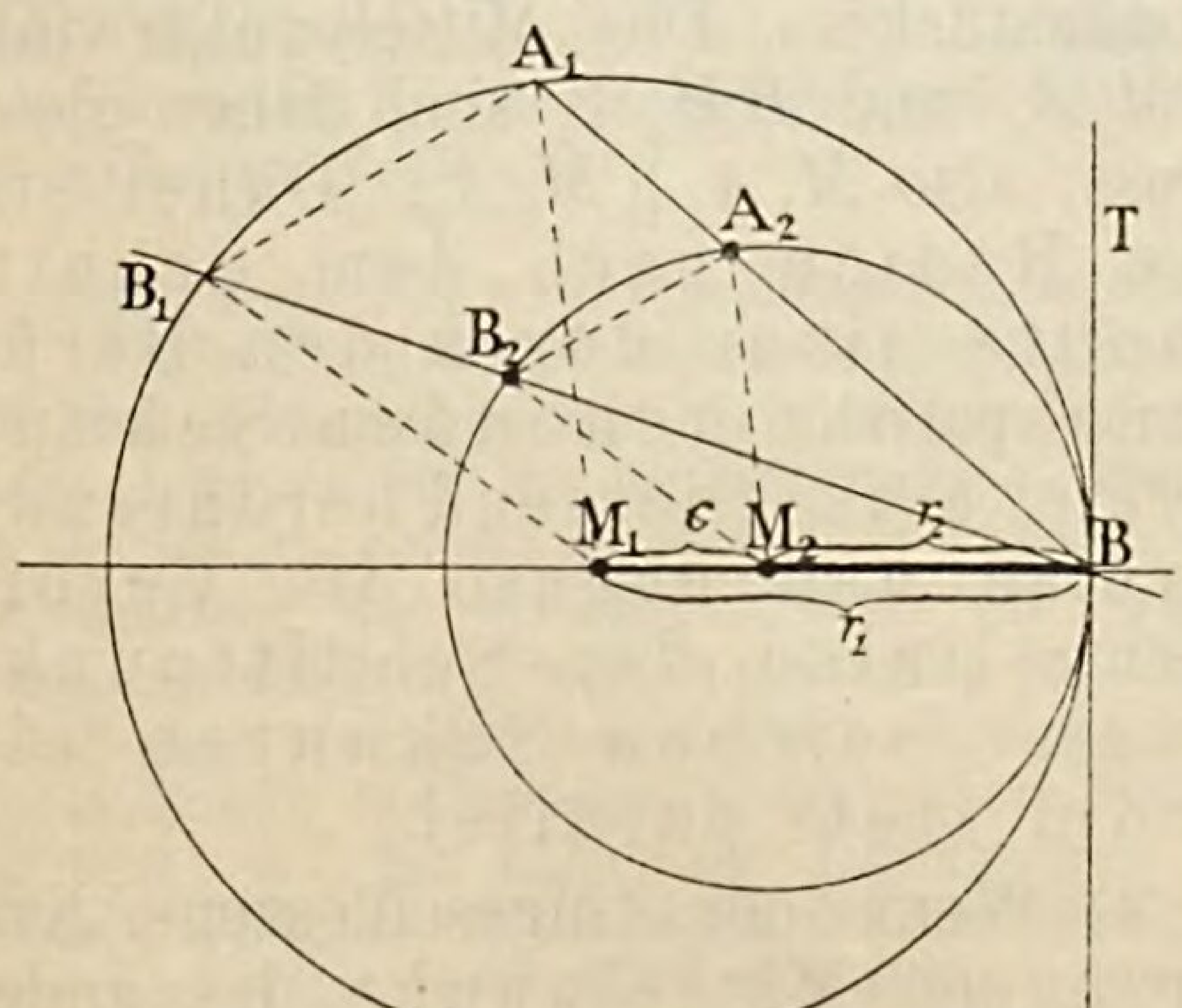
„Zieht man von einem beliebigen Punkte P Sekanten durch einen Kreis M_1, so liegen die Mittelpunkte der auf ihnen ausgeschnittenen Sehnen sämtlich auf einem Kreisbogen, welcher die Zentralstrecke des Punktes P zum Durchmesser hat.“

Oder:

„Zieht man in einem Kreise M_2 Sekanten durch einen Peripheriepunkt P, und schneidet denselben durch einen beliebigen zweiten Kreis um den Endpunkt des durch P gehenden Durchmessers, so werden auf diesen Sekanten innerhalb und ausserhalb des Kreises M_2 gleichgrosse Strecken abgeschnitten.“

Frage 127. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei einschliessend berührenden Kreisen?

Figur 121.



Antwort. Wenn zwei Kreise einander einschliessend berühren (siehe Figur 121), so liegt wieder der Berührungspunkt B auf der Zentrallinie, aber ausserhalb der Zentralstrecke. Es ist:

$$M_1B = r_1, \quad M_2B = r_2,$$
$$M_1M_2 = c = M_1B - M_2B = r_1 - r_2.$$

Von den vier gemeinsamen Tangenten, welche zwei auseinander liegende Kreise gehabt hatten, waren bei ausschliessender Berührung die beiden inneren zusammengefallen und beim Schneiden der Kreise verschwunden, um durch die gemeinsame Sehne ersetzt zu werden. Bei Eintritt der einschliessenden Berührung fallen nun auch die beiden äusseren

Erkl. 281. Verfolgt man durch Bewegung des einen zweier schneidenden Kreise die Veränderungen der Schnittwinkel und Tangenten, so findet man:

bei auseinander liegenden Kreisen: 2 innere Tangenten, keinen Schnittwinkel, 2 äussere Tangenten,

bei ausschliessend berührenden Kreisen: 1 innere Tangente, Schnittwinkel = 180°, 2 äussere Tangenten,

bei schneidenden Kreisen: keine innere Tangente, aber eine gemeinsame Sehne, Schnittwinkel zwischen 180° und 0°, 2 äussere Tangenten,

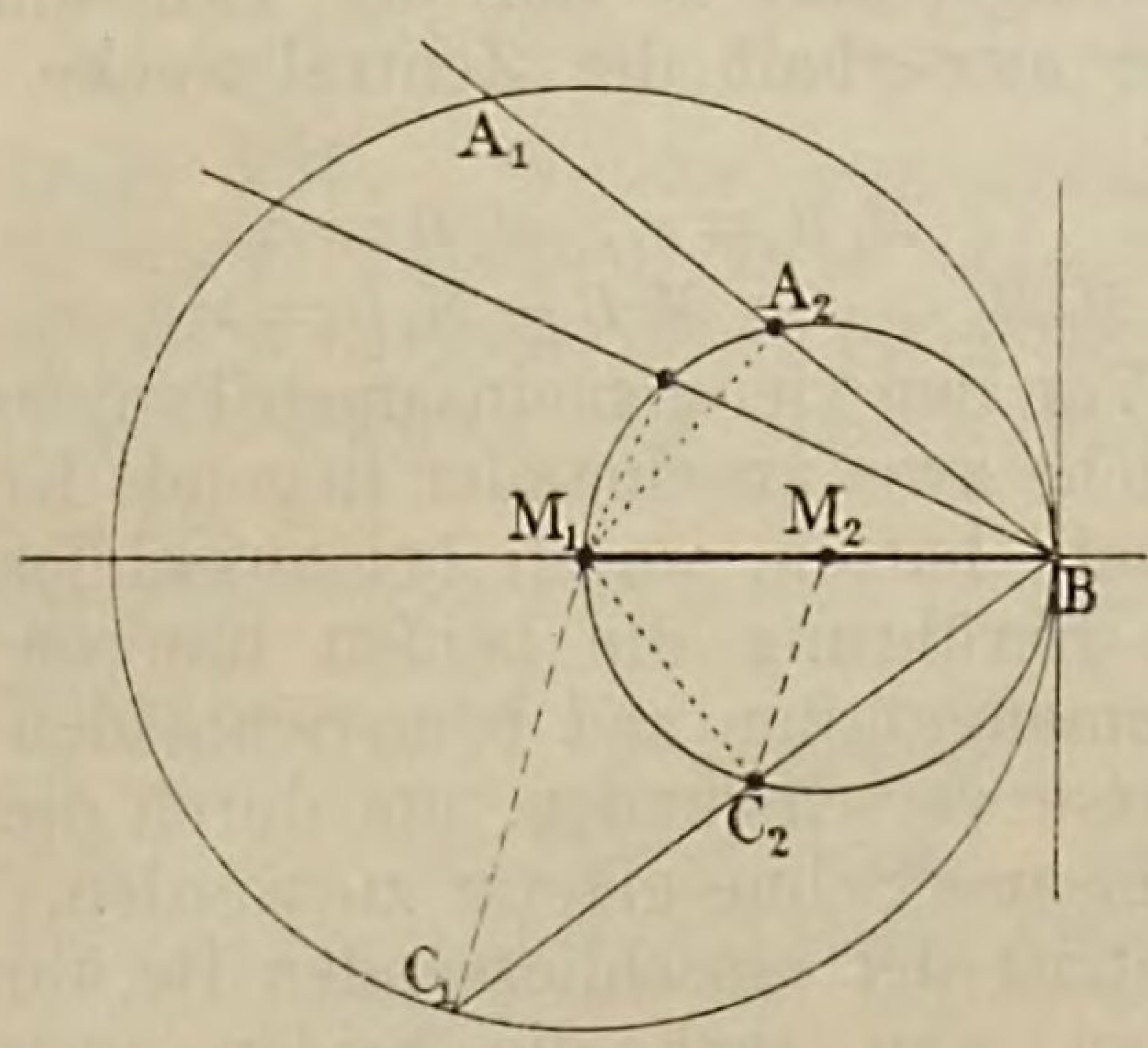
bei einschliessend berührenden Kreisen: Schnittwinkel = 0°, einzige gemeinsame Tangente.

Die gemeinsame Sehne zweier schneidenden Kreise, rückt nämlich gegen den Berührungspunkt hin von innen, wie die äusseren Tangenten von aussen her. Und von den Tangenten an beide Kreise in gleicher Umlaufsrichtung bildet bei ausschliessender Berührung jede die Verlängerung der anderen, bei einschliessender Berührung fallen beide Richtungen zusammen. Tangenten zusammen in die einzige gemeinsame Tangente im Berührungspunkt, und mit derselben Linie fällt auch die jetzt verschwindende gemeinsame Sehne beider Kreise zusammen.

Frage 128. Welche Gestalt nehmen die Ergebnisse der Sätze 37 u. ff. an für zwei einschliessend berührende Kreise?

Erkl. 282. Statt die nebenstehenden Ergebnisse aus den früheren Sätzen abzuleiten, kann man dieselben auch leicht unmittelbar nachweisen. So ist in Figur 121: $\sphericalangle A_2BT$ als Sehnentangentenwinkel im Kreis $M_2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB_2}$, als Sehnentangentenwinkel im Kreis $M_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB_1}$; folglich Bogen $\overset{\frown}{AB_1}$ gleich Bogen $\overset{\frown}{AB_2}$, Mittelpunktswinkel $BM_1A_1 = BM_2A_2$ und ebenso $BM_1B_1 = BM_2B_2$, also $M_1A_1 \parallel M_2A_2$ und $M_1B_1 \parallel M_2B_2$, $\sphericalangle A_1M_1B_1 = \sphericalangle A_2M_2B_2$ u. s. f.

Figur 122.



Antwort. 1) Wenn zwei Kreise einander einschliessend berühren, so ist nur ein einziger Schnittpunkt, nämlich der Berührungspunkt vorhanden. Werden durch diesen Sekanten BA_2A_1, BB_2B_1 gezogen, so fallen die vorherigen Verbindungslinien mit dem andern Schnittpunkt mit denselben Linien zusammen, es wird richtig der $\sphericalangle A_1BA_2 = 0^0$, gleich dem Schnittwinkel der Kreise. Dagegen behält Satz 37a seinen Sinn, wonach die Bogenstücke von B bis zu den Punkten A_1 und A_2 auf beiden Kreisen gleichviel Bogengrade haben, und ebenso die zwischen A_1B_1 und A_2B_2 liegenden Bogenstücke. Die Mittelpunktswinkel BM_1A_1 und BM_2A_2 sind daher gleichgross, also $M_1A_1 \parallel M_2A_2$. Daher sind die Radien nach dem Schnittpunkte einer durch den Berührungspunkt gehenden Sekante zweier einschliessend berührenden Kreise und ebenso die Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier solchen Sekanten einander stets parallel.

2) Wenn der eingeschlossene Kreis durch den Mittelpunkt des andern geht (siehe Figur 122), so ist B auch

Erkl. 283. Im zweiten Abschnitt der nebenstehenden Antwort ist der Mittelpunkt jeder Sehne BA, BC der Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks mit festbleibender Hypotenuse $M_1 B$. Folglich ist dieser Scheitel stets auf der Peripherie des Halbkreises über $M_1 B_1$, nämlich des Kreises um M_2. Das Dreieck $B M_1 C_1$ ist stets gleichschenklig mit Schenkeln:

$$M_1 B = M_1 C_1 = r_1;$$

das Dreieck $M_1 B C_2$ ist stets rechtwinklig mit Längen $M_2 M_1 = M_2 C_2 = M_2 B = r_2$.

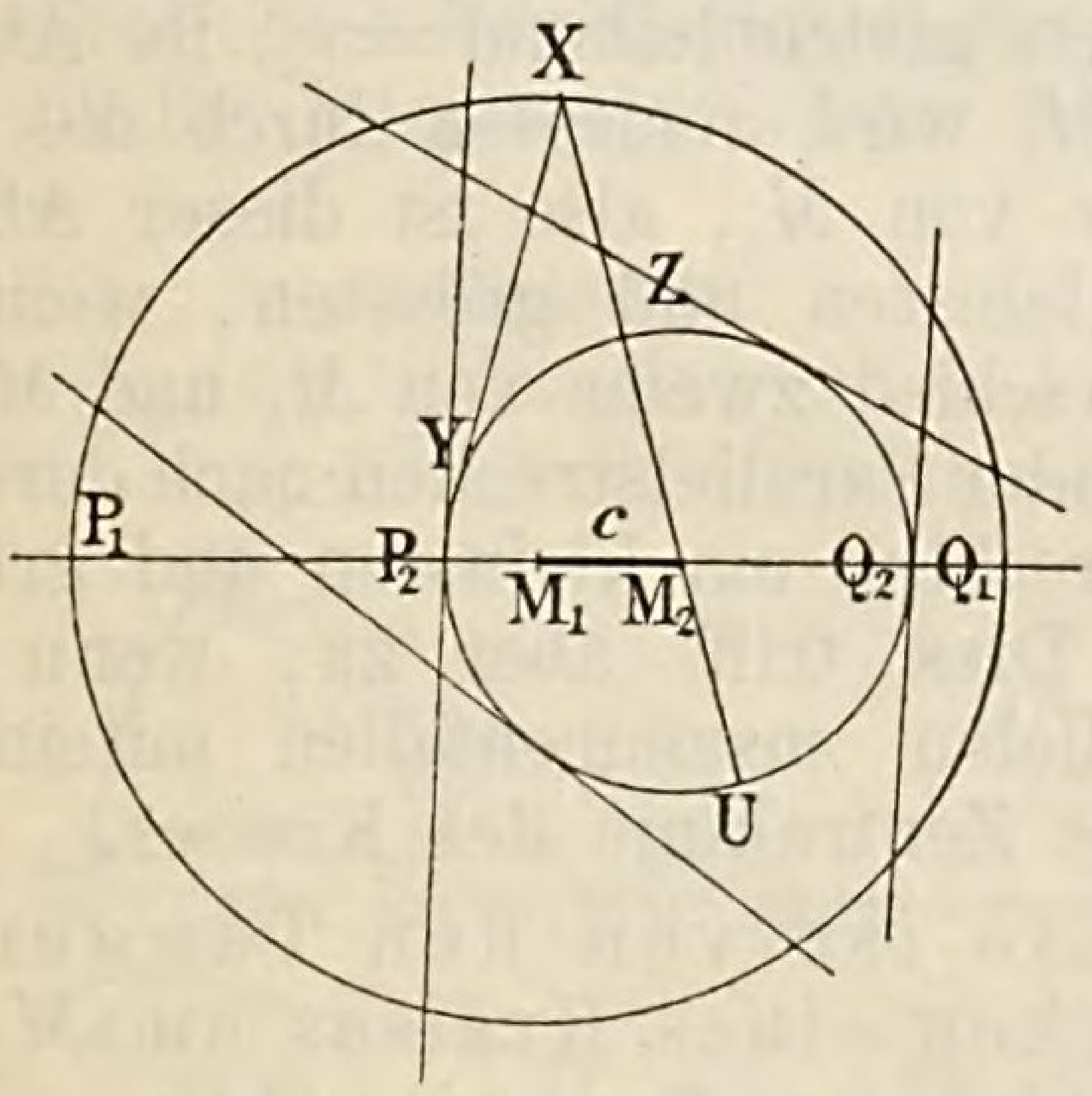
Erkl. 284. Wenn der eine von zwei einschliessend berührenden Kreisen durch den Mittelpunkt des andern geht, ist $M_1 B = 2 \cdot r_2$, $M_1 M_2 = c = r_2$, $r_2 = \frac{1}{2} r_1$, also richtig:

$$c = r_1 - r_2 = 2r_2 - r_2 = r_2 = \frac{1}{2} r_1.$$

zugleich Endpunkt des Durchmessers $M_1 P$ des Kreises M_2 in Figur 120. Also müssen nach Antwort 2) der Frage 126 alle Sehnen des Kreises M_1, welche durch den Berührungspunkt gehen, durch den Kreis M_2 halbiert werden, oder der Mittelpunkt aller durch denselben Peripheriepunkt gehenden Sehnen liegt auf dem Kreise, welcher den Radius dieses Peripheriepunktes zum Durchmesser hat.

Frage 129. Welche Abstandsstrecken bestehen zwischen zwei ineinander liegenden Kreisen?

Figur 123.



Erkl. 285. Wenn ein Kreis ganz innerhalb eines andern liegt, so haben dieselben weder äussere noch innere gemeinsamen Tangenten, auch keine gemeinsamen Sehnen, nur sind die Tangenten des innern Kreises zugleich Sekanten des grössern Kreises.

Erkl. 286. Bei zwei einschliessend berührenden Kreisen fällt die Grenzuntersuchung für die Abstandsstrecken der Peripheriepunkte ganz weg, denn da ein Berührungspunkt vorhanden ist, so ist die untere Grenze Null; und da der Durchmesser des grössern Kreises die grösste innerhalb derselben mögliche Strecke ist, dieser selbst aber eine der Abstandsstrecken zwischen einem Punkt des einen und des andern Kreises darstellt, so ist eben der Durchmesser des grossen Kreises obere Grenze für die Abstandsstrecken. Allgemein gültig für alle verschieden gegenseitigen Lagen zweier Kreise kann man

Antwort. 1) Sind $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ (siehe Figur 123) die Kreisschnittpunkte auf der Zentrallinie, und $P_1 P_2 > Q_1 Q_2$, so ist die Zentralstrecke:

$$M_1 M_2 = M_1 Q_1 - Q_1 Q_2 - M_2 Q_2,$$

also:

$$c = r_1 - r_2 - Q_1 Q_2,$$

also ist die Zentralstrecke kleiner als die Differenz der Radien um das Stück $Q_1 Q_2$.

2) Ist XY der Abstand irgend zweier beliebigen Punkte beider Kreise, so erhält man, ähnlich wie in Antwort 114 und Erkl. 252 ausgeführt wurde:

$$XZ < XY < XU,$$

wo XZU die durch M_2 gehende Linie von X ist, also durch Einsetzung:

$$XM_2 - r_2 < XY < XM_2 + r_2,$$

und durch Ersetzung von XM_2 erst durch die noch kleinere Strecke $M_2 Q_1$, dann durch die noch grössere Strecke $M_2 P_1$:

$$M_2 Q_1 - r_2 < XY < M_2 P_1 + r_2,$$

also:

$$Q_1 Q_2 < XY < P_1 Q_2,$$

oder:

$$r_1 - r_2 - c < XY < r_1 + r_2 + c.$$

Es liegt also unter allen Verbindungsstrecken zweier beliebigen Punkte auf zwei ineinander liegenden Kreisen die kleinste und grösste auf der Zentrallinie enthalten, nämlich die erstere

also aussagen, dass alle Abstandsstrecken zweier Peripheriepunkte zweier beliebigen Kreise kleiner sind als der grösste auf der Zentrallinie enthaltene Abstand — und, wenn kein Schnittpunkt vorhanden, grösser als der kleinste auf der Zentrallinie vorhandene Abstand.

gleich der um die Zentralstrecke verminderten Radiendifferenz, die letztere gleich der um die Zentralstrecke vermehrten Radiensumme.

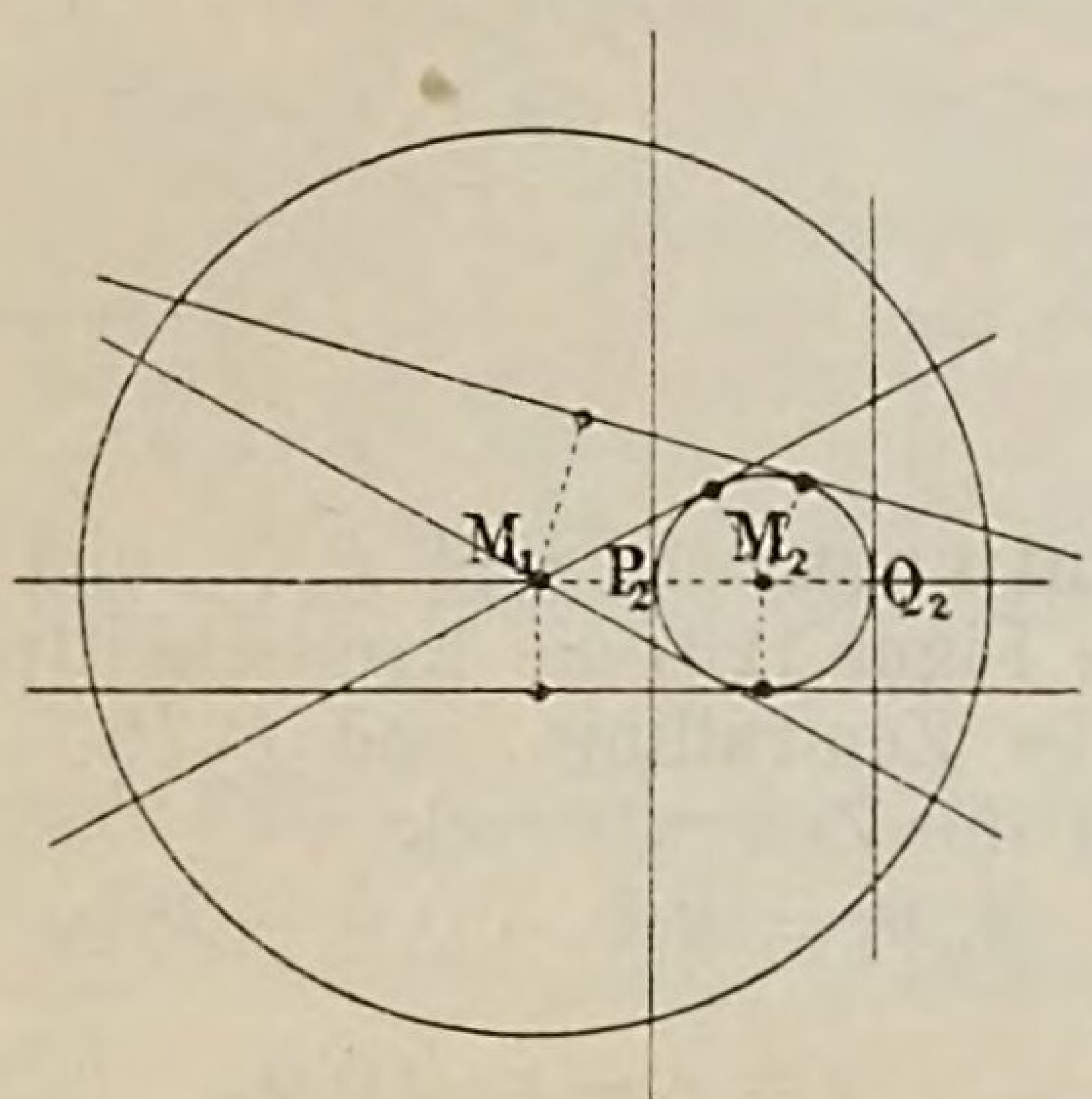
Frage 130. Welche Länge haben die Sehnen des grössern von zwei ineinander liegenden Kreisen, welche den kleinern berühren?

Antwort. Da die Tangenten des kleinern Kreises Sehnen des grössern sind, so ist ihre Länge zu beurteilen nach ihrer Abstandsstrecke vom Mittelpunkt des grössern Kreises. Liegt also M_1 ausserhalb oder auf dem Kreise um M_2 (siehe Figur 124), so ist die durch M_1 gehende Tangente des kleinern Kreises die längste. Sonst (s. Figur 123) ist diejenige die längste und stets diejenige die kürzeste, deren Berührungspunkt den kürzesten bezw. längsten Abstand von M_1 hat. Denn die Abstandsstrecke der Tangente vom Punkte M_2 ist stets gleichbleibend $= r_2$, ihr Abstand von M_1 wird gemessen durch die Senkrechte von M_1, also ist dieser Abstand am kleinsten und grössten, wenn der Unterschied zweier von M_1 und M_2 ausgehender Parallelstrecken nach derselben Senkrechten am kleinsten und grössten ist. Dies trifft aber zu, wenn diese Parallelen zusammenfallen miteinander in die Zentrallinie des Kreises.

Also ist von den Tangentenstrecken eines Kreises um M_2, die durch einen jenen einschliessenden Kreis um M_1 abgeschnitten werden, diejenige die kleinste, welche in dem von M_1 fernsten Kreispunkte berührt, diejenige die grösste, welche durch M_1 selbst geht, oder in dem bei M_1 nächsten Kreispunkte berührt.

(Man vergleiche hiermit Satz 10 zu Frage 16, wenn Kreis M_1 zum Punkte wird, da $r_2 =$ Null.)

Figur 124.



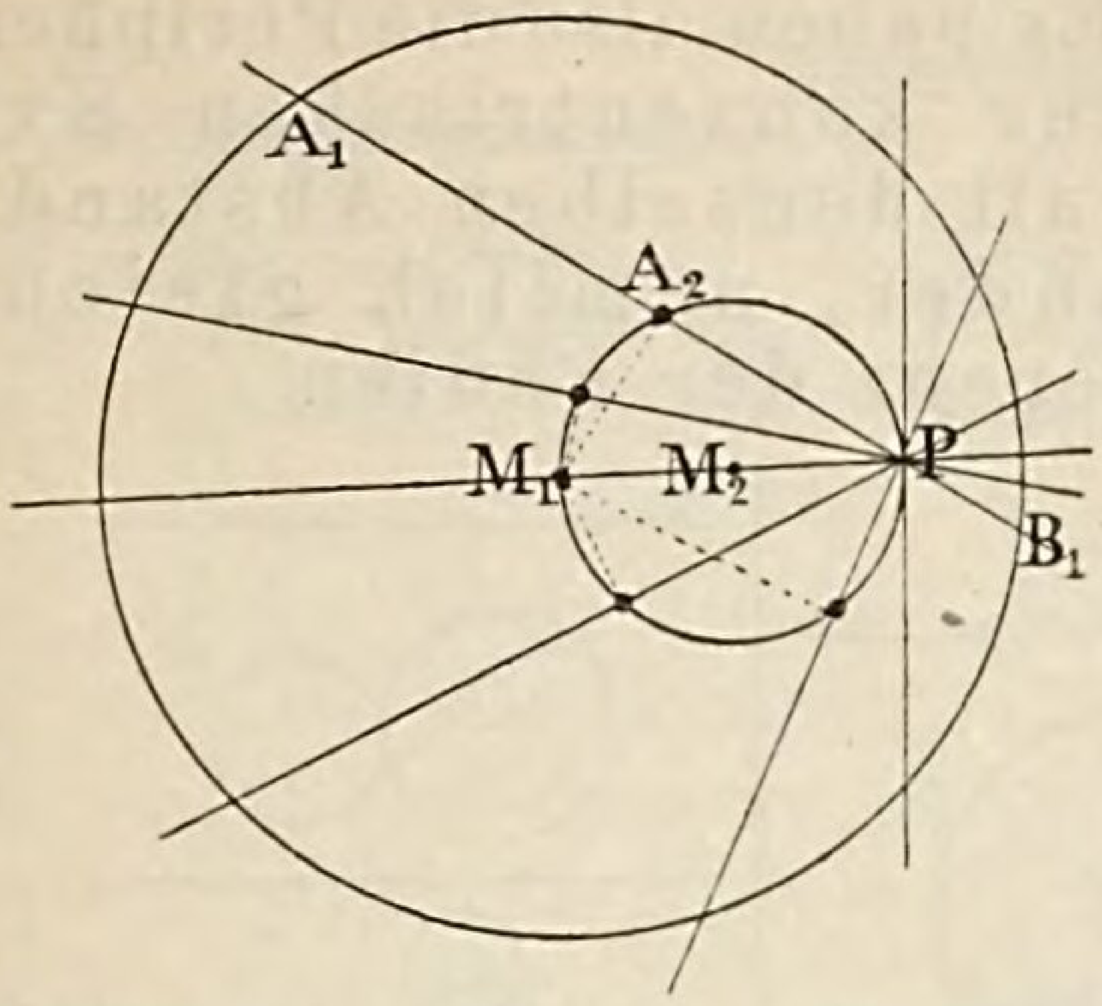
Erkl. 287. In Figur 123 und 124 ist also die Tangente in Q_2 jedesmal die kürzeste, die in P_2 nur in Figur 123 die längste; in Figur 124 aber ist die durch M_1 gehende noch länger. Doch hat auch hier die Tangente in P_2 einen ausgezeichneten Wert, nämlich unter den ihr benachbarten Tangenten ist sie die kürzeste. Lässt man nämlich die Tangente in Figur 123 den Kreis M_2 umlaufen, so wird sie von Q_2 an immer grösser bis P_2, und nimmt dann wieder ab bis Q_2. Wenn aber in Figur 124 die Tangente den Kreis M_2 von Q_2 an umläuft, so wächst sie bis zu dem Wert der durch M_1 gehenden. Von da an bis P_2 nimmt sie wieder ab, erreicht in P_2 ihren kürzesten Wert, nimmt dann wieder zu bis zu dem Wert der durch M_1 gehenden, und nimmt endlich wieder ab bis zur allerkürzesten Länge im Punkte Q_2.

Erkl. 288. Konstruiert man den Halbkreis über $M_1 M_2$, so ist das innerhalb desselben liegende Stück der senkrechten Abstandsstrecke von M_1 gleich der Differenz dieses Abstandes und r_2, also am längsten $= M_1 M_2$, am kürzesten gleich $M_1 M_1 =$ Null.

Frage 131. Welche Uebertragung gestattet der zweite Satz der Antwort 126 auf ineinander liegende Kreise?

Antwort. Wenn ein vom grössern Kreise eingeschlossener Kreis durch den Mittelpunkt des erstern geht, so kann

Figur 125.

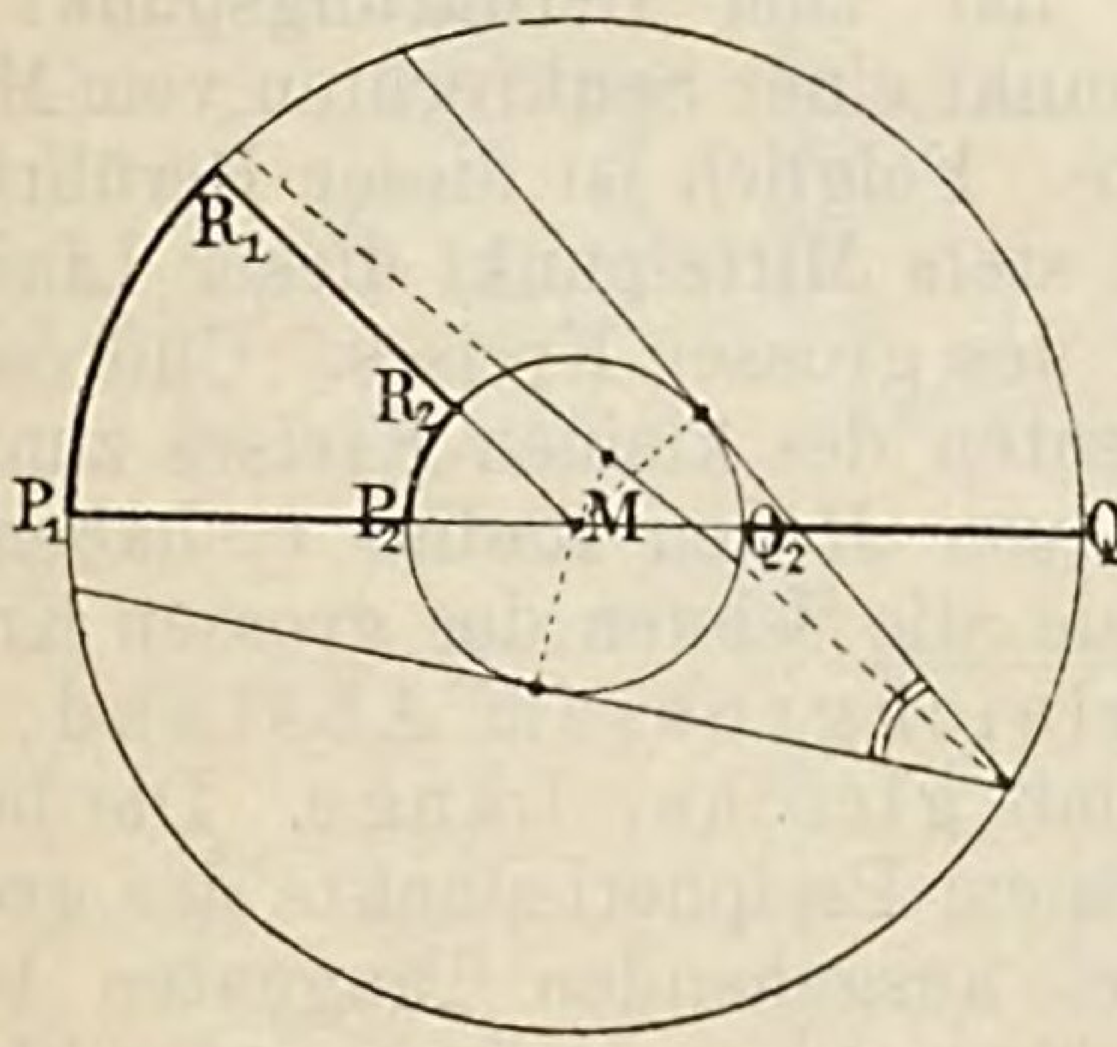


Erkl. 289. Die Gültigkeit des Satzes in Antwort 126 für ineinander liegende Kreise geht auch aus Figur 120 hervor, in welcher das Vorhandensein des Schnittpunktes R für diese Betrachtung ganz ausser Wirkung blieb. — Man beachte, dass die Figur 125 samt nebenstehenden Beweisen nur eine andere Fassung der bereits in Antwort 24 zu Figur 16 angestellten Ueberlegung darstellt.

die Betrachtung der Antwort 126 wörtlich wiederholt werden, denn stets ist der Schnittpunkt einer Sehne durch P mit dem Kreise um M_2 der Fusspunkt einer Senkrechten von M_1, also ihr Mittelpunkt. Es wird also jede durch P gehende Sehne des Kreises M_1 durch ihren zweiten Schnittpunkt mit dem Kreise M_2 halbiert

Frage 132. Welche Abstandsstrecken bestehen zwischen den Punkten zweier konzentrischen Kreise?

Figur 126.



Erkl. 290. Die Angabe des Abstandes zweier Kreislinien durch die kürzeste Verbindungslinie bildet eine Wiederholung desselben Vorgangs in mehrfachen anderen Fällen. So wird durch die kürzeste Verbindungsstrecke der Abstand gemessen bei zwei Punkten, zwischen einem Punkte und einer Geraden, zwischen einem Punkte und einem Kreise, zwischen zwei parallelen Geraden. Bei letzteren ist dieser Abstand auch, wie bei den konzentrischen Kreisen, die Länge jeglicher Strecke, welche auf beiden Geraden senkrecht steht. Jeder Punkt der einen Geraden oder des einen Kreises hat denselben senkrechten kürzesten Abstand von der andern Geraden oder dem andern Kreise.

Antwort. 1) Da Kreise konzentrisch heissen, wenn ihre Mittelpunkte zusammenfallen, so ist bei solchen die Zentralstrecke selbst gleich Null, es kann also jede durch den gemeinsamen Mittelpunkt gehende Linie als Zentrallinie und Symmetrieachse der aus beiden Kreisen gebildeten Gesamtfigur angesehen werden.

2) Für die Abstände beliebiger Peripheriepunkte gilt dieselbe Ueberlegung, welche in Antwort 114 und 129 angestellt worden; da also $c = 0$ ist, so ergibt dieselbe, dass alle solche Abstandsstrecken kleiner sind als die Summe und grösser als die Differenz der Radien, nämlich in Figur 126 kleiner als:

$$P_1 Q_2 = P_2 Q_1 = r_1 + r_2$$

und grösser als:

$$P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = r_1 - r_2.$$

3) Dieser letztere kleinste Abstand $r_1 - r_2$ erscheint auf jeder durch den Mittelpunkt gehenden Sekante als Strecke zwischen den Kreisschnittpunkten. Da eine solche Linie für beide Kreise Radius ist, so kann man sagen: die Strecke $P_1 P_2$ stehe senkrecht auf beiden Kreislinien, oder sie gebe den senk-

Erkl. 291. Bei zwei nicht konzentrischen Kreisen spricht man nicht vom Abstand der Kreislinien, sondern nur entweder von ihrer Zentralstrecke oder vom Abstand derjenigen ihrer Punkte, welche die nächst- oder fernstgelegenen sind. Die letzteren Abstandsstrecken sind auch die einzigen, welche beide Kreise rechtwinklig schneiden, jedoch hat die Richtung der senkrechten Winkelschenkel nur beim kürzesten Abstand ineinander liegender Kreise den gleichen Umdrehungssinn.

rechten Abstand beider Kreislinien an. Es haben also die Peripherieen zweier konzentrischen Kreise überall denselben Abstand von einander, nämlich gleich der Differenz der Radien.

Frage 133. Welche Längen entstehen auf den Sehnen des äussern und Tangenten des innern zweier konzentrischen Kreise?

Erkl. 292. Zwei Durchmesser durch M schneiden aus den beiden Kreisen zwei Bogenstücke aus, z. B. P_1R_1 und P_2R_2 in Figur 126. Dabei ist der Länge nach offenbar $P_1R_1 > P_2R_2$. Es hat aber der Bogen P_1R_1 als Mittelpunktswinkel denselben Winkel, wie Bogen P_2R_2. Also hat der Bogen P_1R_1 genau ebensoviele Bogengrade, als der Bogen P_2R_2 Bogengrade hat, und als der Winkel PMR Winkelgrade hat. Während aber Winkelgrade ein festbestimmtes und stets gleichbleibendes Mass sind, so ist die Grösse der Bogengrade bei jedem Kreise verschieden. Es hat nämlich der Kreis 1 grössere Bogengrade, als der Kreis 2. Auf jedem der beiden Kreise ist ein Bogengrad der 360te Teil der Umfangslänge, also beim grossen Kreise ein grösseres Stück als beim kleinen. Aber durch die Schenkel desselben Mittelpunktswinkels werden an jedem der beiden Kreise Bogenstücke ausgeschnitten, die die gleichgrosse Anzahl der ihrem Kreise zugehörigen Bogengrade betragen oder die den gleichen aliquoten Teil ihres Kreisumfanges betragen.

Erkl. 293. Eine Anwendung des zweiten Teiles nebenstehender Antwort bilden die gleichgrossen Seiten und Winkel eines jeden regelmässigen Vielecks, wobei die Seiten Tangenten, bezw. Sehnen der zwei konzentrischen Kreise werden, die Winkel Tangentenwinkel bezw. Peripheriewinkel derselben, nämlich des Inkreises und Umkreises.

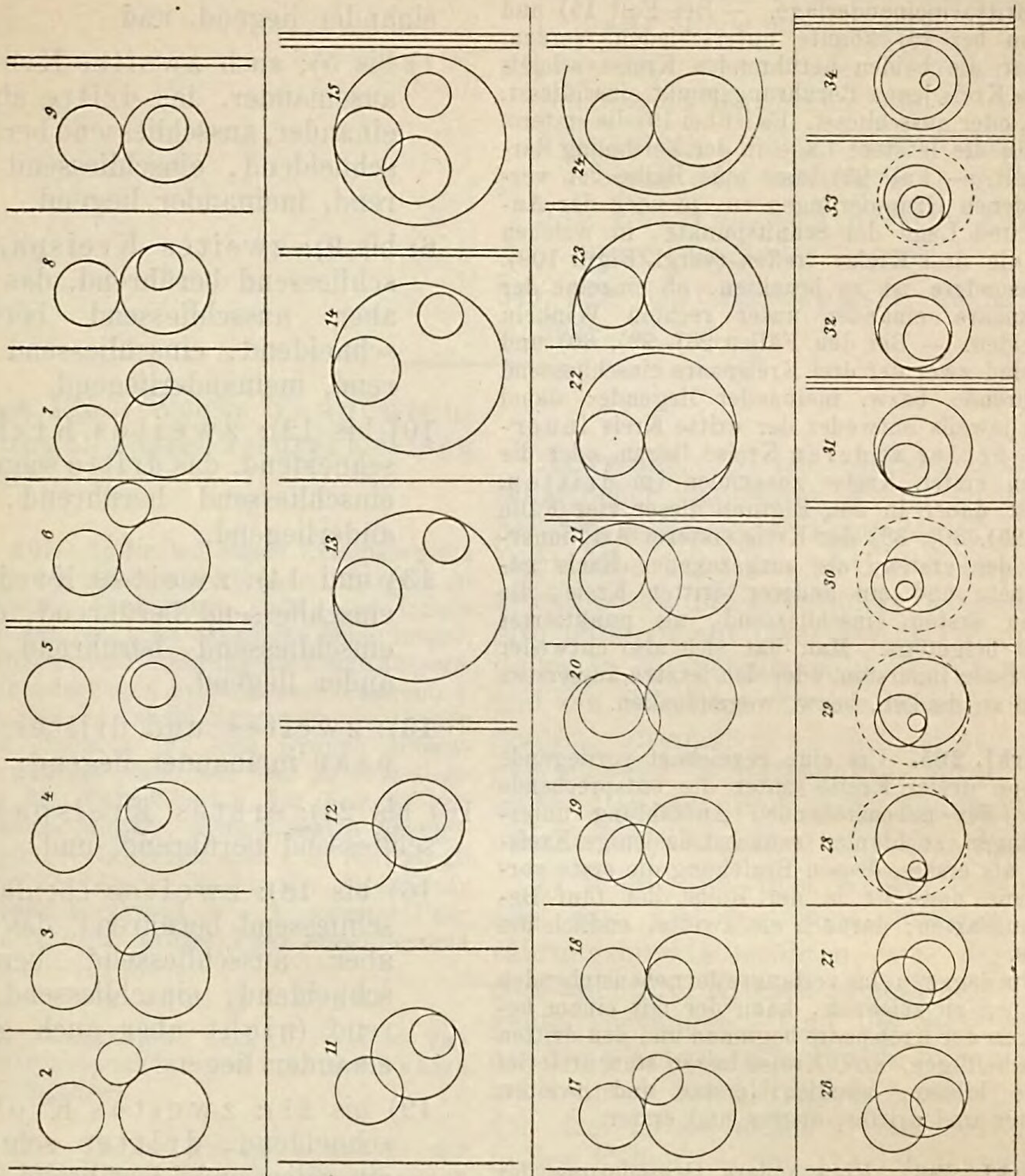
Antwort. 1) Für eine beliebige Sehne des innern Kreises ist ihre Mittelsenkrechte Symmetrieachse. Zur gleichen Achse sind aber nicht nur die Schnittpunkte der Sehne mit dem kleinen Kreise, sondern auch ihre Schnittpunkte mit dem grossen Kreise symmetrisch, da die Achse auch Durchmesser des grossen Kreises ist. Folglich sind auch die im Zwischenraume beider Kreise gelegenen Strecken auf jeder Sehne symmetrisch gleichgross.

2) Eine Tangente an den kleinen Kreis hat zum Berührungspunkt den Fusspunkt einer Senkrechten vom Mittelpunkte. Folglich ist dieser Berührungspunkt stets Mittelpunkt dieser Linie als Sehne des grossen Kreises. Und da alle Tangenten des kleinen Kreises zum Abstand von M den Radius r_2 haben, so sind sie alle Sehnen des grossen Kreises mit gleichgrossem Abstand, also auch mit gleicher Länge. Die beiden von einem Peripheriepunkte des grossen Kreises ausgehenden Tangenten bilden einen Tangentenwinkel des kleinen Kreises und dieser ist wegen gleichbleibendem Abstand r_1 seines Scheitels von M auch gleichgross für alle Punkte des äussern Kreises.

8) Ueber einen Kreis in Verbindung mit zwei anderen Kreisen.

Frage 134. Welche verschiedenen gegenseitigen Lagen können drei Kreise einehmen?

Antwort. Um die Lagebeziehungen, in welche drei Kreise zu einander treten können, aufzufinden, nimmt man je zwei der drei Kreise zu einem Paar zusammen



Figur 127.

Erkl. 294. In Figur 127 sind die 34 Fälle der nebenstehenden Aufzählung zusammengestellt, so wie dieselben durch Bewegung zweier Kreise gegeneinander hervorgehen:

Man erkennt von 1) bis 5), wie die zwei unteren Kreise gegeneinander rücken; und derselbe Vorgang wiederholt sich zwischen zwei Kreisen in den Fällen 6) bis 9), 10) bis 12), 13) bis 14) und 15), während die beiden andern Kreise jeweils eine der fünf Lagebeziehungen festhalten.

Zum Fall 18) ist zu bemerken, dass diejenige Beziehung nicht auftreten kann, wobei

und weist jedem dieser drei Paare nach einander die fünf Lagebeziehungen zu, welche nach den Sätzen 35 zwischen zwei Kreisen bestehen können, nämlich dass sie 1) ganz auseinander liegen, 2) einander ausschliessend berühren, 3) schneiden, 4) einschliessend berühren, 5) ineinander liegen.

Demnach erhält man folgende 34 verschiedenen Fälle (siehe Figur 127):

zwei Kreispaare ausschliessend berühren, und das dritte ineinanderläge. — Bei Fall 19) und ebenso bei 26) könnte unterschieden werden, ob der die beiden berührenden Kreise schneidende Kreis jenen Berührungspunkt einschliesst, trifft, oder ausschliesst. Es ist bei 19) die erstere, bei 26) die letztere Lage in der Zeichnung dargestellt. — Fall 25) lässt eine Reihe von verschiedenen Gruppierungen zu, je nach der Anzahl und Lage der Schnittpunkte, in wclehen sich die drei Kreise treffen (vergl. Figur 109). Insbesondere ist zu beachten, ob einzelne der Kreispaare einander unter rechten Winkeln schneiden. — Bei den Fällen 28), 29), 30) und 33) sind zwei der drei Kreispaare einschliessend berührende bezw. ineinander liegende: dabei kann jeweils entweder der dritte Kreis innerhalb beider anderen Kreise liegen, oder die beiden ersten Kreise zusammen im dritten. Es ist daher in den Figuren dieser vier Fälle 28), 29), 30), 33) der Kreis ersterer Art, innerhalb des ersten, als ausgezogener Kreis gezeichnet, und ein anderer dritter Kreis, die beiden ersten einschliessend, als punktierter Kreis beigefügt. Man hat sich also entweder den ersten innersten, oder den letzten äussersten allein zu denken, bezw. wegzudenken.

Erkl. 295. Um eine gezeichnet vorliegende Gruppe dreier Kreise unter die entsprechende Ziffer der nebenstehenden Aufzählung unterzubringen, sucht man zunächst dasjenige Kreispaar als erstes, dessen Beziehung die erste vorhandene darstellt in der Reihe der fünf Beziehungsarten; darnach die zweite, endlich die dritte.

Um dagegen eine verlangte der nebenstehenden Gruppen zu zeichnen, kann der mit einem beliebigen der Kreispaare beginnen und den dritten Kreis beifügen. Drei Kreise lassen stets dreierlei Paare bilden, nämlich: erster und zweiter, zweiter und dritter, dritter und erster.

Erkl. 296. Eine andere Gruppierung der Darstellungsweisen dieser Kreise findet man in der Aufgabensammlung am Ende dieses Bandes. In den folgenden Fragen sind von den vielen Fällen der gegenseitigen Lage einige wenige und besonders einfache Fälle behandelt. Weitere Fälle findet man angeführt bei der Lehre von der Anwendung der Aehnlichkeit auf den Kreis im VII. Teile dieses Lehrbuches.

1) bis 15): erstes Kreispaar auseinander liegend, und

- 1) bis 5): auch zweites Kreispaar auseinander, das dritte aber auseinander, ausschliessend berührend, schneidend, einschliessend berührend, ineinander liegend,
- 6) bis 9): zweites Kreispaar ausschliessend berührend, das dritte aber ausschliessend berührend, schneidend, einschliessend berührend, ineinanderliegend,
- 10) bis 12): zweites Kreispaar schneidend, das dritte schneidend, einschliessend berührend, ineinanderliegend,
- 13) und 14): zweites Kreispaar einschliessend berührend, drittes einschliessend berührend, ineinander liegend,
- 15): zweites und drittes Kreispaar ineinander liegend;

16) bis 24): erstes Kreispaar ausschliessend berührend, und

- 16) bis 18): zweites ebenfalls ausschliessend berührend, das dritte aber ausschliessend berührend, schneidend, einschliessend berührend (nicht aber auch ganz ineinander liegend),
- 19) bis 21): zweites Kreispaar schneidend, drittes schneidend, einschliessend berührend, ineinanderliegend,
- 22) und 23): zweites Kreispaar einschliessend berührend, drittes ebenso oder ineinander liegend,
- 24): zweites und drittes Kreispaar ineinander liegend;

25) bis 30): erstes Kreispaar schneidend, und

- 25) bis 27): zweites ebenfalls schneidend, drittes ebenso oder einschliessend berührend, oder ineinander liegend,
- 28) und 29): zweites Kreispaar einschliessend berührend, drittes ebenso oder ineinander liegend,

30): zweites und drittes Kreispaar ineinander liegend;

31) bis 33): erstes Kreispaar einschliessend berührend, und

31) und 32): zweites ebenso, drittes ebenso oder ineinander liegend,

33): zweites und drittes Kreispaar ineinander liegend;

34): alle drei Kreispaare ineinander liegend.

Frage 135. Welche Tangentenbeziehungen können bei drei Kreisen auftreten?

Erkl. 297. Sowie bei einem Kreispaare die Beziehung des Auseinanderliegens übergeht in ausschliessende Berührung, geht eine innere Tangente verloren, beim Schneiden beide innere, bei einschliessender Berührung auch eine äussere, beim Ineinanderliegen beide äussere Tangenten. Man kann also die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten dadurch für jede Gruppe ziffernmässig ermitteln, dass man von 12 soviel abzieht, als die Multiplikation der Beziehungen der Kreispaare mit den ebengenannten Abzugsziffern ergibt. — So erhält man z. B. für Fall 20 der Figur 127 folgende Rechnung: erstes Paar ausschliessend berührend = — 1, zweites Paar schneidend = — 2, drittes Paar einschliessend berührend = — 3; also:

$$12 - 1 - 2 - 3 = 12 - 6 = 6$$

gemeinsame Tangenten, nämlich zwei in den zwei Berührungspunkten und noch zwei Paare äusserer Tangenten.

Erkl. 298. In den Fällen 18 und 31 der Figur 127 gelten auch für alle drei Kreise die in den Antworten 120 und 127 und Figur 115 und 121 angestellten Ueberlegungen über die durch den Berührungspunkt gezogenen Sekanten.

Antwort. 1) Die Anzahl gemeinschaftlicher Tangenten ist am grössten bei drei auseinander liegenden Kreisen. Denn dann hat jedes der drei Kreispaare zwei äussere und zwei innere Tangenten, also entsteht auf jeder der drei Zentrallinien je ein Schnittpunkt der äusseren und ein Schnittpunkt der inneren Tangenten, zusammen sechs solcher ausgezeichneten Schnittpunkte unter den sechs äusseren und sechs inneren gemeinsamen Tangenten der drei Kreise.

2) Wenn die drei Kreise einander alle drei nur in einem einzigen Berührungspunkte berühren, so ist daselbst eine allen drei Kreisen gemeinsame Tangente vorhanden. Und die Senkrechte auf diese Tangente im Berührungspunkte muss durch den Mittelpunkt eines jeden der drei Kreise gehen. Daher liegen in den Fällen 18) und 31) der Figur 127 alle drei Kreismittelpunkte auf derselben Geraden mit dem gemeinsamen Berührungspunkte der drei Kreise.

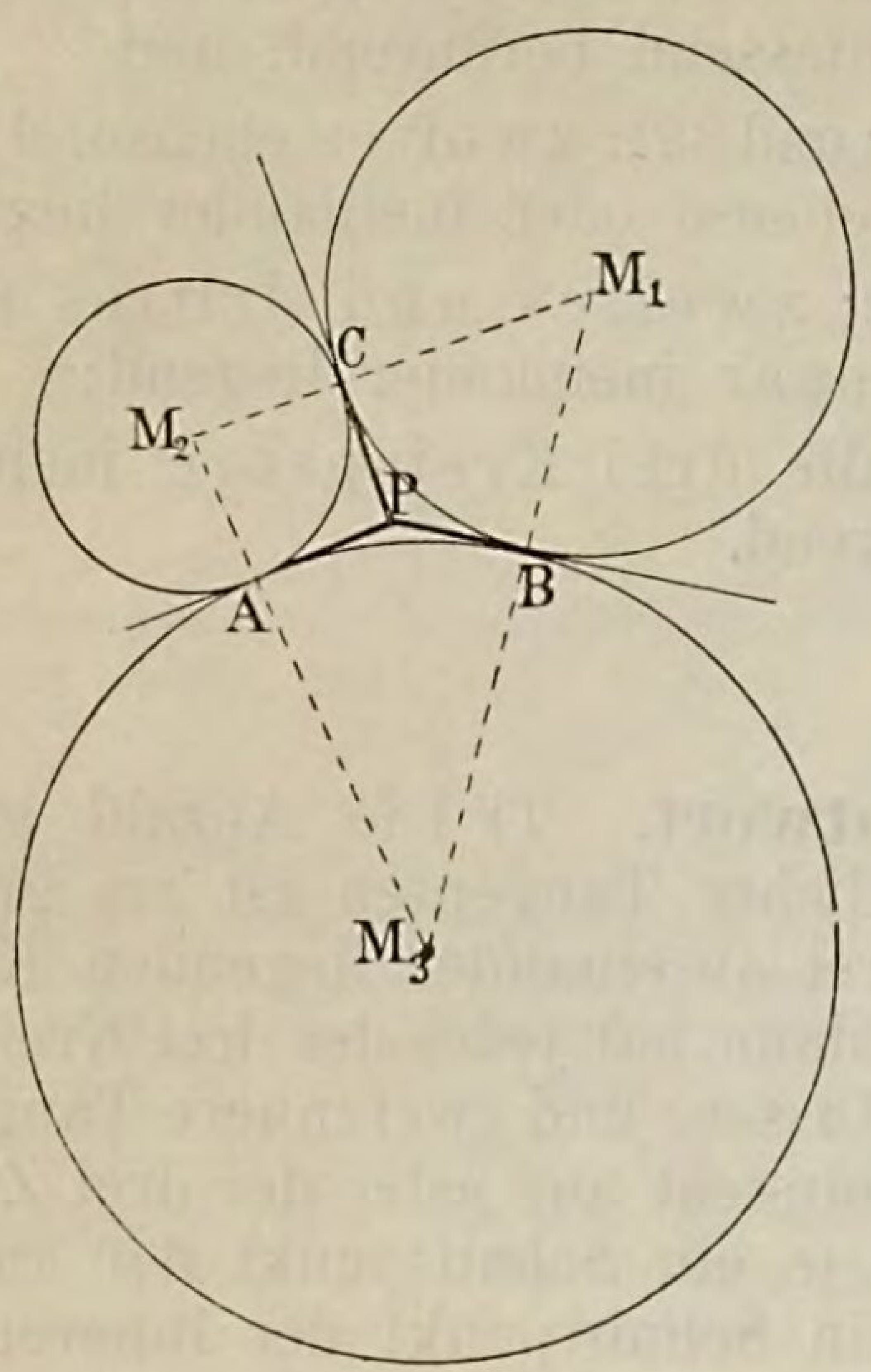
Frage 136. Was für Tangenten entstehen bei drei ausschliessend berührenden Kreispaaren?

Erkl. 299. Bemerkenswerte Erweiterungen des Ergebnisses der nebenstehenden Antwort für andere Fälle als die drei ausschliessend berührenden Kreise finden sich am obengenannten Orte im VII. Teile dieses Lehrbuches. Es zeigt sich nämlich mittels der Aehnlichkeitslehre, dass nicht nur die drei inneren Tangenten, sondern auch die vorkommenden inneren Tangenten mit den gemeinschaftlichen Sehnen oder diese allein unter sich bei je drei berührenden oder schnei-

Antwort. Wenn alle drei Kreispaare einander ausschliessend berühren, so haben je zwei eine gemeinschaftliche innere Tangente im Berührungspunkte (siehe Fig. 127, 16, 22, 32 und Fig. 128). Ist P der Schnittpunkt zweier dieser Tangenten, welche beide an den ersten Kreis gezogen sind, so müssen die auf den beiden von P aus entstehenden Abschnitte gleich sein, also $PA = PB$. Dann müssen aber von P aus auch an

denden Kreisen **durch denselben Punkt gehen.**

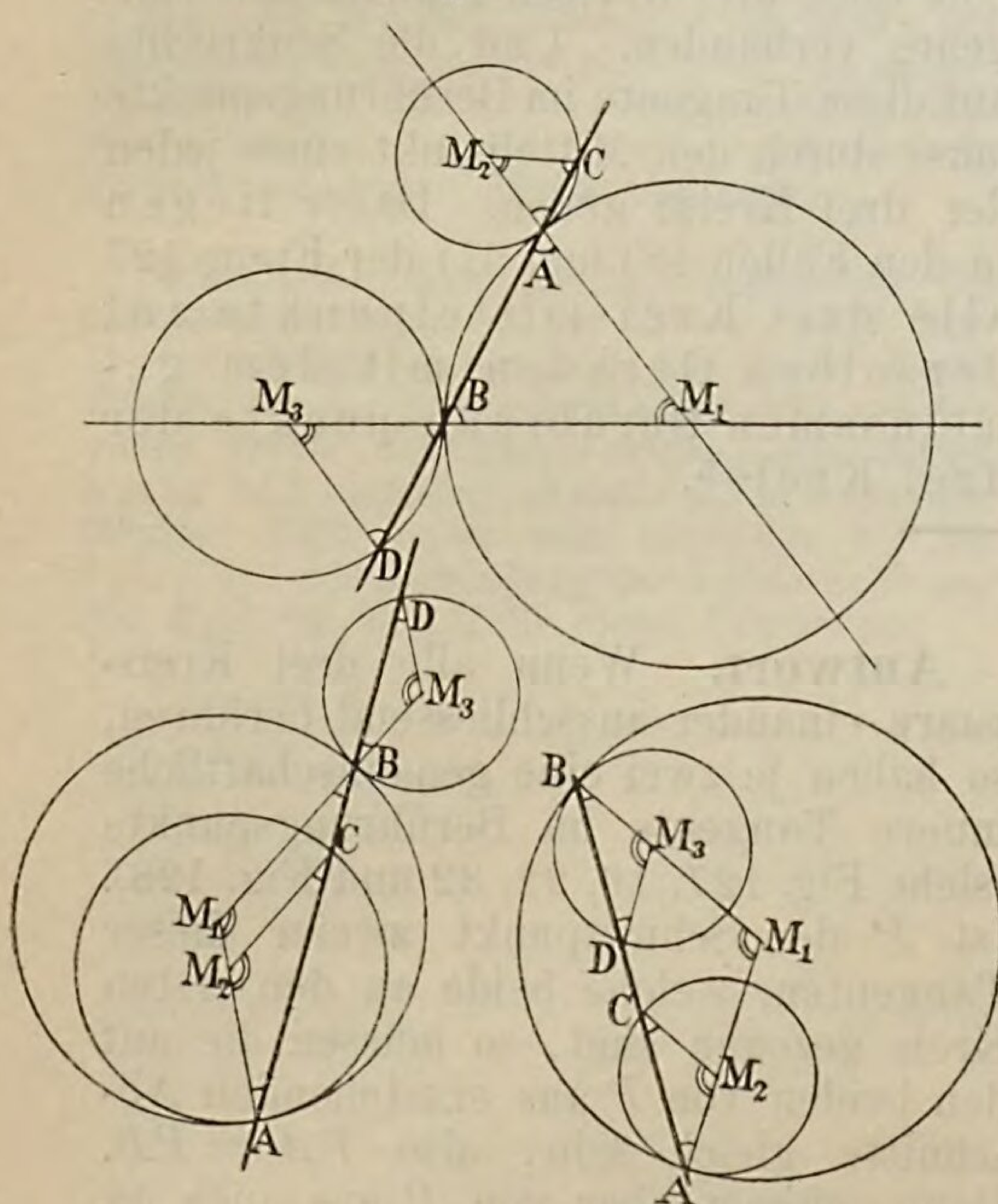
Figur 128.



den zweiten Kreis und an den dritten Kreis Tangentenabschnitte von derselben Länge gehen. Daher muss die zweite Tangente PC von P an den zweiten Kreis und die von P an den dritten Kreis zusammenfallen, oder die **drei inneren Tangenten dreier ausschliessend berührenden Kreise gehen durch einen und denselben Punkt und sind gleichlang.**

Frage 137. Was für Punkte schneidet die Verbindungslinie der Berührungspunkte eines Kreises mit zwei andern aus den drei Kreisen aus?

Figur 129.



Antwort. Zieht man in Figur 129 die Verbindungslinie AB und die Radien zu den Schnittpunkten A, B, C, D, so werden die Dreiecke M_1AB, M_2AC, M_3BD sämtlich gleichschenklig. Da aber die Radien M_1A und M_2A bezw. M_1B und M_3B nach Satz 34 auf eine Gerade fallen müssen, so entstehen bei A und B Scheitelwinkel, also haben alle drei Dreiecke dieselben drei Winkel:

$$\sphericalangle C = \sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle D,$$

und

$$\sphericalangle M_2 = \sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_3.$$

Also sind die **Radien eines Kreises nach den Berührungspunkten mit zwei andern parallel mit den Radien dieser beiden Kreise nach den Schnittpunkten der Verbindungslinie beider Berührungspunkte.**

Erkl. 300. Wie aus den drei Fällen der Figur 129 zu entnehmen ist, gilt die Aussage der nebenstehenden Antwort sowohl bei ausschliessender als einschliessender Berührung, und zwar gleichgültig, welcher der drei Kreise als erster gewählt wird.

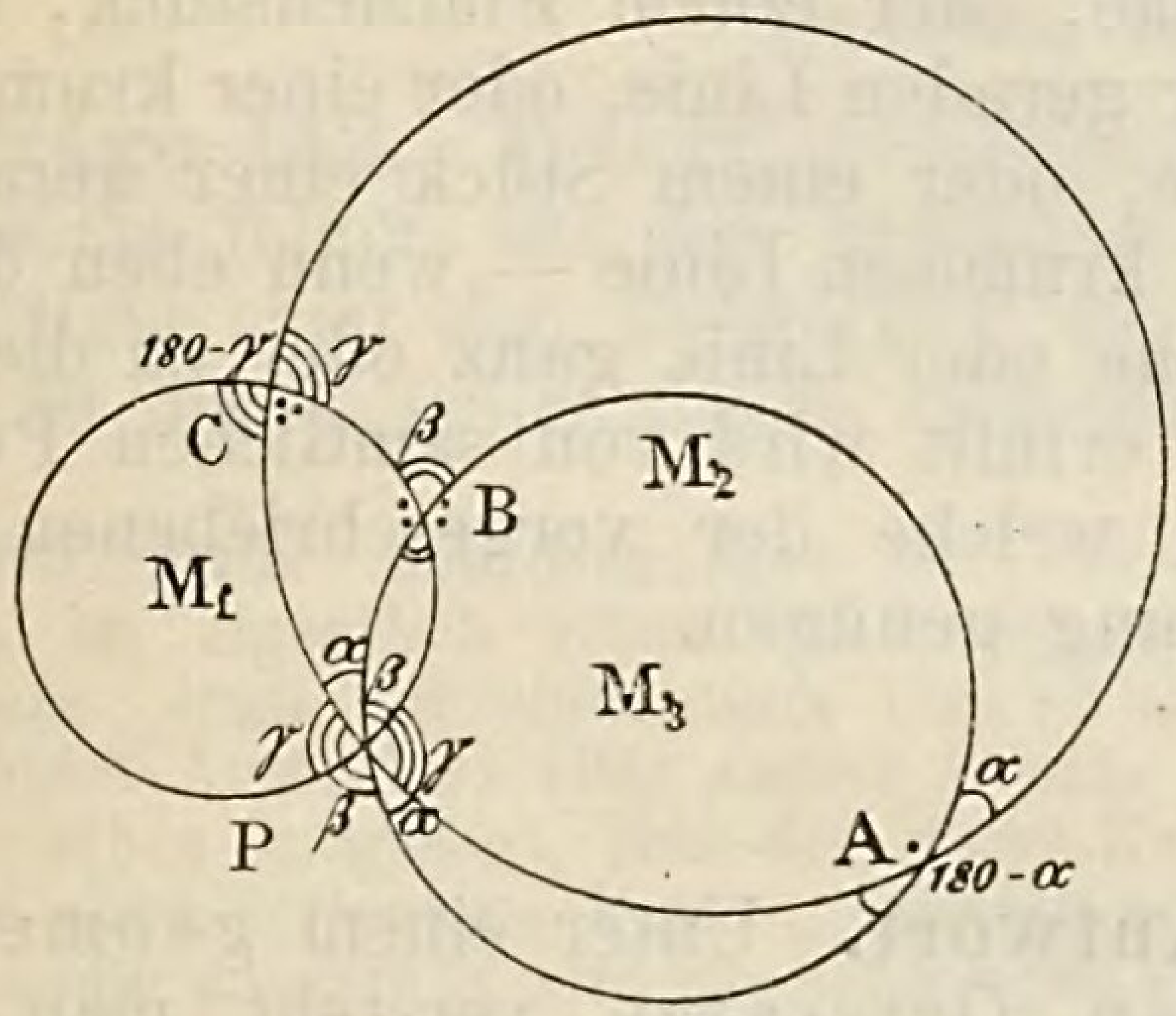
Wegen der gleichen Mittelpunktswinkel:

$$M_1 = M_2 = M_3$$

kann man auch sagen, die Verbindungslinie der Berührungspunkte eines Kreises mit zwei andern schneidet aus allen drei Kreisen gleichgrosse Kreisbogen aus.

Frage 138. Was für Bogendreiecke entstehen, wenn drei Kreise durch einen Punkt gehen?

Figur 130.



Erkl. 301. Man hat in jedem der vier Räume, zu denen auch der Gesamtaussenraum der drei Kreise gehört, nur Winkel von der Grösse α, β, γ, $180 - \alpha$, $180 - \beta$, $180 - \gamma$. In einem der vier Räume, nämlich ABC sind:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

beisammen, in dem andern PBC:

$$\alpha + (180 - \beta) + (180 - \gamma) = 360^0 + \alpha - \beta - \gamma = \alpha - \beta - \gamma,$$

bezw. im Aussenraum PAC:

$$(180 - \alpha) + \beta + (180 - \gamma) = 360^0 - \alpha + \beta - \gamma = -\alpha + \beta - \gamma,$$

bezw. in PAB:

$$(180 - \alpha) + (180 - \beta) + \gamma = 360^0 - \alpha - \beta + \gamma = -\alpha - \beta + \gamma.$$

Umgekehrt kann man behaupten, dass wenn die Winkelsumme eines Bogendreiecks gleich 180^0 ist, dann alle drei Kreise durch denselben Punkt gehen müssen.

Antwort. Wenn drei Kreise durch einen gleichen Punkt P (s. Figur 129) gehen, so entstehen vier von Bogenstücken begrenzte Räume, welche zu Begrenzungen je ein Bogenstück eines der drei Kreise haben. Bezeichnet man nun mit α, β, γ die Schnittwinkel der drei Kreise am Punkt P und überträgt diese Bezeichnung auf die gleichgrossen Winkel an den andern Schnittpunkten, so findet man (wie in Erkl. 301 durchgeführt ist), dass die Winkelsummen der vier genannten von Bogenstücken gebildeten Dreiecke sind:

1) $\alpha + \beta + \gamma$, 2) $+\alpha - \beta - \gamma$,
3) $-\alpha + \beta - \gamma$, 4) $-\alpha - \beta + \gamma$.

Darunter ist der erstere Betrag wie beim geradlinigen Dreieck $= 180^0$, nämlich bei demjenigen aus den 4 Kreisschnittpunkten zu bildenden Bogendreieck, welches den Schnittpunkt P der drei Kreise nicht zur Ecke hat.

B. Ueber die geometrischen Oerter.

a) Ueber geometrische Ortssätze im allgemeinen.

Frage 139. Was versteht man unter einem geometrischen Ort eines Punktes?

Erkl. 302. Man hat nach dem Nebenstehenden wohl zu unterscheiden zwischen dem „geometrischen Ort“ und etwa dem geographischen oder astronomischen Ort; denn während der erstere eine ganze Reihe von Punkten bezeichnet, ist letzterer ein einziger Punkt auf der Karte oder am Himmel. Es bezeichnet daher insbesondere der geometrische Ort auch etwas ganz anderes, als im Sprachgebrauch des gewöhnlichen Lebens unter einem Orte verstanden wird.

Erkl. 303. Man könnte auch von einem geometrischen Orte einer geraden Linie oder sogar einer Kreislinie (vergl. Erkl. 307) reden, wenn man die Gesamtheit ihrer Lagen als die von der Gesamtheit gebildete oder eingehüllte Kurve ansehen will (siehe Erkl. 61). Dann würde z. B. in Figur 22 der Kreis um M als geometrischer Ort derjenigen geraden Linie anzusehen sein, welche von M den gleichen Abstand r hat.

Antwort. Unter einem geometrischen Ort eines Punktes versteht man die Gesamtheit aller derjenigen Lagen — oder den Inbegriff aller derjenigen Lagen — oder die von allen denjenigen Lagen gebildete Figur — welche ein Punkt einnehmen kann, um eine gegebene Bedingung zu erfüllen — oder eine gegebene Eigenschaft zu besitzen — oder einer gegebenen Vorschrift zu genügen.

Der geometrische Ort eines Punktes kann daher gebildet sein von einer Fläche, oder einem Flächenstück, oder einer geraden Linie, oder einer krummen Linie, oder einem Stück einer geraden oder krummen Linie — wenn eben diese Fläche oder Linie ganz oder zu diesem Teil erfüllt wird von sämtlichen Punkten, welche der vorgeschriebenen Bedingung genügen.

Frage 140. Was versteht man unter einem „geometrischen Ortssatze“?

Erkl. 304. Es kann vorkommen, dass zwar alle Punkte einer Linie eine bestimmte Bedingung erfüllen. Diese Linie darf aber nicht als geometrischer Ort des gesuchten Punktes bezeichnet werden, solange nicht bewiesen ist, dass kein Punkt ausserhalb derselben besteht, der etwa dieselbe Eigenschaft ebenfalls besitzt, dass also auch nur die Punkte dieser Linie die Eigenschaft haben, oder dass alle Punkte, welche die Eigenschaft besitzen, auch wirklich nur auf jener Linie liegen.

Umgekehrt kann es vorkommen, dass etwa alle Punkte, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen, auf einem gewissen Kreise liegen. Dieser Kreis darf aber nicht als geometrischer Ort des gesuchten Punktes bezeichnet werden, solange nicht bewiesen ist, dass kein Punkt auf dem Kreise liegt, der etwa diese Eigenschaft nicht besitzt, dass also auch alle Punkte dieser Kreislinie die genannte Eigenschaft besitzen.

Antwort. Unter einem geometrischen Ortssatze versteht man die Aussage, dass die Gesamtheit der Punkte von gegebener Eigenschaft ein gewisses Raumgebilde ausfülle. Ein solcher geometrischer Ortssatz vereinigt also in sich einen planimetrischen Satz samt seiner Umkehrung, nämlich:

1) dass alle Punkte, welche auf dem geometrischen Orte liegen, die gegebene Eigenschaft besitzen;

und umgekehrt:

2) dass alle Punkte, welche die gegebene Eigenschaft besitzen, auf dem geometrischen Orte liegen.

Erst wenn diese beiden Sätze bewiesen sind, darf ihre Vereinigung als geometrischer Ortssatz ausgesprochen werden.

Daher bedarf ein geometrischer Ortssatz stets zweier Beweise.

Frage 141. In welcher Beziehung zu einander stehen die beiden in einem Ortssatze vereinigten Sätze?

Erkl. 305. Die beiden Beweise eines geometrischen Ortssatzes können verglichen werden mit dem der notwendigen und hinreichenden Bedingung. Ist es notwendig, dass ein Punkt auf dem Orte liegen muss, um die gegebene Eigenschaft besitzen zu können, so ist der zweite Satz erfüllt. Ist die Lage auf dem Orte hinreichend für einen Punkt, um die Eigenschaft zu besitzen, so müssen demnach alle Punkte des Ortes der Bedingung genügen, also ist auch der erste der beiden Sätze erfüllt. Das Zusammentreffen beider aber beweist die Richtigkeit des „Ortssatzes".

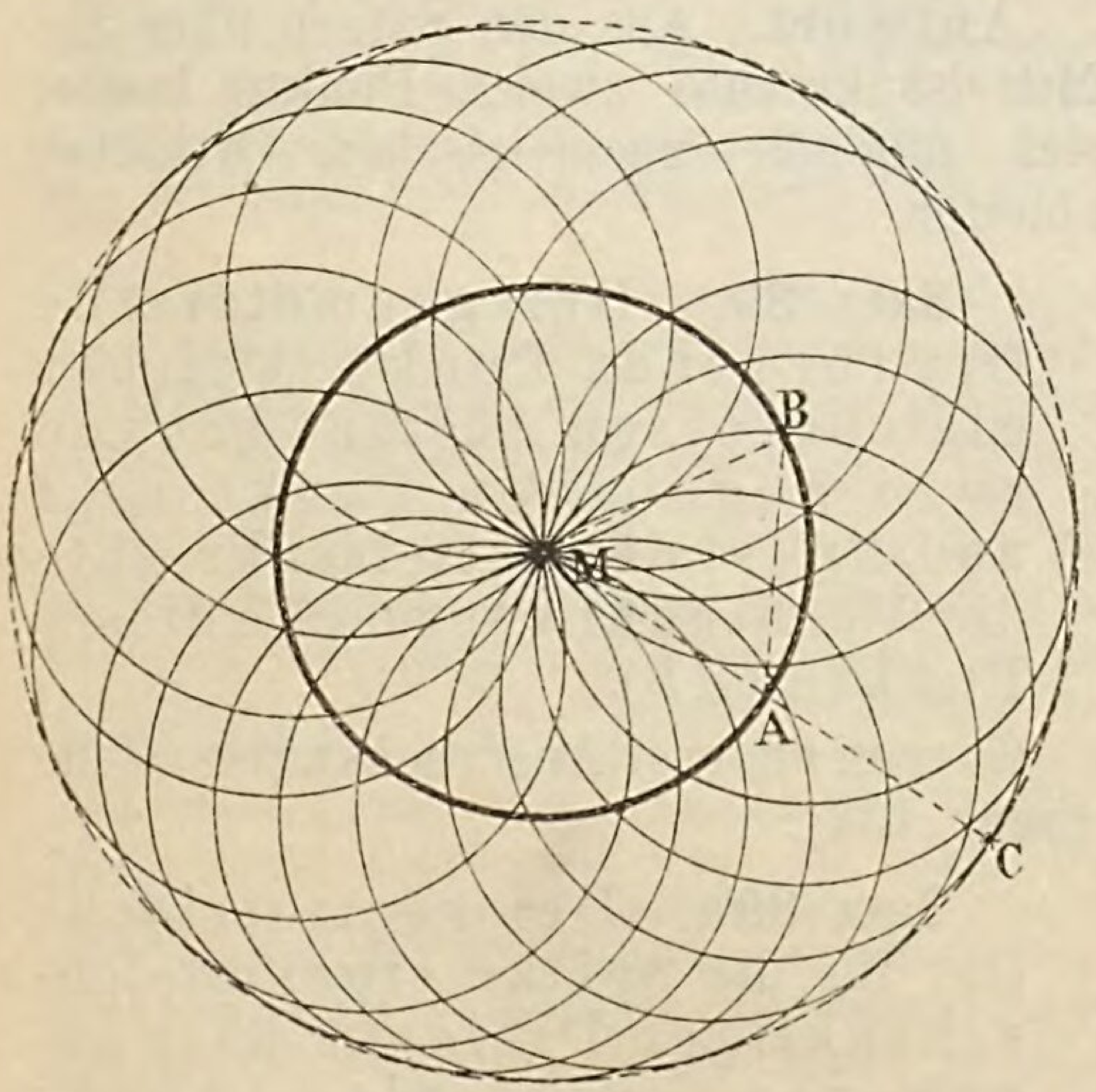
Antwort. Die beiden Sätze, welche zu einem Ortssatze sich vereinigen lassen, stehen in der Beziehung der ausschliessenden Umkehrung. Der eine besagt: die Lage auf dem Orte bedinge den Besitz der Eigenschaft, der andere: der Besitz der Eigenschaft bedinge die Lage auf dem Orte. Nur solche Sätze, denen eindeutige Umkehrbarkeit zukommt, können unmittelbar als Ortssätze ausgesprochen werden. Umgekehrt aber gelten obige beiden Sätze unmittelbar, wenn der Ortssatz gegeben ist.

b) Geometrische Ortssätze über den Abstand eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden und Kreisen.

Frage 142. Welche geometrischen Ortssätze folgen aus der Definition der Kreislinie samt den Lehrsätzen 22 und und 29 des I. Teiles dieses Lehrbuches.

Erkl. 306. Die Definition der Kreislinie selbst ist eigentlich schon ein geometrischer Ortssatz, denn mit eindeutiger Umkehrbarkeit und unter Ausschluss aller andern Punkte wird in derselben ausgesagt, dass der Name Kreislinie eben derjenigen Figur zukommt, welche vollständig ausgefüllt wird von denjenigen Punkten einer Ebene, welche den gleichen Abstand r von einem gegebenen Punkte M haben.

Figur 131.



Antwort. Da in der Definition der Kreislinie selbst die beiden Bedingungen enthalten sind, dass die Eigenschaft des gleichen Abstandes vom Mittelpunkte und die Lage auf der Kreisperipherie einander gegenseitig bedingen, so erhält man folgende Ortssätze:

Satz 38. Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher von einem gegebenen Punkte (M) einen bestimmten Abstand (r) hat, ist die Kreislinie um den gegebenen Punkt (M) mit der gegebenen Abstandsstrecke (r) als Radius.

Und in anderer Ausdrucksweise (vergleiche Figur 131):

Satz 38a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit bestimmtem Radius (r), welcher durch einen gegebenen Punkt (M) geht, ist die Kreislinie um den gegebenen Punkt (M) mit dem gegebenen Radius (r).

Dieser Ortssatz hat bereits Anwendung gefunden bei allen Konstruktionsaufgaben der früheren Teile dieses Lehrbuches, bei welchen die Kreislinie als

Erkl. 307. Damit ein Kreis um A mit Radius r durch M gehe, muss $MA = r$ sein; und wenn umgekehrt $MA = r$ ist, so muss ein Kreis um A mit Radius r durch M gehen. — Ist B ein Schnittpunkt des Kreises um M mit dem Kreise um A, so ist $\sphericalangle ABM = 60^0$. Die Tangenten an beide Kreise in B sind die Senkrechten auf die Schenkel des Winkels ABM, also wird der Kreis um M von jedem der vielen andern Kreise unter einem Winkel von 60^0 geschnitten.

Der Durchmesser des Kreises um A mit Radius r hat die Länge $MC = 2 \cdot r$. Also liegen die Endpunkte der von M ausgehenden Durchmesser aller durch M gehenden Kreise auf einem Kreise um M mit Radius $2r$. Man könnte sagen, dieser Kreis um M mit Radius $2r$ ist ein Ort der Kreise, er wird von der Gesamtheit der Kreise berührt, ebenso wie der Punkt M selbst von all diesen Kreisen berührt wird.

Erkl. 308. Da jeder Punkt im Innern des Kreises um M mit Radius r einen kleinern Abstand von M hat, als die Strecke r; und da umgekehrt jeder Punkt, welcher näher bei M ist, als um die Strecke r, im Innern des Kreises liegen muss, so könnte man auch folgende beide Ortssätze aussprechen, bei welchen wirklich Flächenstücke als geometrische Oerter auftreten:

„Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Abstand von einem gegebenen Punkte (M) kleiner (bezw. grösser) ist, als eine gegebene Strecke (r), ist der Innenraum (bezw. der Aussenraum) des Kreises um den gegebenen Punkt (M) mit der gegebenen Strecke (r) als Radius.“

Hilfslinie zur Ausführung der Aufgaben benutzt wurde.

Frage 143. Welche geometrischen Ortssätze folgen aus den Sätzen 14, 15 und 57 im III. Teile dieses Lehrbuches über die Mittelsenkrechte zweier Punkte bei der achsigen Symmetrie und im gleichschenkligen Dreieck?

Antwort. Aus den Sätzen über die Mittelsenkrechte zweier Punkte lassen sich folgende geometrischen Ortssätze ableiten:

Satz 39. Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher gleichgrossen Abstand hat von zwei gegebenen Punkten (A und B), ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser Punkte (AB).

Oder in anderer Ausdrucksweise (siehe Figur 132):

Satz 39a. Der geometrische Ort für die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks über gegebener Grundseite (AB) ist

Erkl. 309. Die beiden Beweise für den Satz 39 sind bereits an den genannten früheren Stellen dieses Lehrbuches geführt. Ihr Gang ist folgender:

1) Liegt ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten von AB, so fällt beim Umklappen um dieselbe A auf B, P bleibt liegen, also fällt PA auf PB und $PA = PB$; also bedingt die Lage auf der Mittelsenkrechten die Gleichheit der Strecken PA und PB.

2) Ist $PA = PB$, so klappt man um die Winkelhalbierende APB um: dann fällt PA auf PB, Punkt A auf Punkt B, die Verbindungsstrecke AB wird selbstentsprechende Linie, also Achsensenkrechte, und die durch P gezogene Achse ist eben die Mittelsenkrechte von AB; also bedingt die Gleichheit der Strecken PA

und PB die Lage des Punktes P auf der Mittelsenkrechten.

Erkl. 310. Auch mittels Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke PMA und PMB lassen sich die beiden Beweise führen:

1) Liegt P auf der Mittelsenkrechten, so ist in beiden Dreiecken $MA = MB$, $MP = MP$, $\sphericalangle AMP = BMP = 90^0$, also sind die Dreiecke kongruent nach dem zweiten Kongruenzsatze, folglich auch $AP = BP$.

2) Ist $AP = BP$, und man fällt die Senkrechte, so ist ausserdem $MP = MP$ und

$$\sphericalangle AMP = BMP = 90^0,$$

also die Dreiecke kongruent nach dem dritten Kongruenzsatze, folglich auch $AM = BM$. Ist aber $AP = BP$, und verbindet man P und M, so ist ausserdem $MP = MP$ und $AM = BM$, also sind die Dreiecke kongruent nach dem ersten Kongruenzsatze, und folglich auch:

$$\sphericalangle AMP = BMP.$$

Da diese Winkel aber Nebenwinkel sind, so ist jeder ein Rechter.

Erkl. 311. Für Satz 39a kann der Beweis aus der Antwort 97 des dritten Teiles über das gleichschenklige Dreieck entnommen werden:

1) Ist in Figur 132 P ein Punkt der Mittelsenkrechten von AB, so ist APB ein Dreieck, dessen Spitze P senkrecht über der Mitte ihrer Gegenseite liegt, also ein gleichschenkliges Dreieck, folglich $PA = PB$.

2) Ist $PA = PB$, so ist APB ein gleichschenkliges Dreieck, folglich geht die Mittelsenkrechte der Grundseite durch die Spitze, also liegt P auf der Mittelsenkrechten von AB.

Erkl. 312. Für Satz 39b gelten die beiden in Erkl. 310 und 311 angegebenen Beweise ohne jede Aenderung, da der Mittelpunkt eines Kreises von jedem Punkt seiner Peripherie denselben Abstand hat, also auch mit je zweien der Peripheriepunkte ein gleichschenkliges Dreieck mit deren Sehne als Grundseite bildet.

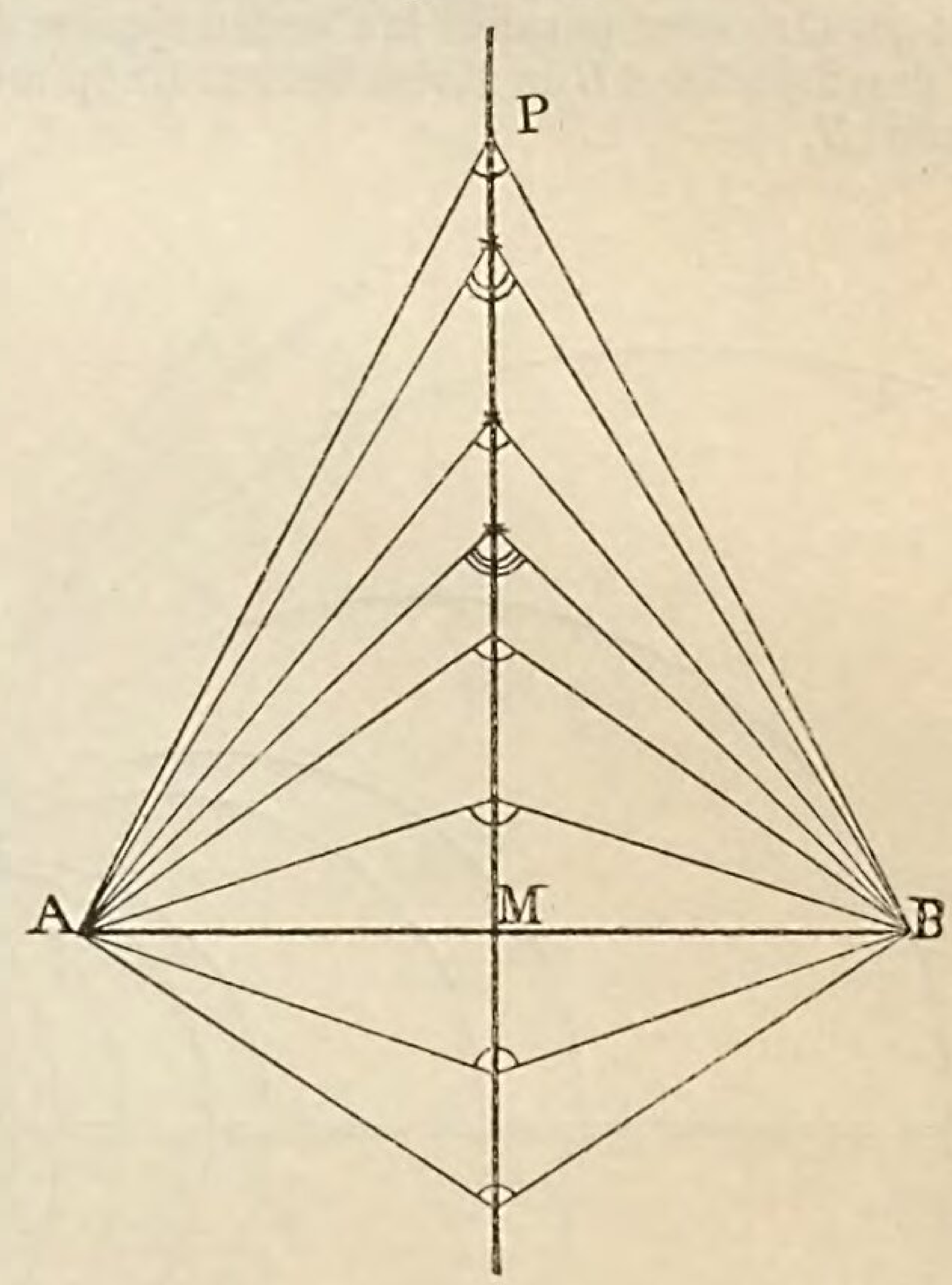
Erkl. 313. In Figur 132 sind die Winkel an der Grundseite bezw. an der Spitze der gleichschenkligen Dreiecke und ebenso die Schenkellängen in stetiger Folge begriffen. Wandert nämlich der Punkt P aus weiter Ferne her, so ist der Winkel an der Spitze sehr klein, der an der Grundseite sehr nahe am Rechten, die Schenkel sehr gross und zwar länger als die Grundseite AB. Bei weiterer Bewegung des Punktes P wird der Winkel an der Spitze immer grösser, der an der Basis und ebenso die Schenkellänge immer kleiner, und wenn der Winkel am Punkte P bis zu 60^0 zugenommen hat, so sind beide Basiswinkel bis zu 60^0 gestiegen, das Dreieck ist gleichseitig geworden, die Schenkellänge $PA = PB$ ist auch $= AB$. Rückt P noch näher an den Mittelpunkt von AB heran, so

die Mittelsenkrechte dieser Grundseite.

Oder in anderer Ausdrucksweise (siehe Figur 133):

Satz 39b. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch zwei gegebene Punkte (A und B) geht — oder welcher eine gegebene Strecke (AB) zur Sehne hat — ist die Mittelsenkrechte dieser Sehne (AB).

Figur 132.



wird $\sphericalangle P$ noch grösser als 60°, die Basiswinkel kleiner, die Schenkellänge kleiner als AB; und wenn $\sphericalangle P = 90°$ geworden ist, so sind die Basiswinkel zu 45° geworden, es entsteht das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck. Bis Punkt P vollends in den Mittelpunkt M von AB gerückt ist, wächst $\sphericalangle P$ von 90 bis 180°, die Grundseitenwinkel fallen bis zu 0°, die Schenkellänge fällt bis:

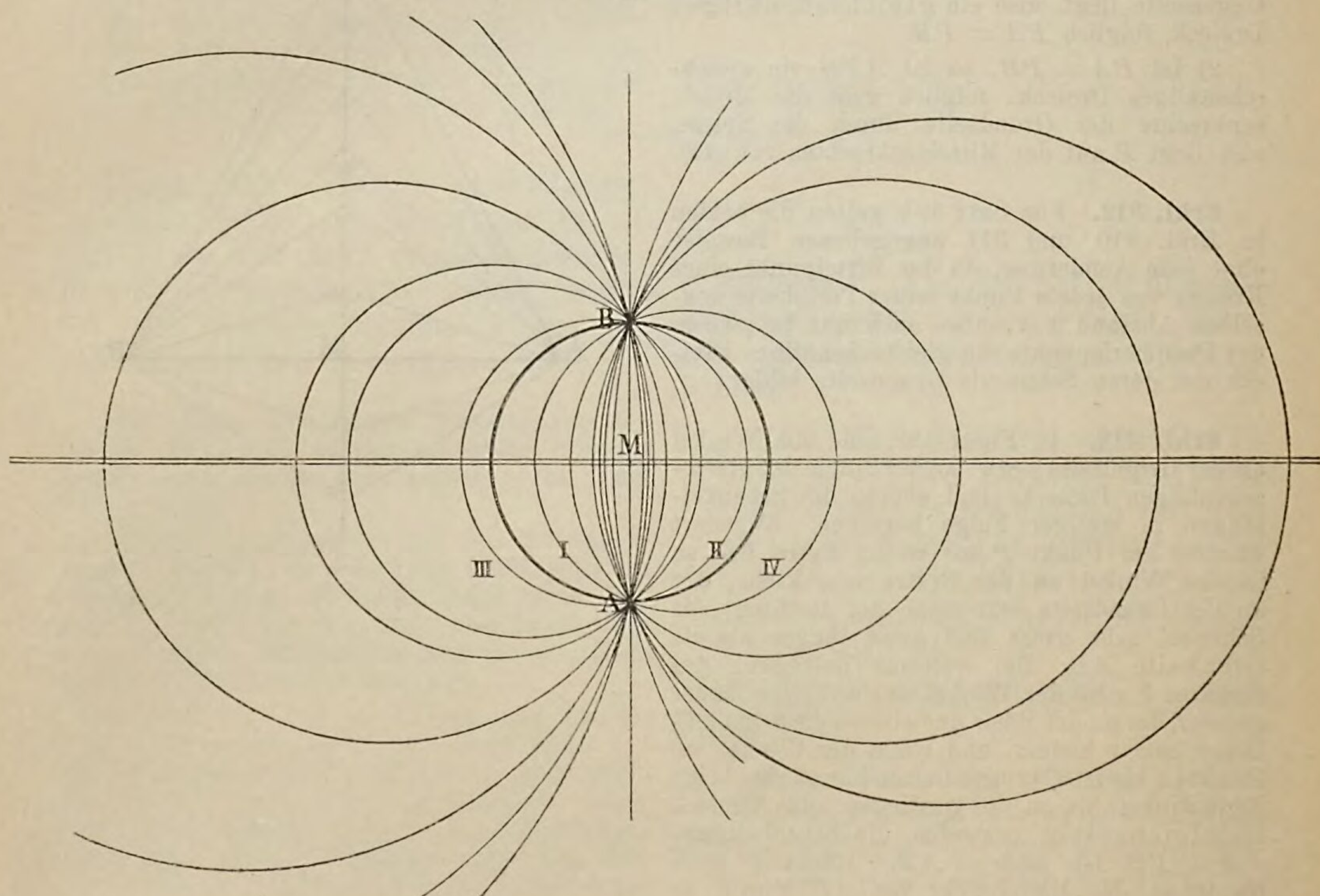
$$MA = MB = \frac{AB}{2},$$

kann aber keine kleineren Werte annehmen. Denn das Dreieck fällt mit der Strecke AB selbst zusammen, und bis Punkt P auf der andern Seite der Mittelsenkrechten weiterwandert, erscheint das gleichschenklige Dreieck auf der andern Seite von AB, und nimmt $\sphericalangle P$ wieder kleinere Werte an als 180°. Die Basiswinkel nehmen der Reihe nach dieselben grösseren Werte wieder an, wie zuvor, und die Schenkellänge wächst wieder von $\frac{AB}{2}$ aufwärts zunächst bis AB und darüber hinaus bis ins Unendliche. Der letztere Grenzfall wäre ein Dreieck über AB mit $\sphericalangle P = 0°$,

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°,$$

also ein Parallelstreifen, gebildet durch die zwei zu einander parallel laufenden Senkrechten auf der Strecke AB in ihren beiden Endpunkten A und B.

Figur 133.



Erkl. 314. Die aus unendlich vielen Kreisen durch die zwei festen Punkte A, B bestehende Figur 133 wird ein Kreisbüschel genannt, und die Punkte A und B heissen die „festen Punkte“ oder die Träger des Kreisbüschels. Jeder dieser Kreise bildet mit der Sehne AB an deren Endpunkten zwei gleichgrosse Schnittwinkel, gebildet durch die Sehne AB mit der Tangente des Kreises in A (oder B). Da diese Tangente auf dem Radius PA senkrecht steht, so ist der Tangentenwinkel das Komplement zu dem Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks PAB. Daher ist der Schnittwinkel von Sehne und Kreis, wenn der Mittelpunkt P in weiter Ferne ist, sehr klein, wird grösser bis zu 30^0, wenn $r = AB$; wird 45^0, wenn $\sphericalangle APB = 90^0$ ist; wird 60^0, wenn:

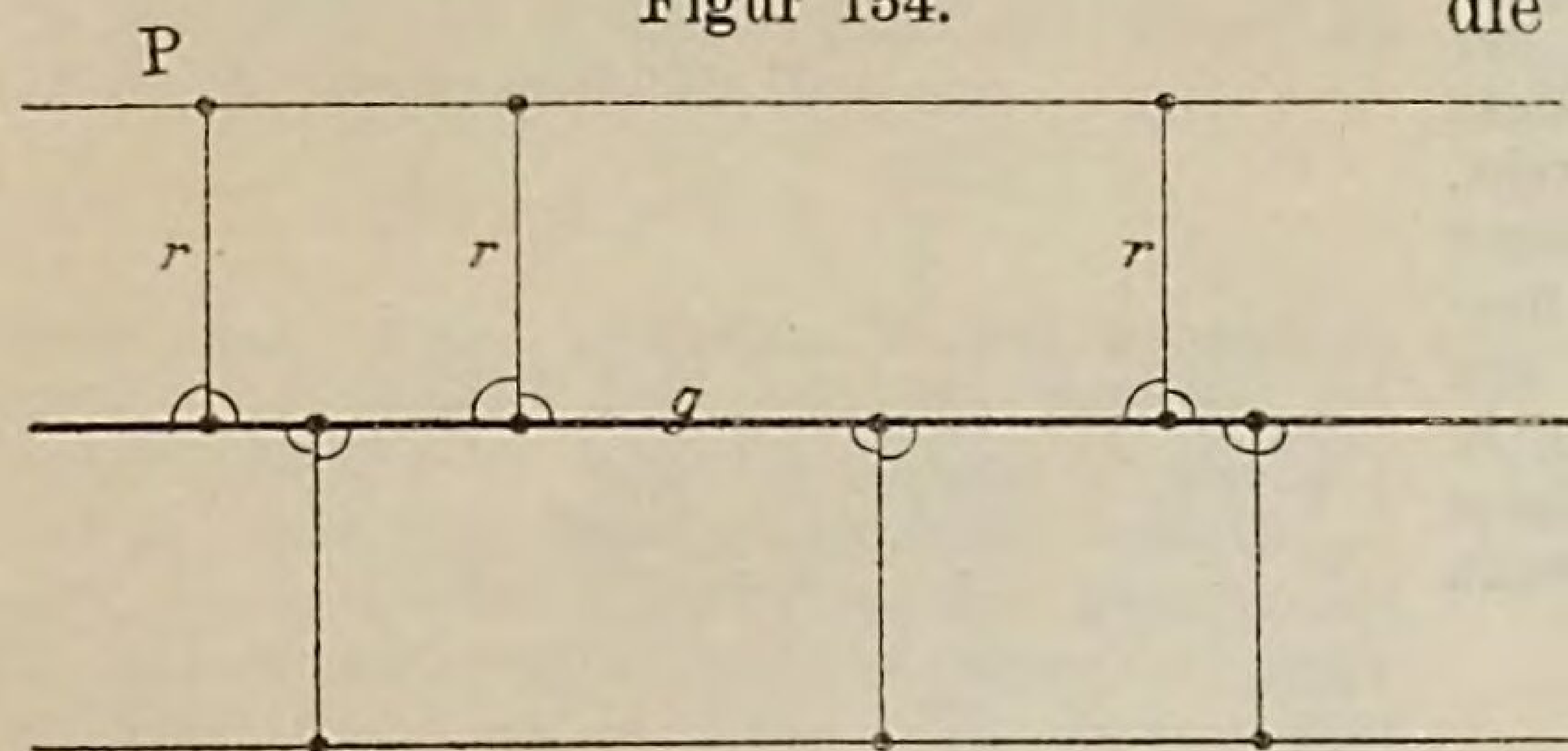
$$\sphericalangle APB = 120^0$$

ist; und wird 90^0, wenn P in den Mittelpunkt von AB fällt. Dann ist AB selbst Durchmesser und der Radius hat seinen kleinst möglichen Wert erreicht, nämlich $r = \frac{AB}{2}$. Vorher und nachher ist der Radius stets grösser als $\frac{AB}{2}$. Wandert P durch M hindurch, so werden dieselben Werte in umgekehrter Folge durchlaufen, der Schnittwinkel zwischen Sehne und Kreis wird immer kleiner, der Radius immer grösser; und als Grenzfall erscheint der Kreis mit unendlich grossem Radius, welcher die Sehne AB unter dem Winkel von 0^0 schneidet; derselbe ist zur geraden Linie AB selbst geworden, die Strecke AB also ein Stück dieses unendlich grossen Kreises selbst geworden.

Erkl. 315. Durch denjenigen Kreis des Büschels, welcher AB zum Durchmesser hat, und durch eben dieselbe Linie AB als Ganze wird die Gesamtebene der Figur 133 in vier Räume I, II, III, IV geteilt, davon je zwei benachbarte längs einem Halbkreise oder dem Durchmesser AB aneinander grenzen. Von diesen vier Räumen sind aber als zugeordnet zu betrachten I mit IV und II mit III, deren jeder mit dem andern nur in den Punkten A und B zusammenstösst. Denn jeder Kreisbogen in I hat seine Fortsetzung in IV, jeder Bogen im Raume III hat seine Fortsetzung in II. Einer grösseren Lücke zwischen zwei Kreisen des Raumes I entspricht ein ebensolcher weiterer Abstand in III. Und während der Kreisbogen des Halbkreises über AB sich verengert und verflacht bis zur Sehne AB, dehnt sich der zugehörige Kreisbogen sehr rasch aus vom andern Halbkreise bis zur geraden Linie AB. Der über AB als Durchmesser errichtete Kreis ist der einzige von allen Kreisen des Büschels, dessen beide Kreisbogen beiderseits AB gleichgross sind.

Frage 144. Welche geometrischen Ortssätze entsprechen den Sätzen 38 und 39, wenn an Stelle des Punktes M eine gerade Linie g eintritt.

Figur 134.



Antwort. Wenn ein Punkt P von einer gegebenen Geraden g einen bestimmten Abstand r haben soll, so muss die senkrechte Strecke von P auf die Gerade g die Länge r haben, und P muss der Endpunkt einer auf g errichteten Senkrechten von der Länge r sein. Man erhält daher als Zusammenfassung der Sätze 70a und 70b im III. Teile dieses Lehrbuches den folgenden Ortssatz (siehe Figur 134):

Satz 40. Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher von einer gegebenen Geraden (g) einen bestimmten Abstand (r) hat, ist das Paar der zur gegebenen Geraden (g) im gegebenen Abstande (r) parallelen Geraden.

Und da nach Satz 11 auch die Senkrechte vom Kreismittelpunkt auf eine Tangente die Länge des Radius hat, so erhält man als andere Ausdrucksweise des vorigen (siehe Figur 135):

Satz 40a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit bestimmtem Radius (r), welcher eine gegebene Gerade (g) berührt, ist das Paar der zur gegebenen Geraden (g) im gegebenen Abstande (r) parallelen Geraden.

Wird die Strecke r nicht senkrecht zu g angetragen, sondern unter einem gegebenen gleichbleibenden Winkel α, so bilden je zwei verschiedene Lagen derselben die Gegenseiten eines Parallelogramms, also liegen auch dann wieder die Endpunkte auf einer Parallelen zu g. Man erhält daher die weiteren Aussagen (siehe Figur 136):

Satz 41. Der geometrische Ort für den Endpunkt einer Strecke von bestimmter Länge (r), welche an eine gegebene Gerade (g) unter gegebenem Winkel (α) angetragen wird, ist das Paar von Parallelen

Erkl. 316. Die beiden Beweise für den Satz 40 sind bereits geführt worden für die Einzelsätze 70a und 70b im III. Teile. Ihr Gang ist folgender:

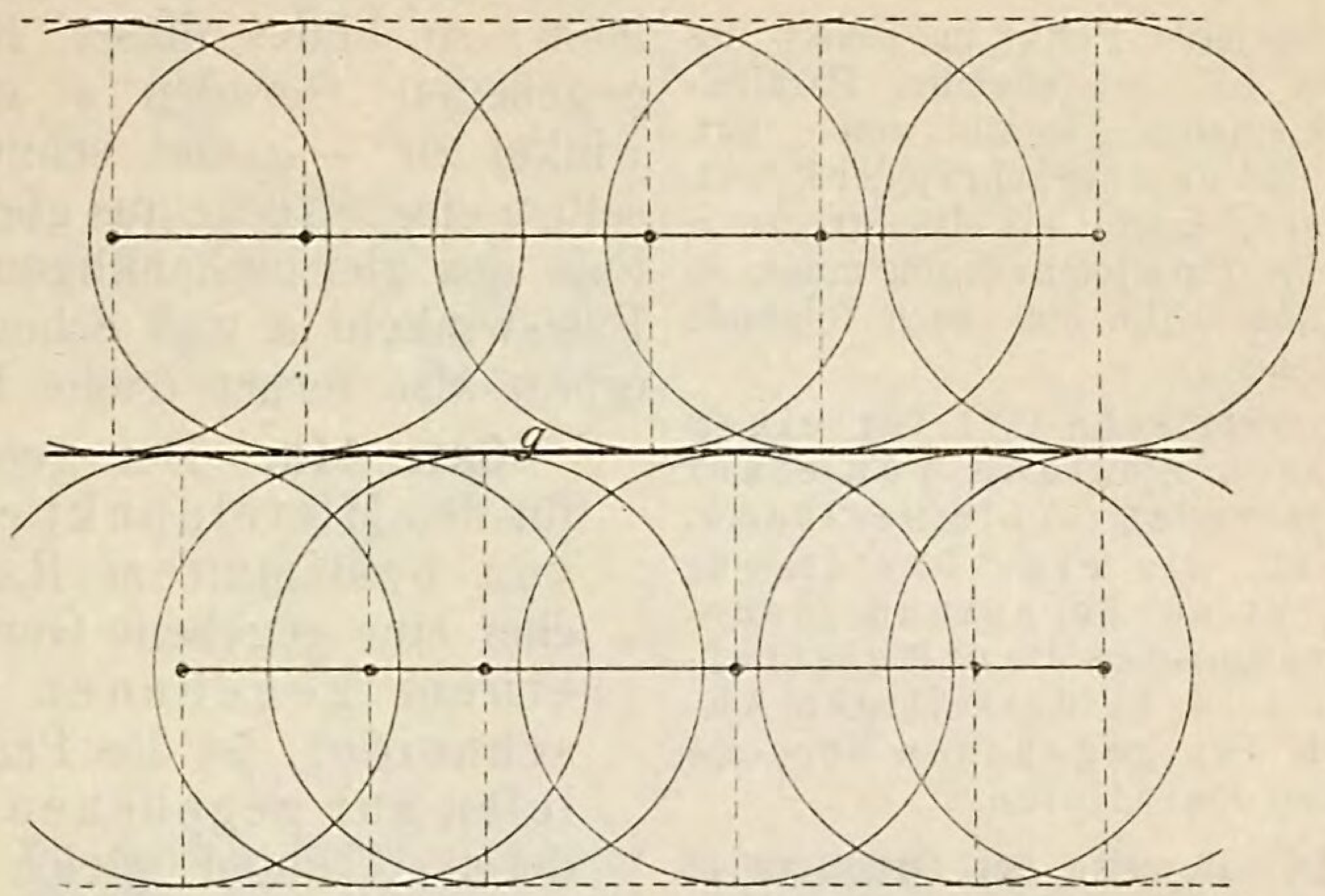
1) Liegt ein Punkt P auf einer Parallelen zu g mit Abstand r, so ist eine der senkrechten Strecken (und folglich alle senkrechten Strecken zwischen diesen Parallelen gleichlang, nämlich) gleich r, also ist auch die von P aus auf g errichtete Senkrechte, nämlich die Abstandsstrecke zwischen P und g von der Länge r.

2) Ist die Senkrechte von P auf g gleich r, und man zieht durch P eine Parallele zu g, so ist eben diese Parallele eine solche, welche von g den Abstand r hat. Und auf ihr als der einzig möglichen liegt Punkt P.

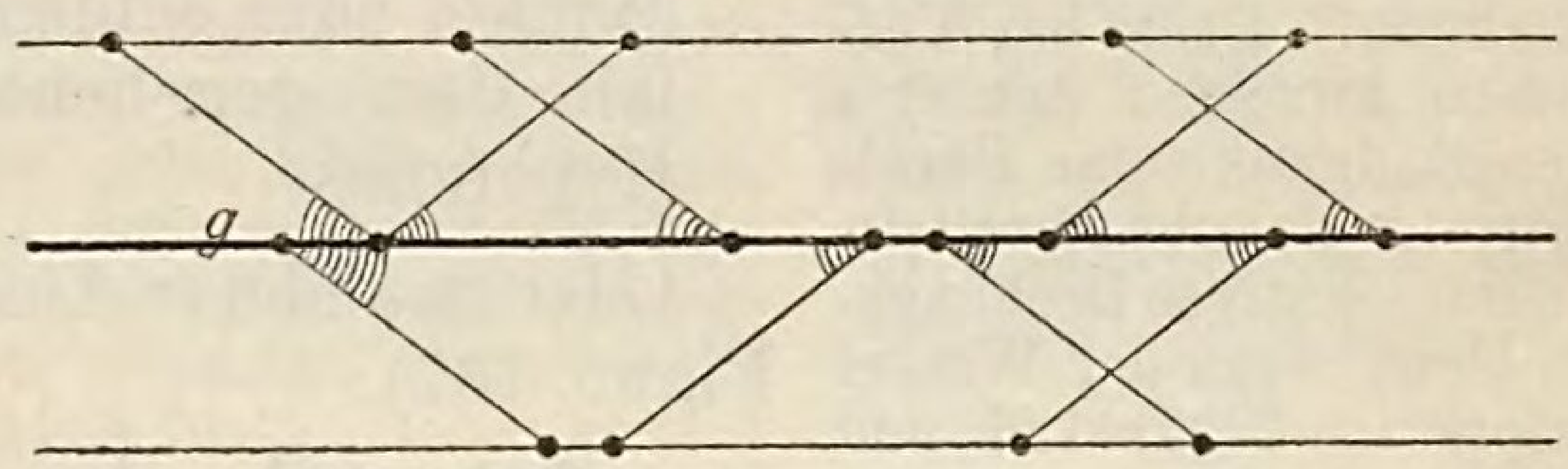
Erkl. 317. Aehnlich, wie in Erkl. 306 für den Kreis angegeben wurde, könnte man auch die Definition der parallelen Linien, welche im II. Teile dieses Lehrbuches auf die Nichterreichbarkeit eines gemeinsamen (Schnitt-) Punktes gegründet wurde, auf andere Weise auffassen, so dass nämlich eben der nebenstehende Ortssatz 40 als Definition der Parallelen angenommen wird. Man würde dann mit eindeutiger Umkehrbarkeit und unter Ausschluss aller anderen Punkte aussagen, dass der Name der Parallelen eben derjenigen Figur zukommt, welche vollständig ausgefüllt wird von denjenigen Punkten einer Ebene, welche den gleichen Abstand r von einer gegebenen Geraden g haben.

Erkl. 318. Wird um einen Punkt der zu g im Abstande r parallelen Geraden ein Kreis mit Radius r beschrieben, so ist g eine im Endpunkte des Radius r senkrechte Linie, also berührt g den Kreis. — Wird umgekehrt der Mittelpunkt eines die Gerade g berührenden Kreises vom Radius r mit dem Berührungspunkte auf g verbunden, so steht diese Verbindungslinie auf g senkrecht und hat die Länge r, also liegt der Mittelpunkt in senkrechtem Abstand r von g.

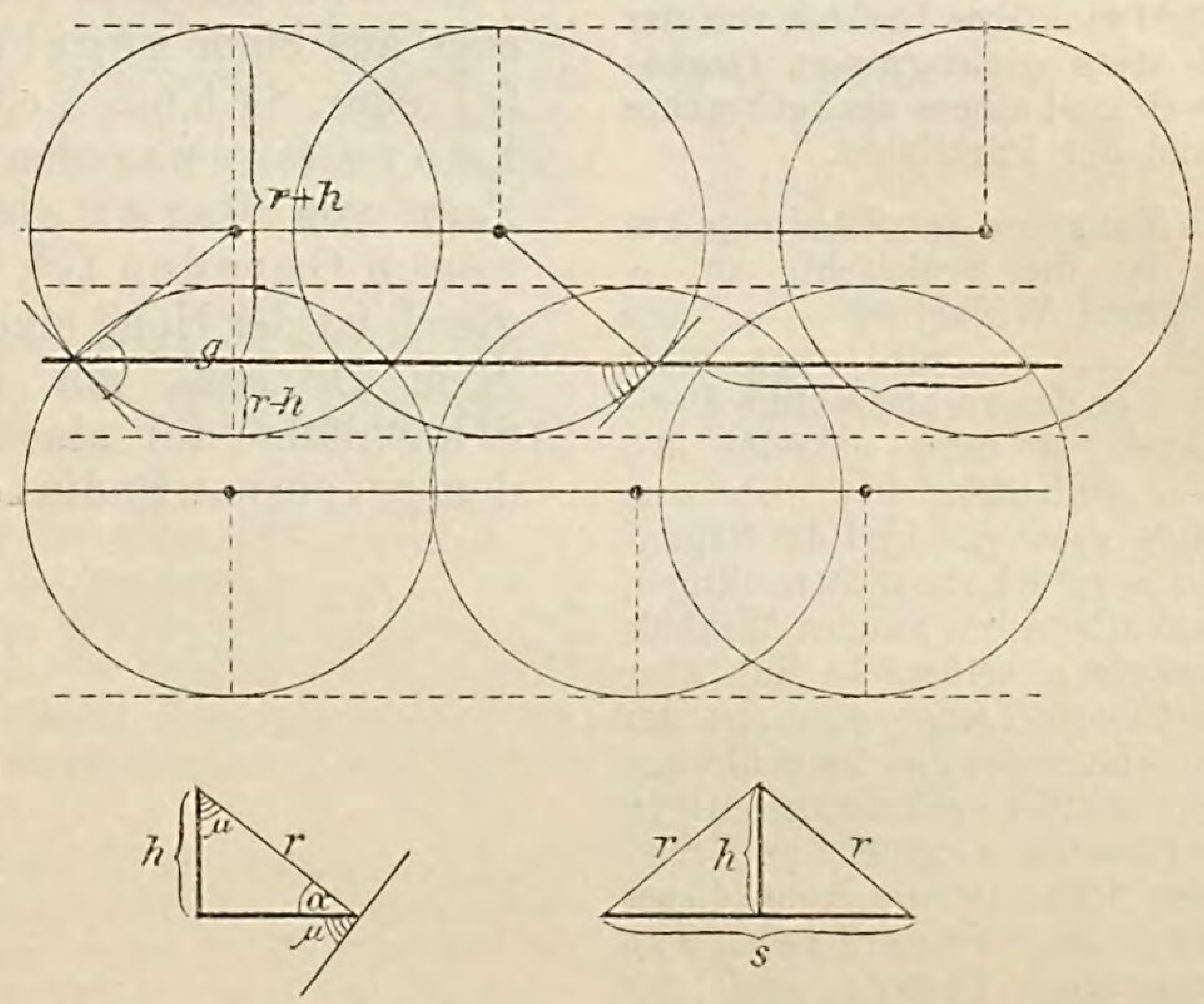
Figur 135.



Figur 136.



Figur 137.



Erkl. 319. Bezeichnet man mit h in Figur 135 und 137 die Abstände der Parallelen, so haben die Endpunkte der zu g senkrechten Durchmesser aller dieser Kreise von g denselben Abstand $r+h$ bezw. $r-h$ (in Figur 135 gleich $2r$ bezw. Null). Also liegen diese Durchmesserendpunkte selbst wieder im festen Abstande zur gegebenen Geraden (g), deren Abstand gleich ist der Gegenkathete dieses Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck mit diesem Winkel (oder seinem Nebenwinkel) und mit der gegebenen Länge (r) als Hypotenuse.

$r \pm h$ von g, die Kreise berühren sämtlich auch die Parallele zu g im Abstande $r \pm h$.

Erkl. 320. Da jeder Punkt im Innern des in Figur 134 bis 137 entstehenden Parallelstreifens einen kleineren Abstand von g hat, als die Strecke r; und da umgekehrt jeder Punkt, welcher näher bei g liegt, als die Strecke r, zwischen g und der Parallelen liegen muss, so könnte man ähnlich Erkl. 309 auch folgende Ortssätze aussprechen:

„Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Abstand von einer gegebenen Geraden (g) kleiner (bezw. grösser) ist, als eine bestimmte Strecke (r), ist der Innenraum (bezw. der Aussenraum) des Parallelstreifens der zu g im beiderseitigen Abstand gleich der gegebenen Strecke (r) gezogenen Parallelen.“

Erkl. 321. Die Beweise der Ortssätze 41 lassen sich nicht nur auf die Lehre vom Parallelogramm stützen, sondern ergeben sich auch aus den Sätzen 42a im III. Teile dieses Lehrbuches über die Parallelverschiebung. Denn bei Verschiebung einer einzelnen Strecke r mit $\sphericalangle \alpha$ gegen g beschreibt deren Endpunkt eine Parallele zu g. Und zwar entsteht dieselbe Parallele, ob der $\sphericalangle \alpha$ im positiven oder negativen Drehungssinne angetragen wird. Denn wenn der Winkel α der spitze oder stumpfe in Figur 136 und 137 ist, und im positiven oder negativen Drehungssinne an g angetragen ist, so entsteht durch die Senkrechte vom Endpunkte der Strecke r auf g stets ein rechtwinkliges Dreieck von der Hypotenuse r und stets gleichgrosser Gegenkathete. Und diese Gegenkathete als Senkrechte ist eben der Abstand der Parallelen.

Erkl. 322. Die Tangente im Schnittpunkte des Kreises mit g ist die Senkrechte auf r, bildet also mit g einen Winkel $90^0 - \alpha$; und ist letzterer gleich μ, so wird umgekehrt $\alpha = 90 - \mu$. Wird aber das rechtwinklige Dreieck wieder gezeichnet, so muss dasselbe den Winkel $\alpha = 90 - \mu$ enthalten, hat also zum zweiten Winkel $(90 - \alpha) = \mu$. Und die Gegenkathete des Winkels α in diesem rechtwinkligen Dreieck muss die Ankathete des andern Winkels sein, also des Winkels μ selbst. — Hat aber eine Sehne eine bestimmte Länge s, so ist der Kreismittelpunkt die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks dieser Sehne und der beiden zugehörigen Radien, und der senkrechte Abstand des Kreismittelpunkts von der Sehne ist die Höhe dieses gleichschenkligen Dreiecks. Verschiebt man nun dieses gleichschenklige Dreieck längs der Sehne g, so durchläuft seine Spitze die beiden zu g im Abstande h gezogenen Parallelen.

Wird wieder ein Kreis mit der Länge r beschrieben um einen Punkt der Parallelen, so bildet dieser Kreis mit der gegebenen Geraden g einen Schnittwinkel $90^0 - \alpha$ und schneidet aus derselben eine Strecke aus gleich der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks mit Basiswinkeln α und Schenkeln r. Man erhält also ferner (siehe Figur 137):

Satz 41a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises von bestimmtem Radius r, welcher eine gegebene Gerade (g) unter einem gegebenen Winkel (μ) schneidet, ist das Paar von Parallelen zur gegebenen Geraden (g), deren Abstand gleich ist der Ankathete dieses Winkels (μ) in einem rechtwinkligen Dreieck mit diesem Winkel oder seinem Nebenwinkel und mit dem gegebenen Radius (r) als Hypotenuse.

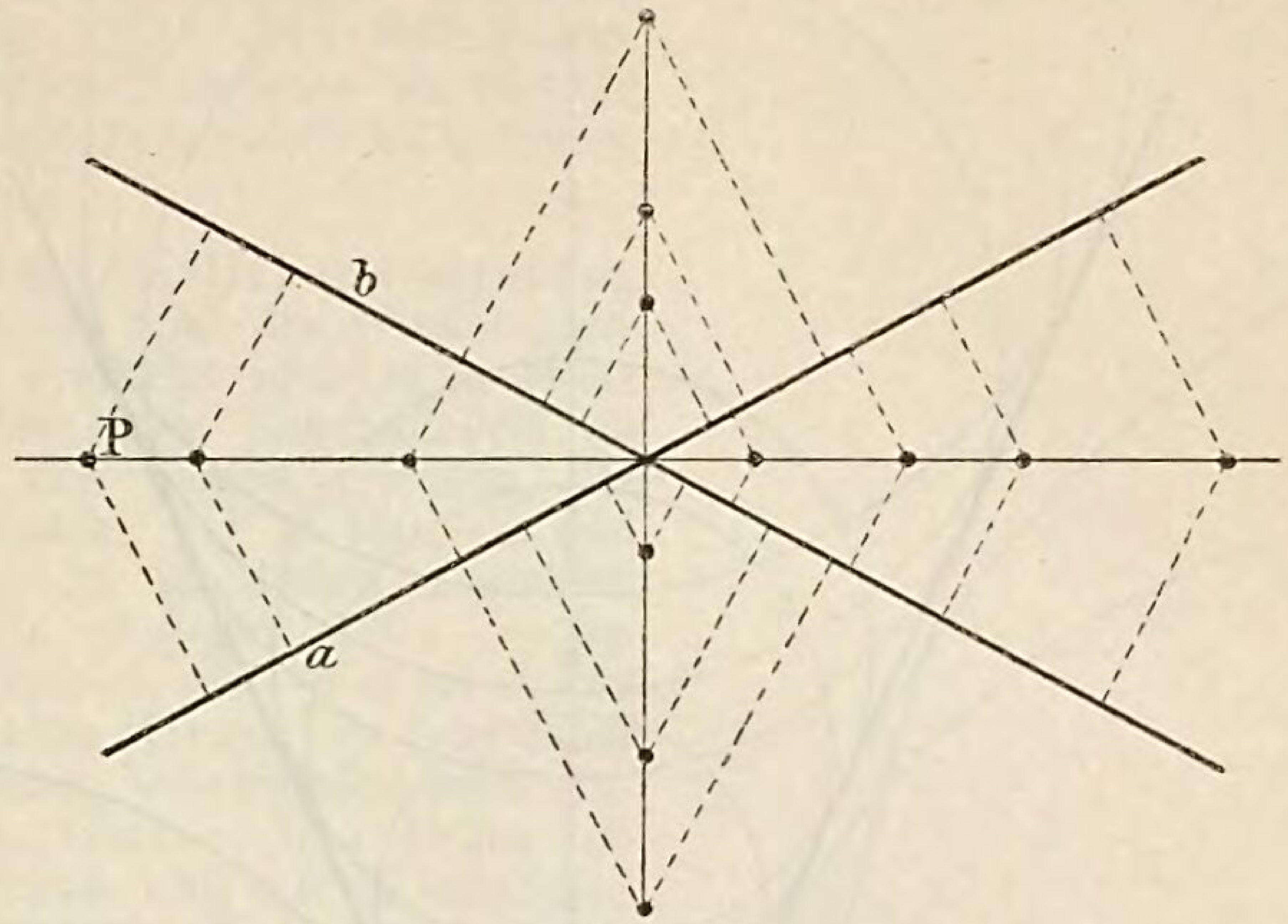
Oder in anderer Ausdrucksweise (siehe Figur 137):

Satz 41b. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises von bestimmtem Radius (r), welcher aus einer gegebenen Geraden (g) eine Sehne von gegebener Länge (s) ausschneidet, ist das Paar von Parallelen zur gegebenen Geraden (g), deren Abstand gleich ist der Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit der gegebenen Sehnenlänge (s) als Grundseite und dem gegebenen Radius (r) als Schenkel.

Frage 145. Welche geometrischen Ortssätze entstehen für Punkte mit gleichem Abstande von zwei gegebenen Geraden?

Antwort. Wenn ein Punkt von zwei gegebenen Geraden denselben

Figur 138.



Erkl. 323. Die beiden Beweise für die Richtigkeit der nebenstehenden Ortssätze sind bereits an früheren Stellen dieses Lehrbuches enthalten. Es sind die folgenden:

1) Liegt ein Punkt P auf der Winkelhalbierenden eines Winkels, so fällt beim Umklappen um dieselbe jede Winkelhälfte auf die andere, also auch die Senkrechte vom Punkte P auf den einen Winkelschenkel auf die Senkrechte auf den andern Schenkel; daher sind beide Senkrechten gleichlang.

2) Sind die Senkrechten von einem Punkte P auf zwei Gerade gleichlang, und man klappt um die Winkelhalbierende dieser Senkrechten um, so wird diese Linie Symmetrieachse nicht nur für die beiden Senkrechten, sondern auch für ihre Endpunkte und für die in diesen Endpunkten senkrecht stehenden Geraden. Folglich ist sie Winkelhalbierende dieser Geraden, und Punkt P liegt auf ihr.

Erkl. 324. Eine andere Art für die beiden Beweise benützt die Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke beiderseits der Winkelhalbierenden:

1) Liegt P auf der Winkelhalbierenden, so haben beide Dreiecke gleichgross: die Winkelhälften, den rechten Winkel und das Stück der Halbierungslinie bis P; folglich sind sie kongruent nach dem vierten Kongruenzsatze, und es sind auch die senkrechten Abstände gleichgross.

2) Sind umgekehrt die senkrechten Abstände gleichgross, so haben beide Dreiecke gemeinsam die Kathete und wie zuvor die Hypotenuse und den rechten Winkel; folglich sind sie kongruent nach dem dritten Kongruenzsatze, und es sind auch die Winkel am Schnittpunkte der Geraden gleichgross; der ganze Winkel wird durch die Linie nach P halbiert.

Erkl. 325. Satz 42a ist allgemein gültig für jedes Deltoid, nicht nur für solche in Figur 138 mit rechten Gegenwinkeln. Denn

Abstand hat, so bilden diese beiden Abstandsstrecken die gleichen Seiten eines Deltoids, dessen andere gleichen Seiten die Abschnitte der beiden gegebenen Geraden bis zum Schnittpunkte bilden. Wegen der achsigen Symmetrie des Deltoids zu der die Winkel der gleichen Seitenpaare halbierenden Diagonale erhält man daher (s. Figur 138):

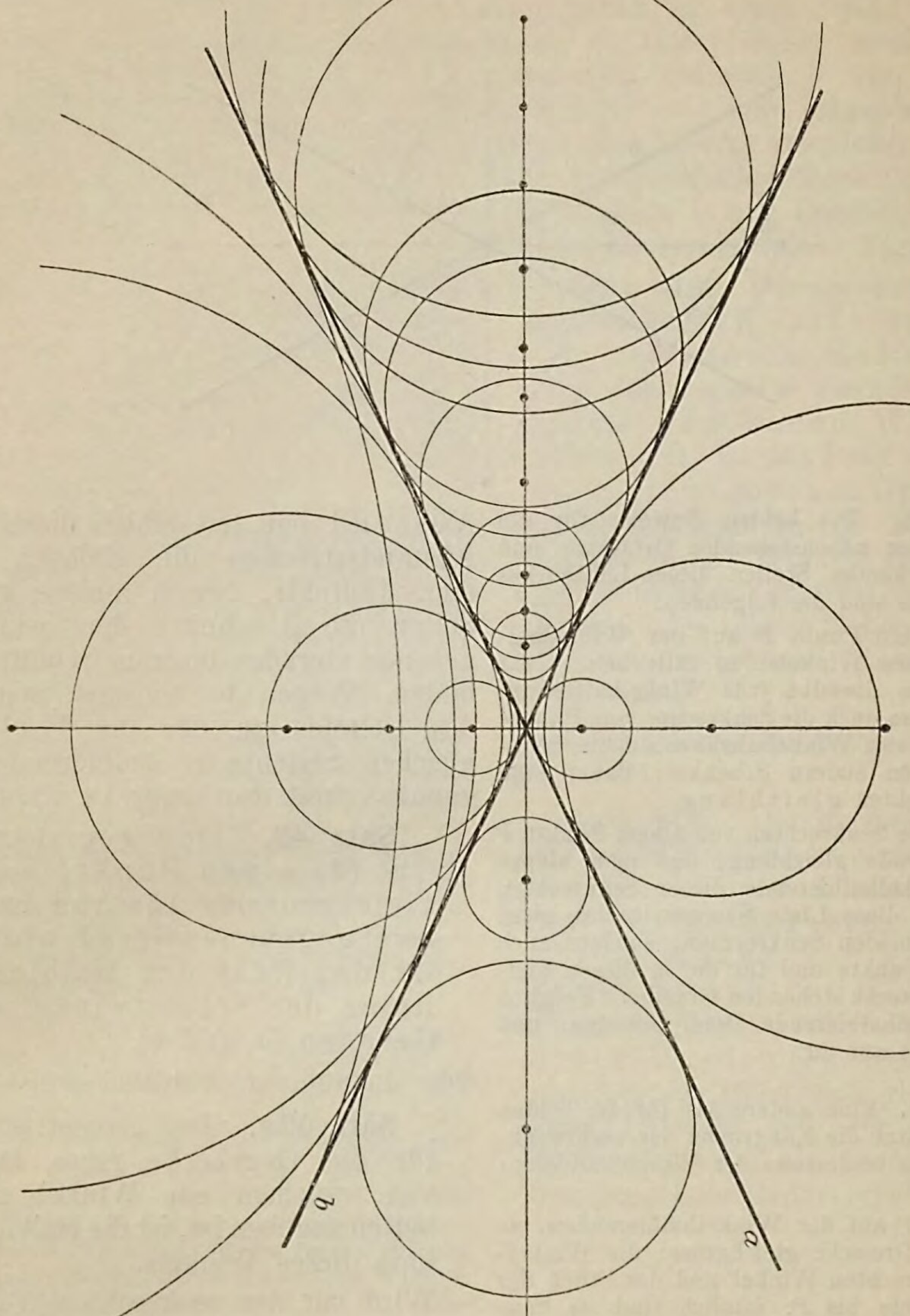
Satz 42. Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher gleichgrossen Abstand hat von zwei gegebenen Geraden (a und b), ist das Paar der Halbierungslinien der Schnittwinkel dieser Geraden (a und b).

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 42a. Der geometrische Ort für die Gegenecke eines Deltoids, von welchem ein Winkel gleicher Seiten gegeben ist, ist die Halbierungslinie dieses Winkels.

Wird mit der senkrechten Abstandsstrecke als Radius ein Kreis gezogen, so wird jede der gegebenen Geraden zur Senkrechten im Endpunkte des Radius, also wird jede zur Tangente an den Kreis. Man erhält daher als andere Ausdrucksweise desselben Satzes (siehe Figur 139):

Satz 42b. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei gegebene Geraden (a und b) berührt — oder welcher zwei gegebene Ge-



Figur 139.

wenn die beiden Strecken von P gegen den Schenkel unter gleichgrossen, auch nicht unter rechten Winkeln angetragen sind, so entsteht ein allgemeines Deltoid, in welchem die Halbierungslinie der einen Ecke stets durch die Gegenecke gehen muss. — Insbesondere gilt der Satz auch, wenn in demselben statt des Wortes Deltoid das Wort Rhombus gesetzt wird, da ja das Rhombus nur eine besondere Art des Deltoids ist, also die Eigenschaften des Deltoids insbesondere enthalten muss.

Erkl. 326. Für den Satz 42b gelten die in Erkl. 323 und 324 gegebenen beiden Beweise

raden zu Tangenten hat, — ist das Paar der Halbierungslinien der Schnittwinkel dieser Geraden.

ohne jede Aenderung, da der Mittelpunkt eines Kreises von jeder seiner Tangenten denselben senkrechten Abstand gleich dem Radius hat, also auch mit je zwei Tangenten ein Deltoid mit deren Winkel als Tangentenwinkel bildet.

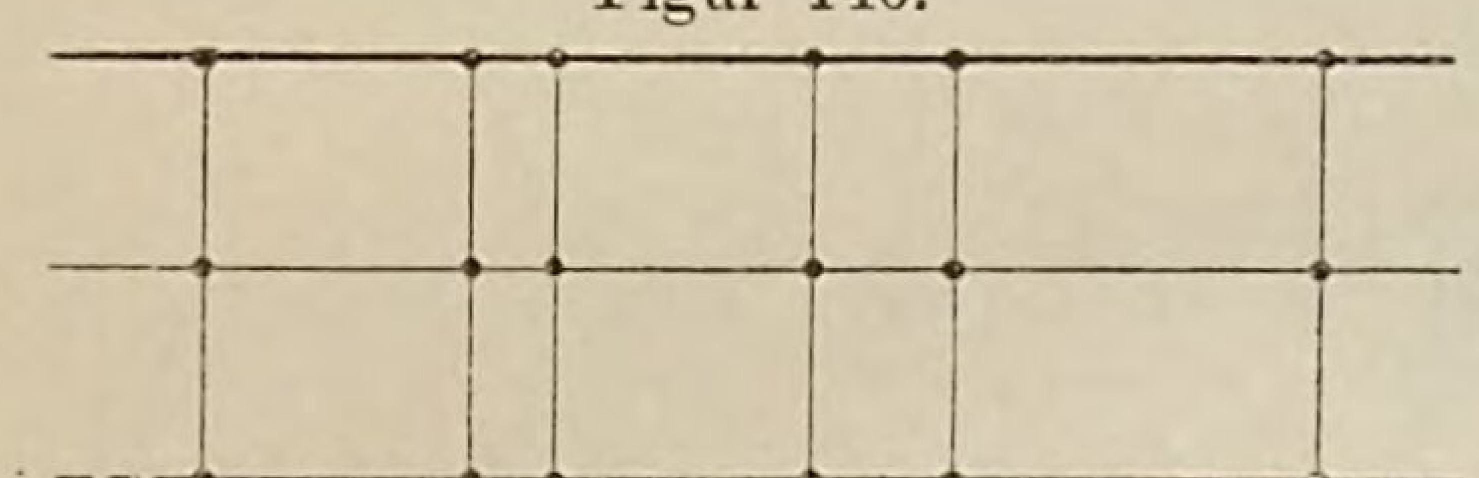
Erkl. 327. In den sämtlichen Deltoiden der Figur 138 oder 139 sind die Winkel stets gleichgross; es erscheint nämlich in sämtlichen Deltoiden des einen Nebenwinkels an dem Schnittpunkt der beiden Geraden der $\sphericalangle \alpha$, an der Gegenecke bei P $180 - \alpha$ und dazu zwei Rechte; in sämtlichen Deltoiden im Nebenwinkelraum dagegen $180 - \alpha$ am Schnittpunkt der Geraden, also $\sphericalangle \alpha$ bei P und dazu die beiden rechten Winkel. Es tritt daher jedes Deltoid im einen Nebenwinkel auch einmal mit denselben Winkeln und Seiten im andern Nebenwinkelraum auf, nur in entgegengesetzter Richtung um 90^0 gedreht. Im spitzen Winkelraum sind aber die kurzen Seiten Radien, die langen Tangenten, im stumpfen Winkelraum sind die langen Seiten Radien, die kurzen Tangenten. Denn betrachtet man eines der rechtwinkligen Dreiecke, welche die Deltoidhälften bilden, so ist im spitzen Winkel der halbierte Winkel kleiner als 45^0, folglich der Winkel bei P über 45^0, und der ihm anliegende Radius die kleinere Seite, die ihm gegenüberliegende Tangentenstrecke die grössere; im stumpfen Winkelraum aber ist der halbierte Winkel grösser als 45^0, folglich der Winkel bei P unter 45^0 und seine anliegende Seite die grössere, die gegenüberliegende Tangentenstrecke die kleinere Kathete. — Beide Strecken aber, sowohl der Tangentenabschnitt, als die Radienlänge sind stets kürzer als die Strecke von P bis zum Schnittpunkt, da diese im betrachteten Dreieck Hypotenuse ist.

Erkl. 328. Die aus unendlich vielen, die zwei festen Geraden a und b berührenden Kreisen bestehende Figur 139 wird eine Kreisschar genannt, und die Geraden a und b heissen die „festen Tangenten“ oder die „Träger“ der Kreisschar. Von den Kreisen der Schar, welche eine der festen Geraden im gleichen Punkte berühren, ist stets der im spitzen Winkel der kleinere, der im stumpfen der grössere; denn die Tangentenstrecke ist beidemale gleich, und nach dem Inhalt der vorigen Erkl. 327 ist der Radius im spitzen Winkelraume kleiner, im stumpfen grösser als die Tangente. Dennoch ist jeder der Kreise des spitzen Winkelraumes auch einmal im stumpfen Raume enthalten, aber näher beim Schnittpunkte, und man erkennt, dass die Kreise mit gleicher Reihenfolge der Radien im stumpfen Winkelraume viel enger gedrängt bei einander liegen, als im spitzen Winkelraume, dass also beim Fortrücken des Kreismittelpunktes aus dem Schnittpunkte der Geraden die Kreise im stumpfen Winkelraume ungleich viel rascher an Grösse zunehmen, als im spitzen Winkelraume.

Erkl. 329. Man beachte die zum Teil dualistischen Beziehungen zwischen dem Kreisbüschel durch zwei feste Punkte in Figur 133 und der Kreisschar an zwei feste Tangenten in Figur 139. Dem Kreisbüschel gehört an: die Gerade AB als Kreis mit unendlich grossem Radius, der Kreisschar gehört an: der Schnittpunkt (a, b) der beiden Geraden als Kreis mit unendlich kleinem Radius. Durch einen beliebig gegebenen Punkt der Ebene geht ein einziger Kreis des Kreisbüschels (da drei Punkte einen Kreis eindeutig bestimmen), dagegen zwei Kreise der Schar (ein kleinerer innerer und ein grösserer äusserer); eine beliebige Gerade der Ebene berührt zwei Kreise des Büschels (einen der Räume I, IV und einen der Räume II, III in Figur 133), dagegen vier Kreise der Schar (den eingeschriebenen Kreis und die drei angeschriebenen Kreise des Dreiecks, welche die beliebige Gerade mit den beiden festen Geraden in Figur 139 bildet).

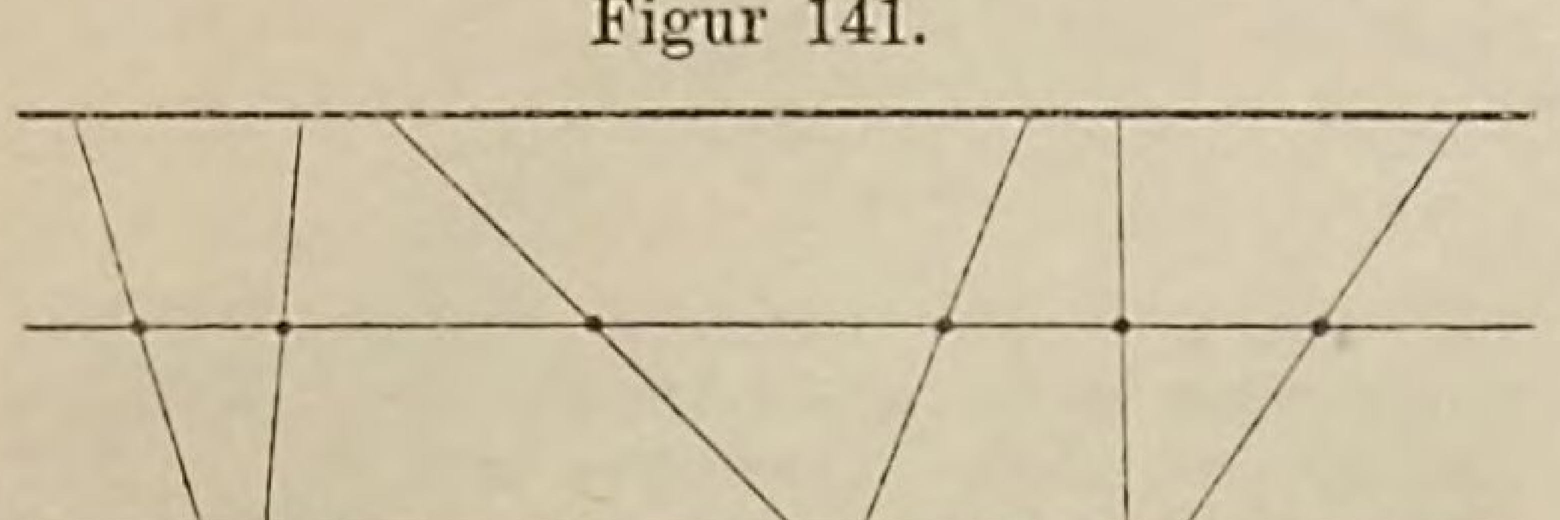
Frage 146. Welche Abänderung erfahren die vorigen Sätze 42, wenn die beiden gegebenen Geraden parallel werden?

Figur 140.



Erkl. 330. Die Beweise für die Richtigkeit der nebenstehenden Ortssätze sind genau dieselben, wie sie zu den Einzelsätzen 72 und 72a bezw. 31 und 31a im III. Teile dieses Lehrbuches geführt wurden. Aber auch die Beweise zu den vorigen Sätzen 42, wie sie in den Erkl. 323 und 324 geführt sind, können wörtlich auf diesen besonderen Fall der beiden Geraden übertragen werden.

Figur 141.



Erkl. 331. Wenn man die Figuren 140 und 141 aus den Figuren 138 und 139 durch Bewegung hervorgehen lassen will, so muss der Schnittpunkt der beiden Geraden in unendliche Ferne gerückt werden. Dann wird die Halbierungslinie des noch vorhandenen Winkels von 0° von selbst zur Mittelparallelen der beiden Geraden; und die zweite Winkelhalbierende rückt mit dem Schnittpunkt der Geraden in

Antwort. Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so muss:

1) nach Satz 72 des III. Teils jeder Punkt ihrer Mittelparallelen von jeder der beiden Parallelen die Hälfte des Parallelenabstandes zum Abstand haben, und

2) nach Satz 32a jeder Punkt mit gleichem Abstand von beiden Geraden auf der Mittelparallelen liegen.

Man erhält also (siehe Figur 140):

Satz 43. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei parallelen Geraden gleichgrossen Abstand hat, ist die Mittelparallele dieser Geraden.

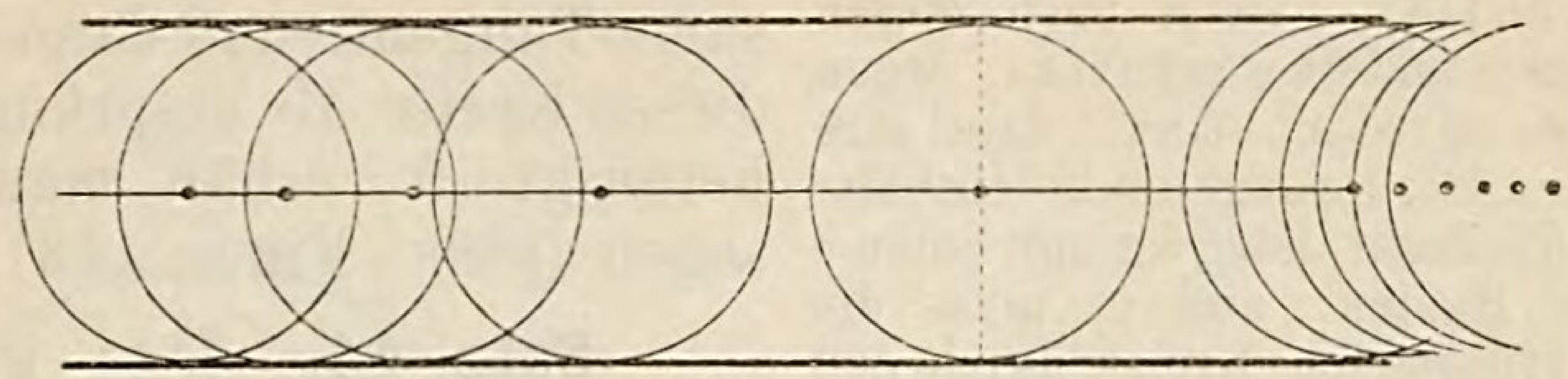
Und in anderer Ausdrucksweise (siehe Figur 141):

Satz 43a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei parallele Geraden berührt, ist die Mittelparallele dieser Geraden.

Da aber die Sätze 72 des III. Teiles nur besondere Fälle der allgemeinen Sätze 31 daselbst sind, so kann man noch allgemeiner sagen (s. Figur 142):

Satz 43b. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt einer beliebigen Transversalstrecke

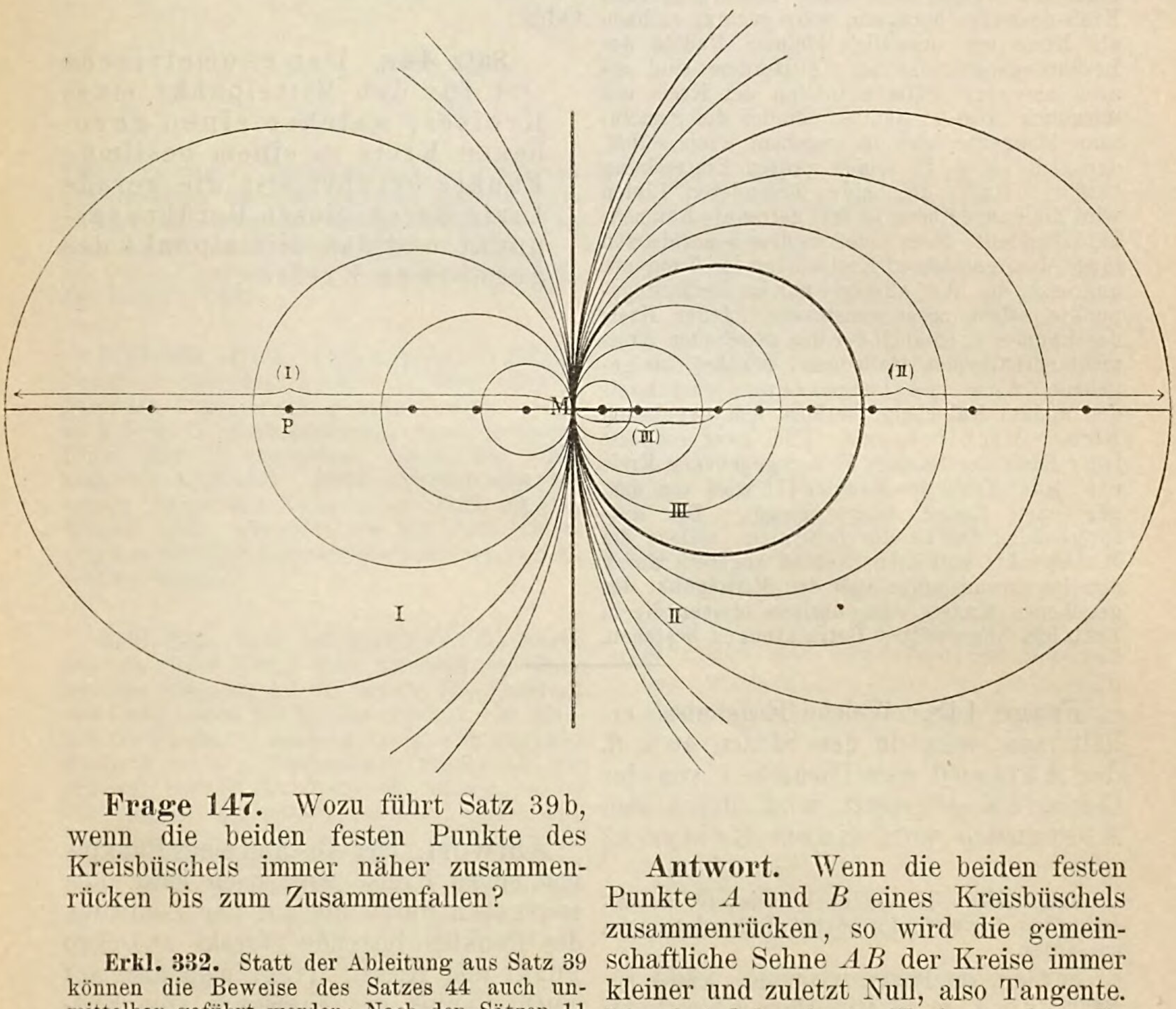
Figur 142.



unendliche Ferne. Man könnte also die unendlich fernen Punkte der Ebene selbst auch als Punkte mit der Eigenschaft ansehen, dass sie von beiden gegebenen Geraden desselben, nämlich unendlich grossen Abstand haben.

durch zwei parallele Geraden ist die Mittelparallele dieser Geraden.

Figur 143.



Frage 147. Wozu führt Satz 39b, wenn die beiden festen Punkte des Kreisbüschels immer näher zusammenrücken bis zum Zusammenfallen?

Erkl. 332. Statt der Ableitung aus Satz 39 können die Beweise des Satzes 44 auch unmittelbar geführt werden: Nach den Sätzen 11 ist nämlich die Senkrechte im Endpunkt des Radius Tangente, also bedingt der Radius MP die Berührung der Geraden AB in M; und nach denselben Sätzen liegt der Mittelpunkt des Kreises senkrecht über dem Berührungspunkt der Tangente, also bedingt die Berührung im Punkte M die Lage des Mittelpunktes auf der Senkrechten.

Antwort. Wenn die beiden festen Punkte A und B eines Kreisbüschels zusammenrücken, so wird die gemeinschaftliche Sehne AB der Kreise immer kleiner und zuletzt Null, also Tangente. Man hat daher lauter Kreise, welche die vorgegebene Linie AB als gemeinsame Tangente besitzen. Dieselben berühren also sämtlich sowohl diese Gerade als auch einander, da jeder Kreis des Büschels mit jedem einzelnen andern derselben eine gemeinsame Tangente

Und ebenso stützt sich Satz 44a unmittelbar auf die Sätze 34 und 35. Denn nach diesen muss ein Kreis einen anderen berühren, wenn die Mittelpunkte so gewählt sind, dass ihre Verbindungslinie den Berührungspunkt enthält; dann wird nämlich die Zentralstrecke zur Summe oder Differenz der Radien; und es muss die Zentrale zweier berührenden Kreise durch den Berührungspunkt gehen, also der Mittelpunkt eines berührenden Kreises auf dem durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser des andern liegen.

Erkl. 333. Unter den unendlich vielen Kreisen des in Figur 143 dargestellten Kreisbüschels, welche den einen hervorgehobenen Kreis desselben berühren, wäre auch zu rechnen als Kreis mit unendlich kleinem Radius der Berührungspunkt selbst. Ausserdem sind als zwei besondere Fälle enthalten der Kreis mit unendlich grossem Radius, nämlich die gemeinsame Tangente, und der gegebene Kreis selbst, der sich selbst in seiner ganzen Erstreckung berührt. Durch die beiden besonderen Linien wird die ganze Ebene in drei getrennte Räume I, II, III geteilt, deren jeder an dem benachbarten längs dem gegebenen Kreise oder der Tangente angrenzt, die aber alle drei nur im Berührungspunkte selbst zusammenstossen. Jeder Kreis des Raumes I, nämlich der den gegebenen Kreis nicht enthaltenden Halbebene, berührt den gegebenen Kreis ausschliessend, jeder Kreis der andern Halbebene berührt den gegebenen Kreis einschliessend. Und zwar schliesst jeder Kreis des Raumes II den gegebenen Kreis ein, jeder Kreis des Raumes III wird von dem gegebenen Kreise eingeschlossen. Die entsprechenden Stücke der Zentralen, welche die Mittelpunkte enthalten, werden abgeteilt durch den Berührungspunkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Im übrigen bleiben die in Erkl. 329 angestellten Betrachtungen bestehen.

hat. Indem man daher erst die gemeinsame Tangente und dann einen einzelnen dieser Kreise als ursprünglich gegebenen herausgreift, erhält man folgende Aussagen (siehe Figur 143):

Satz 44. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte berührt, ist die Senkrechte auf diese Geraden im Berührungspunkte.

Oder:

Satz 44a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher einen gegebenen Kreis in einem bestimm- Punkte berührt, ist die gerade Linie durch diesen Berührungspunkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises.

Frage 148. Welche Ergebnisse erhält man, wenn in den Sätzen 40 u. ff. der Abstand des Punktes von der Geraden g ersetzt wird durch den Abstand ϱ von einem Kreise k?

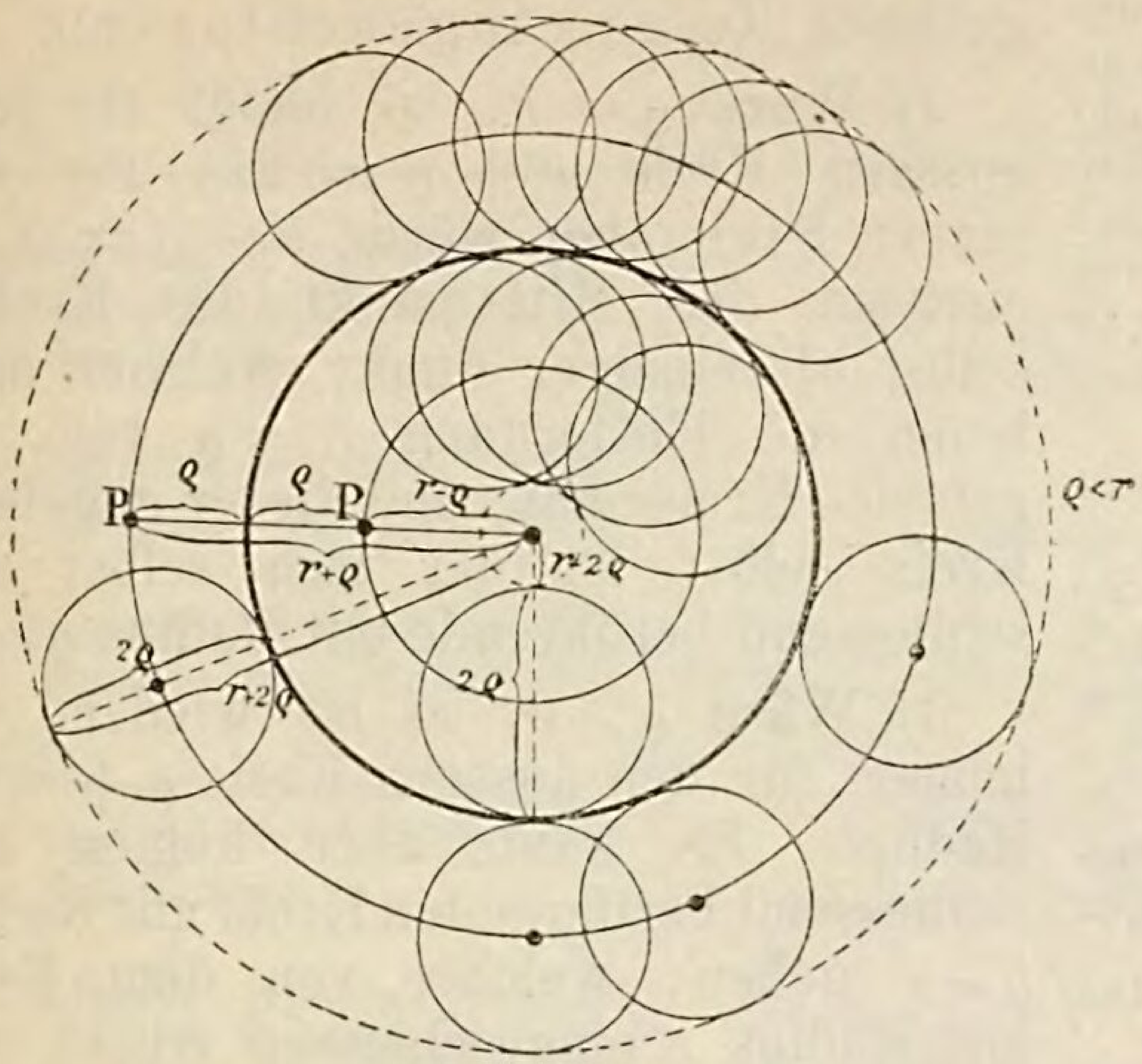
Erkl. 334. Die beiden Beweise für nebenstehenden Ortssatz 45 hätten folgendermassen zu lauten:

1) Liegt ein Punkt P auf dem Kreise mit Radius $r \mp \varrho$, so ist sein Abstand vom Kreismittelpunkt $r \mp \varrho$. Wird also davon der Radius r abgezogen, so bleibt Strecke ϱ als der auf der Zentralen des Punktes P (nach aussen oder innen) gemessene Abstand des Punktes P vom Kreise k.

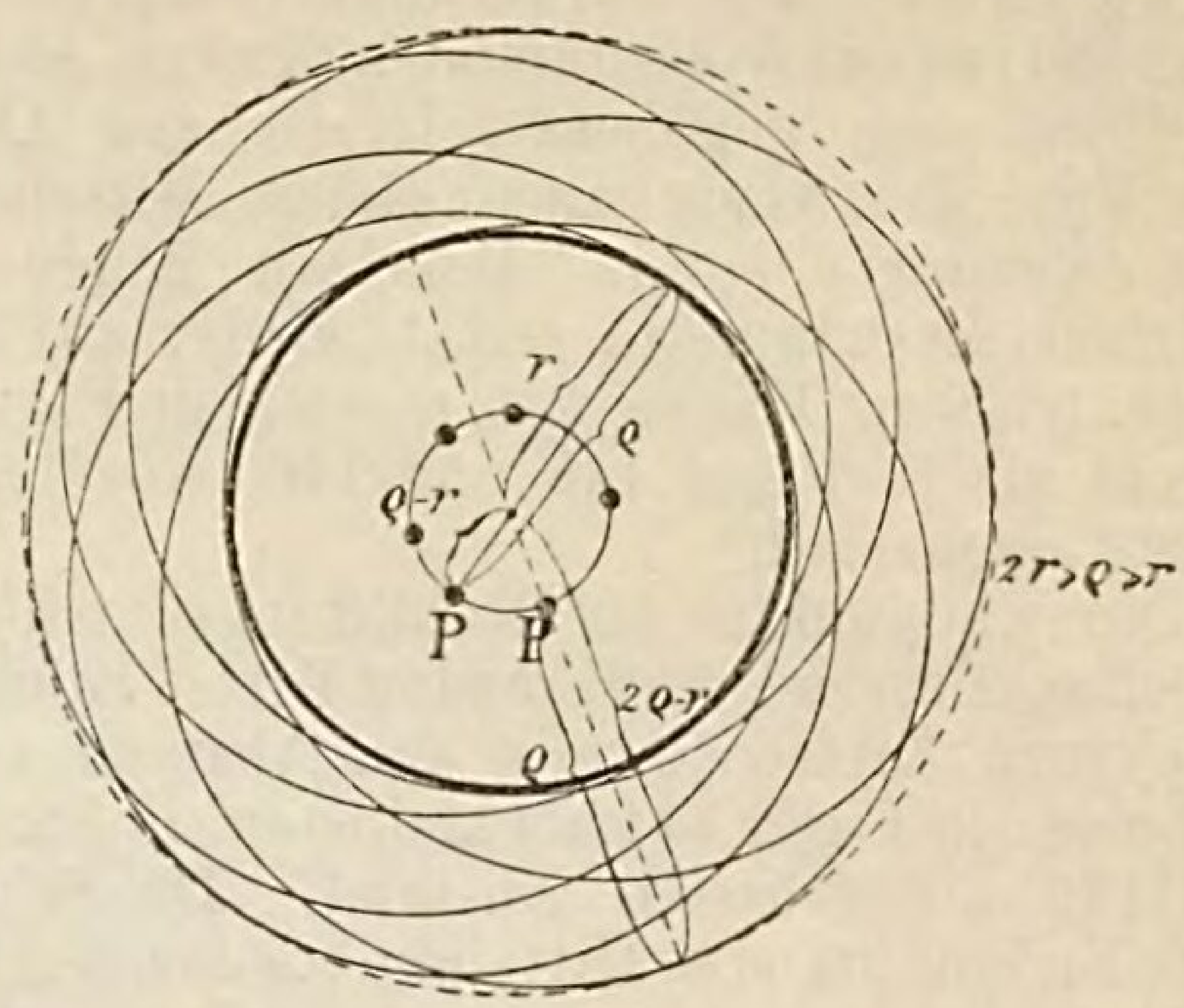
2) Hat ein Punkt P von einem Kreise den Abstand ϱ, so muss auf der Zentralen des Punktes vom Kreisschnittpunkte bis P die

Antwort. Der Abstand eines Punktes von einem Kreise wird nach Erkl. 17a angegeben durch die auf der Zentralen des Punktes liegende Strecke zwischen Punkt und Kreis. Trägt man also auf einem Radius des Kreises k vom Endpunkte aus noch die Strecke ϱ auswärts oder einwärts an, so hat der gefundene Punkt vom Mittelpunkte den Abstand $r + \varrho$ oder $r - \varrho$ bezw. $\varrho - r$, je nachdem $\varrho \lesseqgtr r$ ist. Man erhält also (siehe Figur 144 bis 146):

Figur 144.



Figur 145.



Strecke ϱ liegen. Berücksichtigt man dann die auf derselben Geraden liegende Strecke r, so findet man, dass die Strecke zwischen dem Punkte und dem Kreismittelpunkte gleich $\varrho + r$ ist, wenn P ausserhalb, $\varrho - r$ wenn P innerhalb des Kreises liegt.

Erkl. 335. Da die Abstandsstrecke zwischen Punkt P und dem Kreise auf dem durch P gehenden Durchmesser gemessen wird, so ist auch hier die Abstandsstrecke durch diejenige Linie durch P angegeben, welche den Kreis senkrecht schneidet. Denn während eine beliebige Sehne den Kreis unter einem schiefen Winkel trifft, schneidet die mit dem Radius zusammenfallende Zentrale den Kreis unter einem rechten Winkel.

Erkl. 336. Jeder beliebige Punkt der Ebene hat von einem Kreise einen kleinsten und einen grössten Abstand, die als Summe oder Differenz den Durchmesser des Kreises ergeben. Ist nämlich der Punkt ein äusserer, so ist sein kleinster Abstand um den Durchmesser kleiner als der grösste; und ist der Punkt ein innerer, so ist der kleinste und grösste zusammen gleich dem Durchmesser. So ist in Figur 144 für jeden Punkt der Ortskreise der kleinste Abstand gleich ϱ, der grösste dagegen für den äussern Kreis gleich $2r + \varrho$, für den inneren Kreis gleich $2r - \varrho$. Wenn dagegen, wie in Figur 145, $\varrho > r$ ist, so ist für einen Punkt des äussern Kreises wieder der kleinste Abstand ϱ, der grösse $2r + \varrho$ (Differenz $2r$); für einen Punkt des innern Kreises ist der grösste Abstand gleich ϱ, der kleinste aber $2r - \varrho$ (Summe $2r$). Und für $\varrho > 2r$ bleibt hier der grösste ϱ, der kleinste wird $\varrho - 2r$; denn dann liegt auch der Punkt mit Strecke ϱ als grösstem Abstand ausserhalb des gegebenen Kreises, so dass wieder die Differenz $\varrho - (\varrho - 2r) = 2r$ wird (siehe Figur 146).

Satz 45. Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher von einem gegebenen Kreise (k) mit Radius r einen bestimmten Abstand (ϱ) hat, ist das Paar der konzentrischen Kreise, deren Radius die Summe und die Differenz der gegebenen Abstandsstrecke und des Radius r ist.

Wird dann um diesen Punkt mit Radius ϱ ein Kreis beschrieben, so erhält man berührende Kreise an den gegebenen, und man kann aussagen:

Satz 45a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit bestimmtem Radius (ϱ), welcher einen gegebenen Kreis (Radius r) berührt, ist das Paar der mit letzterem konzentrischen Kreise, deren Radius die Summe und die Differenz der beiden Radien (r und ϱ) ist, nämlich ersteres für ausschliessende, letztere für einschliessende Berührung.

Dabei ist zu unterscheiden, ob $\varrho \lesseqgtr r$ ist.

1) Wenn nämlich $\varrho < r$ ist, so entsteht, wie bei Figur 144, die Differenz $r - \varrho < r$, liefert also einen im Innern des gegebenen Kreises liegenden Kreis; und die einschliessend berührenden Kreise mit Radius ϱ, deren Mittelpunkt auf

Erkl. 337. Betrachtet man die äusseren Endpunkte der Berührungsdurchmesser der ausschliessend berührenden Kreise, so haben dieselben vom gegebenen Kreise den Abstand von 2ϱ, also vom gemeinsamen Mittelpunkte den Abstand $r + 2\varrho$. Demnach liegen diese Durchmesserendpunkte selbst wieder auf einem konzentrischen Kreise mit $r + 2\varrho$ in Figur 144 sowohl als in Figur 145 und 146, wo dieselben weggelassen sind.

Die Endpunkte der Berührungsdurchmesser der einschliessend berührenden Kreise haben vom gegebenen Kreise jeweils den Abstand von 2ϱ und zwar in Figur 144 als kleinsten, in Figur 145 und 146 als grössten Abstand. Daher haben diese Endpunkte vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises in Figur 143 den Abstand $r - 2\varrho$, in Figur 145 den Abstand $2\varrho - r$, und liegen demnach selbst wieder auf einem konzentrischen Kreise, dessen Radius für $\varrho < \frac{r}{2}$ in Figur 144 gleich $r - 2\varrho$ ist, für $\varrho > \frac{r}{2}$ in Figur 145 und und 146 gleich $2\varrho - r$ ist.

Erkl. 338. Die Abstände der beiden konzentrischen Ortskreise selbst von einander sind die Differenzen ihrer Radien. Dieser aber ist für den äussern stets gleich $r + \varrho$, für den innern je nachdem $\varrho \lesseqgtr r$ ist, gleich $r - \varrho$, 0, $\varrho - r$. Also ist der Abstand der konzentrischen Ortskreise für $\varrho \lesseqgtr r$ gleich 2ϱ (siehe Figur 144), $r + \varrho = 2\varrho = 2r$, $2r$ (s. Figur 145). — Die Abstände der konzentrischen Kreise, auf denen die Endpunkte der Durchmesser liegen, sind ebenfalls gleich der Differenz ihrer Radien, also der Differenz von $r + 2\varrho$ mit $r - 2\varrho$, 0, $2\varrho - r$, je nachdem $\varrho \lesseqgtr \frac{r}{2}$ ist, und haben daher für diese drei Fälle die Grössen:

$$4\varrho,\ r + 2\varrho = 4\varrho = 2r,\ 2r.$$

Die Abstände zwischen einem Ortskreis und dem zugehörigen Kreis der Durchmesserendpunkte sind stets gleich ϱ, zwischen diesem einen Ortskreis und dem zum andern gehörigen Kreis der Durchmesserendpunkte aber gleich der Differenz der jeweiligen Radien, z. B. in Figur 144 gleich 3ϱ.

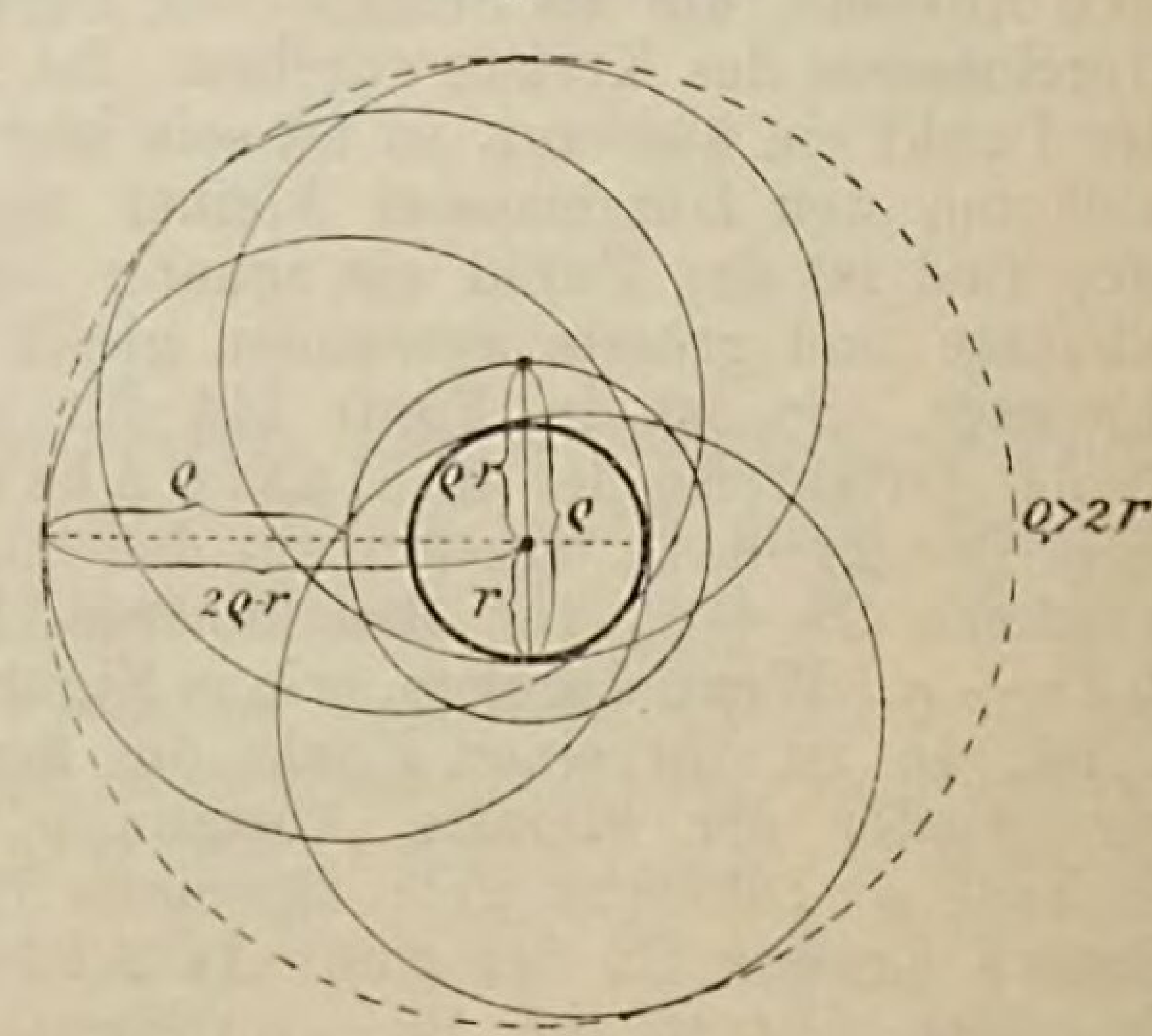
Erkl. 339. Eine erschöpfende Uebersicht der bei vorliegender Frage möglichen Fälle hat nach dem Vorigen zu betrachten die Fälle, ob ϱ kleiner oder gleich $\frac{r}{2}$, kleiner oder gleich r, kleiner oder gleich oder grösser wie $2r$. Man erhält darnach folgende Zusammenstellung:

demselben liegt, werden von dem gegebenen Kreise eingeschlossen.

2) Wäre $\varrho = r$, so bleibt für den äussern Kreis $r + \varrho = 2r$; für den innern Kreis aber würde $r - \varrho = 0$, es entsteht der Mittelpunkt des Kreises selbst als einziger Punkt, welcher nach innen die Entfernung $r = \varrho$ vom gegebenen Kreise hat; und dieser gegebene Kreis selbst ist der sich selbst einschliessend berührende mit Radius $\varrho = r$.

3) Wäre $\varrho > r$, so ist wieder, wie immer, für den äussern Kreis $\varrho + r$ der Radius. Es kann aber keinen einschliessend berührenden Kreis mit Radius $\varrho > r$ geben, welcher von dem Kreis mit Radius r eingeschlossen wird, sondern der Kreis mit Radius ϱ muss den gegebenen Kreis einschliessen. Daher entsteht, wie in Figur 145 (wo die ausschliessend berührenden Kreise fortgelassen sind) ein konzentrischer Kreis mit Radius $\varrho - r$, statt $r - \varrho$: als Ort für den Mittelpunkt der den gegebenen Kreis einschliessenden Kreise. Dieser Kreis fällt für $\varrho = 2r$ mit dem gegebenen zusammen, und wird sogar für $\varrho > 2r$ (siehe Figur 146) selbst auch zu einem äussern Kreis, wie der mit Radius $\varrho + r$.

Figur 146.



	$\frac{r}{2} > \varrho$ (Fig. 144)	$\frac{r}{2} = \varrho$ (Fig. 131)	$\frac{r}{2} < \varrho < r$	$r = \varrho$	$r < \varrho < 2r$ (Fig. 145)	$\varrho = 2r$	$\varrho > 2r$ (Fig. 146)
Radius des Ortskreises der ausschliessend berührenden Kreise	$r + \varrho$	$\frac{3r}{2} = 3\varrho$	$r + \varrho$	$2r = 2\varrho$	$\varrho + r$	$\frac{3}{2}\varrho = 3r$	$\varrho + r$
Kleinster Abstand seiner Punkte vom Hauptkreis	ϱ	$\frac{r}{2} = \varrho$	ϱ	$r = \varrho$	ϱ	$\varrho = 2r$	ϱ
Grösster Abstand seiner Punkte vom Hauptkreis	$2r + \varrho$	$\frac{5}{2}r = 5\varrho$	$2r + \varrho$	$3r = 3\varrho$	$\varrho + 2r$	$2\varrho = 4r$	$\varrho + 2r$
Radius des Ortskreises der einschliessend berührenden Kreise	$r - \varrho$	$\frac{r}{2} = \varrho$	$r - \varrho$	0	$\varrho - r$	$\frac{\varrho}{2} = r$	$\varrho - r$
Kleinster Abstand seiner Punkte vom Hauptkreis	ϱ	$\frac{r}{2} = \varrho$	ϱ	$r = \varrho$	$2r - \varrho$	0	$\varrho - 2r$
Grösster Abstand seiner Punkte vom Hauptkreis	$2r - \varrho$	$\frac{3r}{2} = 3\varrho$	$2r - \varrho$	$r = \varrho$	ϱ	$\varrho = 2r$	ϱ
Radius des von den ausschliessend berührenden Kreisen eingehüllten Kreises . .	$r + 2\varrho$	$2r = 4\varrho$	$r + 2\varrho$	$3r = 3\varrho$	$2\varrho + r$	$\frac{5}{2}\varrho = 5r$	$2\varrho + r$
Radius des von den einschliessend berührenden Kreisen eingehüllten Kreises . .	$r - 2\varrho$	0	$2\varrho - r$	$r = \varrho$	$2\varrho - r$	$\frac{3}{2}\varrho = 3r$	$2\varrho - r$
Abstand der beiden Ortskreise von einander	2ϱ	$r = 2\varrho$	2ϱ	$2r = 2\varrho$	$2r$	$\varrho = 2r$	$2r$
Abstand der beiden eingehüllten Kreise von einander	4ϱ	$2r = 4\varrho$	$2r$	$2r = 2\varrho$	$2r$	$\varrho = 2r$	$2r$
Abstand des äussern Ortskreises vom innern eingehüllten	3ϱ	$\frac{3}{2}r = 3\varrho$	$2r - \varrho$	$r = \varrho$	$2r - \varrho$	0	$\varrho - 2r$
Abstand des innern Ortskreises vom äussern eingehüllten	3ϱ	$\frac{3}{2}r = 3\varrho$	3ϱ	$3r = 3\varrho$	$2r + \varrho$	$2\varrho = 4r$	$2r + \varrho$

Erkl. 340. Die Sätze 45 stimmen mit den Sätzen 40 genau überein, wenn man konzentrische Kreise auffasst als zu einander parallel. Denn wenn man einander zuordnet die Punkte beider Kreislinien, welche auf demselben Strahle durch den Mittelpunkt liegen, so sind die Richtungen beider Kreislinien angegeben durch die Tangenten, also durch die Senkrechten in den Schnittpunkten dieser Radien. Da diese aber zu einander parallel sind, so kann man auch die Richtungen der Kreise als parallel auffassen. — Auch die Sätze 41 lassen sich auf Kreise übertragen. Man sehe die entsprechenden Ortssätze in der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles.

Frage 149. Welche Punkte haben gleichgrossen Abstand von zwei konzentrischen Kreisen?

Erkl. 341. Die nebenstehenden Ortssätze 46 bilden die Uebertragung für parallele Kreise von den Sätzen 43 für parallele Geraden nach der in Erkl. 340 enthaltenen Anschauungsweise. Dieselben Sätze für Punkte mit gleichem Abstand von einem Punkt und einer Geraden oder einem Kreise, von einer Geraden und einem Kreise oder von zwei beliebigen Kreisen führen auf geometrische Oerter, welche nicht der Elementargeometrie angehören (siehe im IX. Teile dieses Lehrbuches). Nur im besonderen Falle zweier berührenden Kreise erhält man als geometrische Oerter wieder Kreislinien, wie im VII. Teile dieses Lehrbuches auseinandergesetzt werden wird.

Erkl. 342. Ist r_1 der Radius des grösseren und r_2 der Radius des kleineren der konzentrischen Kreise, so ist der kleinste Abstand beider Kreise $r_1 - r_2$, der grösste $r_1 + r_2$, der Mittelpunkt dieser Strecken hat also vom Kreismittelpunkt den Abstand:

$$\frac{r_1 - r_2}{2} + r_2 \text{ oder } \frac{r_1 + r_2}{2} - r_2,$$

denn für die erstere Strecke liegt der Mittelpunkt ausserhalb, für die letztere innerhalb. Nun ist aber:

$$\frac{r_1 - r_2}{2} + r_2 = \frac{r_1 - r_2 + 2r_2}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

und

$$\frac{r_1 + r_2}{2} - r_2 = \frac{r_1 + r_2 - 2r_2}{2} = \frac{r_1 - r_2}{2}.$$

Also ist die halbe Summe bezw. halbe Differenz beider Radien der Zentralabstand für denjenigen Punkt, welcher von beiden Kreisen gleichen Abstand hat, oder Mittelpunkt des Kreises, welcher die beiden gegebenen Kreise berührt.

Erkl. 343. Für den grössern Kreis muss der Abstand des gleichweit entfernten Punktes immer nach innen gerichtet sein, für den kleinern aber kann derselbe nach aussen oder nach innen gerichtet sein. Für den grössern Kreis muss der Abstand der gleichweit entfernten Punkte stets kleinster Abstand sein, für den kleinern Kreis kann er kleinster oder grösster Abstand sein. Dem entsprechend wird der grösste Kreis von allen gemeinsamen Berührungskreisen von innen berührt, der kleinere Kreis aber wird ausschliessend berührt von den Kreisen, deren Mittelpunkt auf dem Kreis mit Radius $\frac{r_1 + r_2}{2}$ liegt, dagegen einschliessend von den Kreisen, deren Mittelpunkt auf dem Kreise mit Radius $\frac{r_1 - r_2}{2}$ liegt, also den gleichen Abstand als grössten Abstand hat.

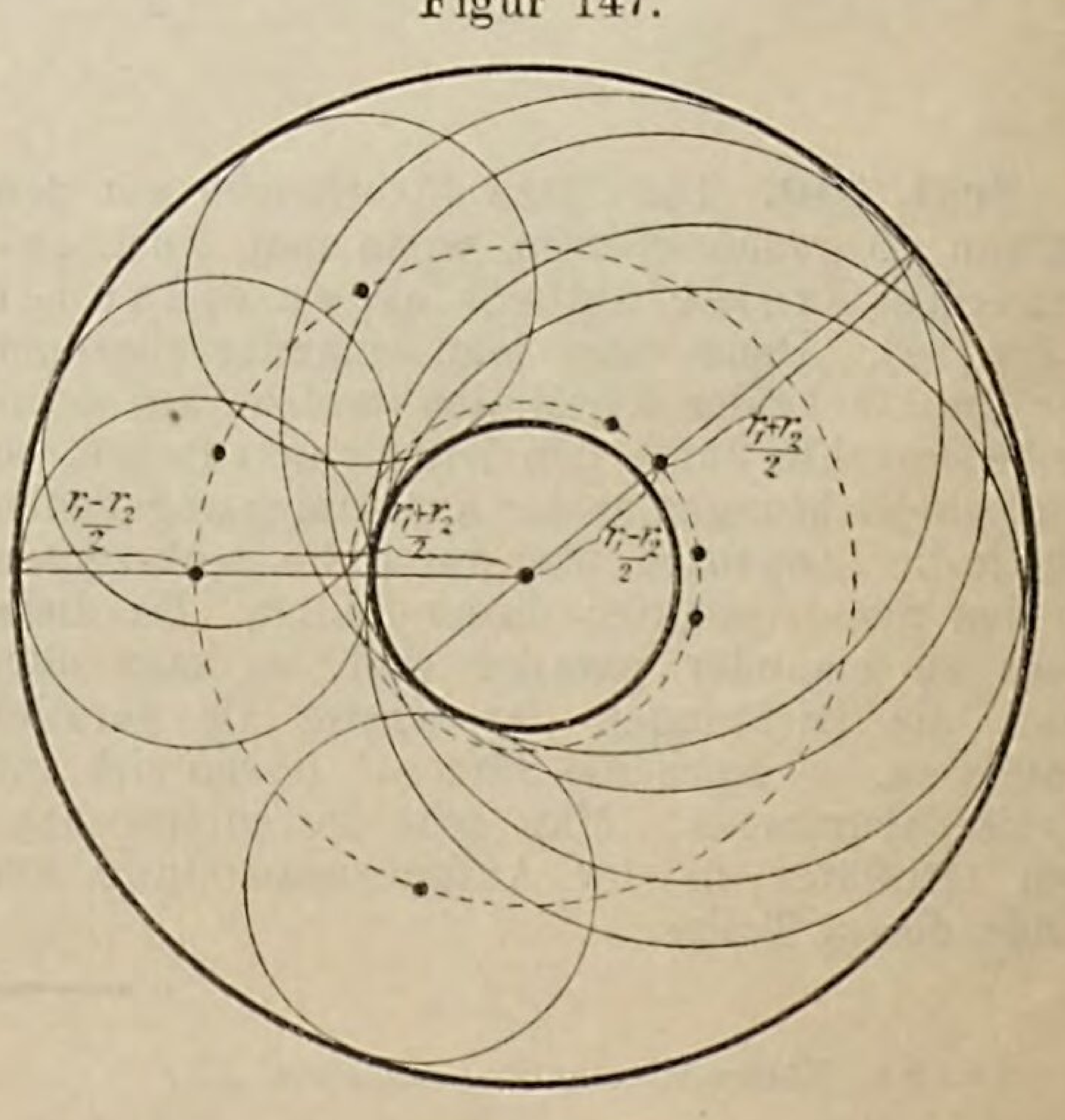
Antwort. Da der Abstand zweier konzentrischen Kreise angegeben wird durch deren senkrechte Entfernung, also durch die zwischen beiden Kreisen liegende Strecke auf einem durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gehenden Strahle, so hat der Mittelpunkt dieser Strecke von beiden Kreisen gleichgrossen Abstand, und da dieser Mittelpunkt auch stets gleichgrosse Entfernung vom gemeinsamen Mittelpunkte haben muss, so erhält man folgende Ortssätze (siehe Figur 147).

Satz 46. Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher von zwei gegebenen konzentrischen Kreisen den gleichen Abstand hat, ist das Paar konzentrischer Kreise, welche die halbe Summe und halbe Differenz der Radien als Radius haben.

Und wenn mit einer solchen Abstandsstrecke als Radius ein Kreis beschrieben wird um einen der Punkte gleichen Abstands, so berührt derselbe die beiden gegebenen und man erhält:

Satz 46a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei gegebene konzentrische Kreise berührt, ist das Paar konzentrischer Kreise, deren Radius die halbe Summe und halbe Differenz der Radien der gegebenen Kreise ist.

Figur 147.

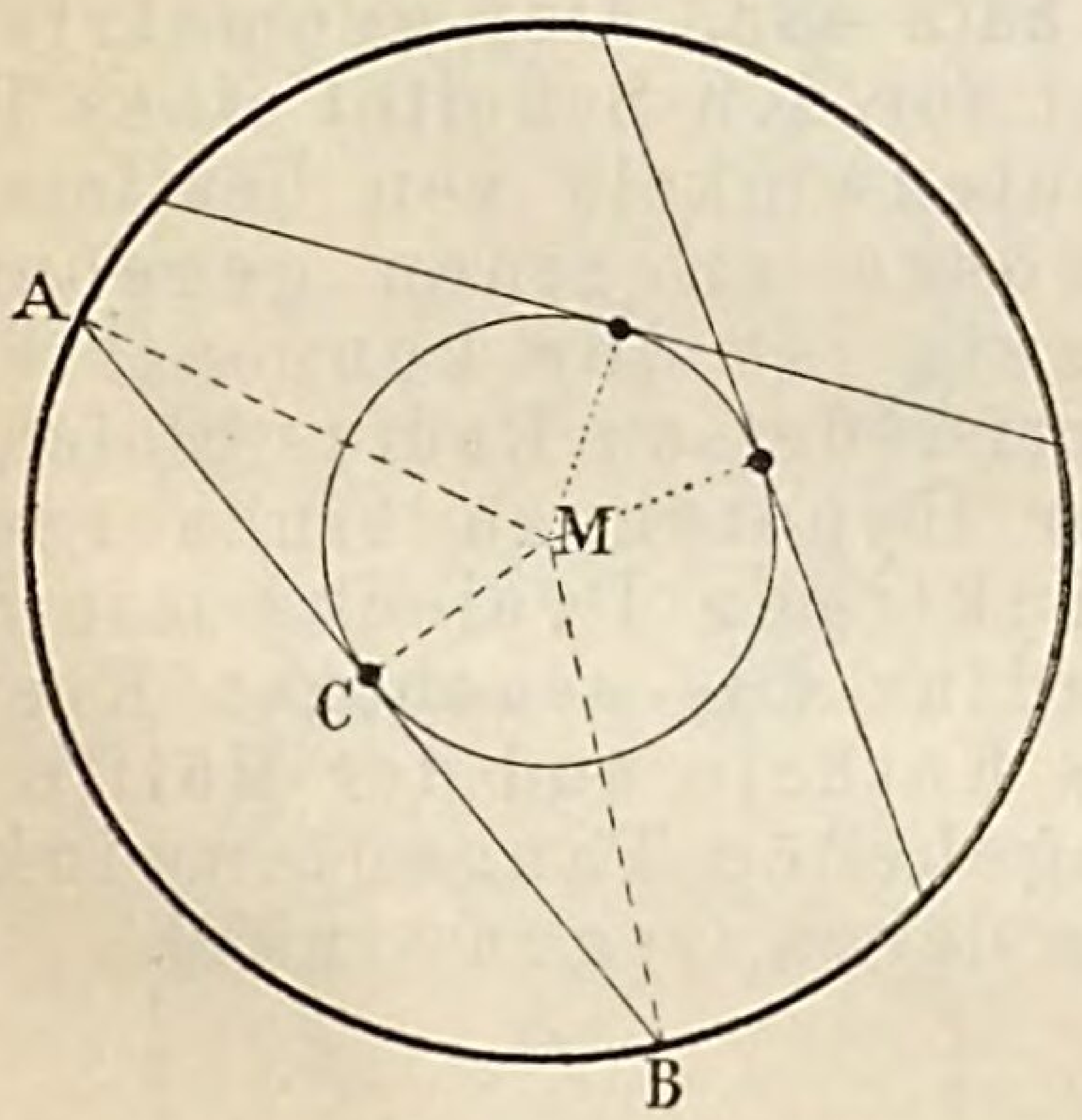


Erkl. 344. Ausser den Punkten der in nebenstehenden Sätzen 46 genannten konzentrischen Kreise wären auch die unendlich fernen Punkte der Ebene als solche zu betrachten, welche von beiden Kreislinien gleichgrosse, nämlich unendliche Entfernung besitzen. Jedoch sind dieselben nicht als Mittelpunkte von Kreisen aufzufassen, welche die beiden gegebenen Kreise berühren könnten.

c) Geometrische Ortssätze über die Kreislinie im besondern.

Frage 150. Zu welchen geometrischen Ortssätzen über den Kreis führen die Ergebnisse der Antwort 133 über konzentrische Kreise?

Figur 148.



Erkl. 345. Die Richtigkeit des Satzes 47 kann schon gefolgert werden aus den Sätzen 8 und 8a, wonach gleiche Länge der Sehnen und gleiche Abstände derselben sich gegenseitig bedingen. Da aber die Fusspunkte der Senkrechten die Endpunkte dieser Abstandsstrecken sind, so müssen diese Fusspunkte auf einem Kreise liegen mit Radius MC in Figur 148. In dem rechtwinkligen Dreiech MAC ist dann $MA = r$, $AC = \frac{AB}{2} = \frac{s}{2}$, MC der Radius des Ortskreises. — Die beiden Beweise, deren Ergebnisse im Ortssatze vereinigt sind, lassen sich leicht so gegenüberstellen, dass die Kongruenz aller rechtwinkligen Dreiecke von der Art MAC einmal gefolgert wird aus der Gleichheit der Stücke MC, MA, $\sphericalangle MCA = 90^0$, das anderemal aus der Gleichheit der Stücke AC, MA, $\sphericalangle MCA = 90^0$. Dann folgt aus der Kongruenz zuerst die Gleichheit aller Sehnenhälften AC, dann aller Abstandsstrecken MC.

Erkl. 346. An einen gegebenen Kreis können Tangentenabschnitte von gegebener Länge t in zweierlei Richtungen angetragen werden, nämlich in der positiven Umlaufsrich-

Antwort. In Figur 126 kann man dieselben Linien entweder als Sehnen des äussern Kreises oder als Tangenten des innern Kreises betrachten. Auf jeder derselben entstehen zwei gleichgrosse Abschnitte durch den Berührungspunkt des innern Kreises, und auch die Winkel zweier solchen Strecken, welche vom gleichen Punkte des äussern Kreises ausgehen, sind stets gleich. Man erhält daher folgende geometrischen Ortssätze, wobei der innere Kreis auftritt als Ort in Bezug auf den äussern (s. Figur 148).

Satz 47. Der geometrische Ort für den Fusspunkt der Senkrechten vom Mittelpunkte eines gegebenen Kreises auf alle gleichlangen Sehnen desselben ist der konzentrische Kreis, dessen Radius einer einzelnen dieser senkrechten Abstandsstrecken gleich ist.

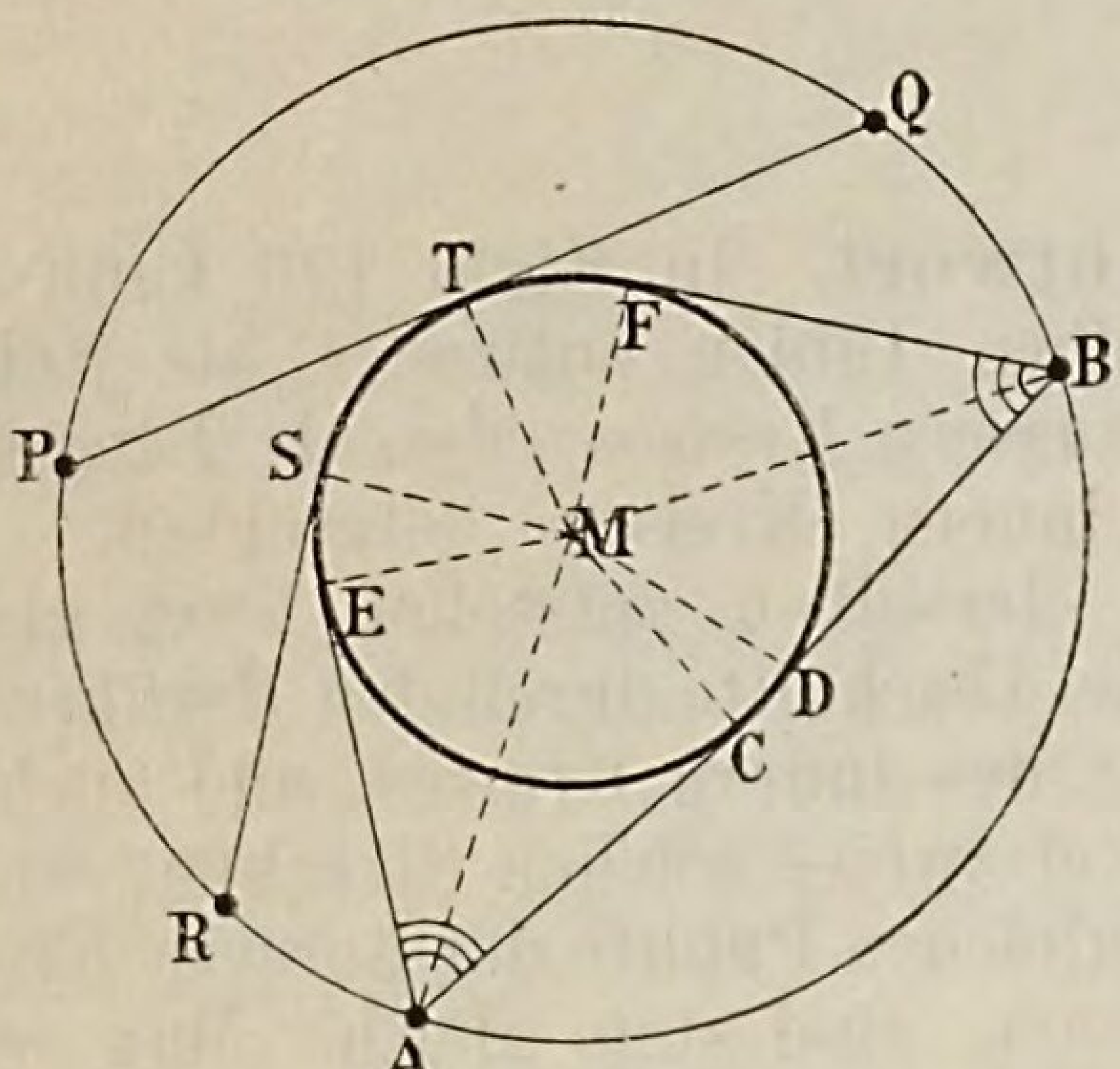
Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 47a. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt einer Sehne von bestimmter Länge in einem gegebenen Kreise ist der konzentrische Kreis, dessen Radius gleich ist der Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit dem Radius des gegebenen Kreises als Hypotenuse und der Hälfte der gegebenen Sehnenlänge als anderer Kathete.

Und umgekehrt tritt der äussere Kreis auf als Ort in Bezug auf den innern Kreis, wenn man die Tangentenbeziehungen ins Auge fasst (s. Figur 149):

tung gegen die Uhr, wie $TP = SR = EA = DB$ in Figur 149, oder in negativer Umlaufsrichtung mit der Uhr, wie $TQ = FB = CA$. Auch können dieselben vom gleichem Punkte aus nach beiden Richtungen angetragen sein, wie im Punkte $T: TP = TQ = t$. In den rechtwinkligen Dreiecken der Art MCA oder MEA ist dann $MC = ME = r$, $AC = AE = t$, MA der Radius des Ortskreises.

Figur 149.



Erkl. 347. Die beiden Beweise für die Ortssätze 48 und 48a lassen sich wieder leicht auf die Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke der Art MAC oder MAE aus verschiedenen Stücken stützen. Für Satz 48 folgt die Kongruenz erst aus der Gleichheit der Stücke MA, MC, $\sphericalangle MAC$ und liefert die Gleichheit der Tangentenabschnitte AC; dann aus der Gleichheit der Stücke AC, MC, $\sphericalangle MAC$ und liefert die Gleichheit der Abstände MA. Für Satz 48a folgt die Kongruenz derselben Dreiecke erst wieder aus der Gleichheit der Stücke MA, MC, $\sphericalangle MAC$ und liefert die Gleichheit der halben Tangentenwinkel MAC; dann aus der Gleichheit der Stücke $\sphericalangle MAC$, MC, $\sphericalangle MCA$ und liefert wieder die Gleichheit der Abstände MA.

Satz 48. Der geometrische Ort für den Endpunkt einer Tangentenstrecke von bestimmter Länge an einen gegebenen Kreis ist der konzentrische Kreis, dessen Radius gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Radius des gegebenen Kreises und der gegebenen Tangentenstrecke als Katheten.

Oder in anderer Ausdrucksweise, nämlich in Rücksicht auf den Winkel der einen gleichgrossen Winkel bildenden Tangenten:

Satz 48a. Der geometrische Ort für den Scheitel eines Tangentenwinkels von bestimmter Grösse an einen gegebenen Kreis ist der konzentrische Kreis, dessen Radius gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Radius des gegebenen Kreises als Kathete und der Hälfte des gegebenen Tangentenwinkels als deren Gegenwinkel.

Frage 151. Zu welchen geometrischen Ortssätzen führen die Sätze 16 über Peripheriewinkel?

Erkl. 348. Die beiden Beweise für nebenstehende Ortssätze stützen sich auf die Sätze 16 und Antwort 42 und können wie folgt geführt werden:

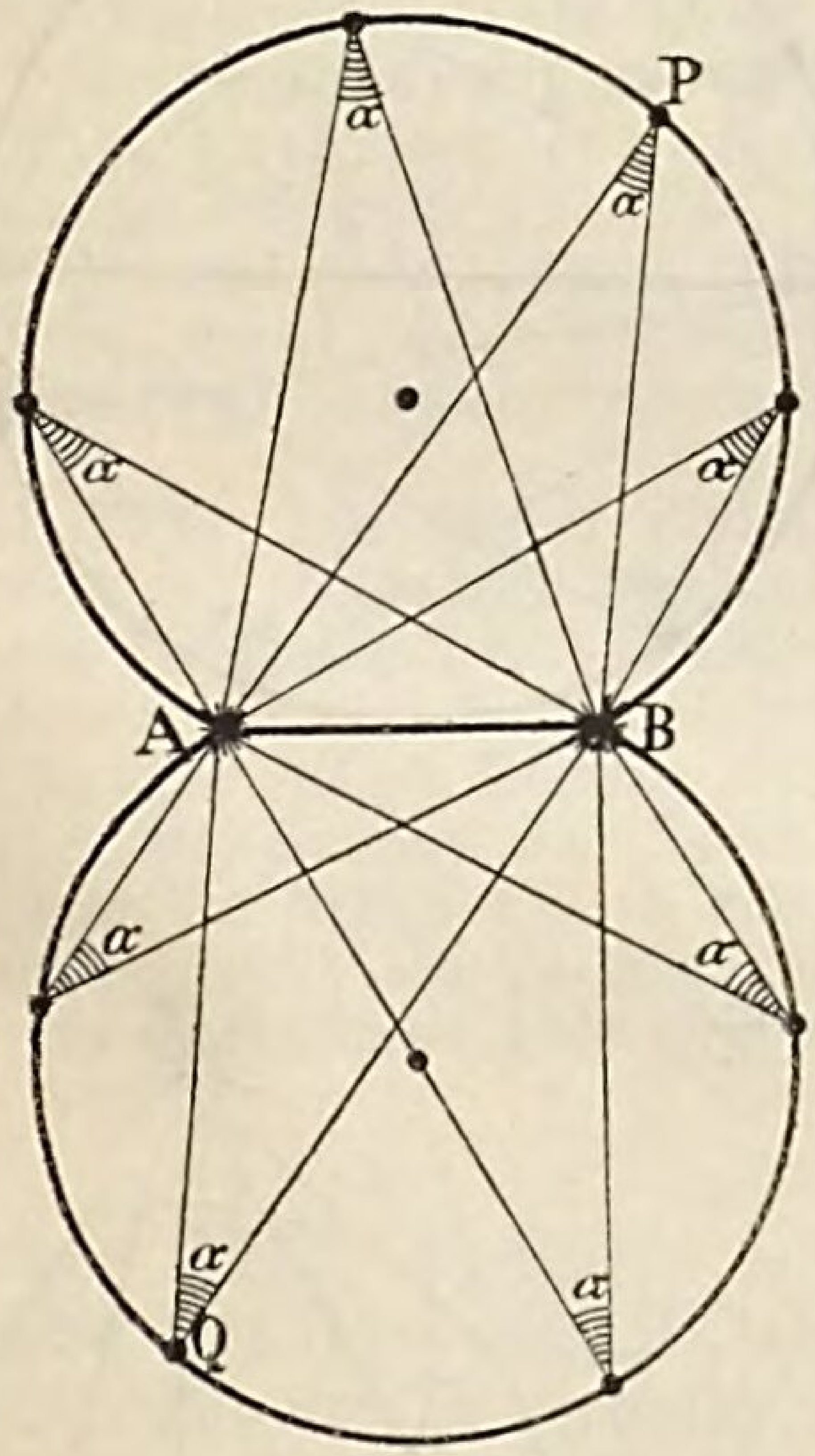
1) Liegt der Punkt P auf einem der beiden Kreisbogen, für welchen AB Sehne ist und einer der Peripheriewinkel die bestimmte Grösse α hat, so muss $\sphericalangle APB$ gleich dem bestimmten Winkel α sein, denn nach Satz 16 sind alle Peripheriewinkel, deren Scheitel auf demselben Kreisbogen liegt, einander gleich und gleich dem Winkel α.

Antwort. Da die Verbindungslinien aller Punkte eines Kreisbogens mit den Endpunkten dieses Bogens stets den gleichen Winkel bilden, so kann man folgenden Ortssatz aussprechen (Fig. 150):

Satz 49. Der geometrische Ort für den Scheitel eines Winkels von bestimmter Grösse, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte (AB) gehen, ist das Paar von Kreisbogen, welche die Verbindungsstrecke

2) Ist der Winkel APB gleich dem bestimmten Winkel α, so muss Punkt P auf dem Kreisbogen liegen, welcher AB als Sehne und $\sphericalangle \alpha$ als Peripheriewinkel hat: denn wird dieser Kreisbogen ohne Rücksicht auf Punkt P konstruiert, so könnte P entweder auf demselben liegen, oder innerhalb oder ausserhalb. Nun ist aber nach Antwort der Frage 42 jeder Winkel, dessen Scheitel ausserhalb dieses Kreisbogens liegt, kleiner als α, und jeder Winkel, dessen Scheitel innerhalb dieses Kreisbogens liegt, grösser als α: folglich kann der Scheitel P des Winkels $APB = \alpha$ weder ausserhalb noch innerhalb dieses Kreisbogens liegen, sondern er muss auf dem Kreisbogen selbst liegen.

Figur 150.



Erkl. 349. Die in den Sätzen 50 niedergelegten Ergebnisse sind schon aus der Lehre vom allgemeinen rechtwinkligen Dreieck zu erschliessen; denn schon für Satz 60 des III. Teiles war nachgewiesen worden, dass 1) im rechtwinkligen Dreieck die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Hypotenuse mit dem Scheitel des rechten Winkels gleich der halben Hypotenuse ist, und dass 2) wenn in einem Dreieck die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Seite mit der Gegenecke gleich der Hälfte dieser Seite ist, dann jener Gegenwinkel ein rechter sein muss. Dies sind aber gerade die beiden zu einander in der Beziehung eindeutiger Umkehrung stehenden Sätze, deren Zusammenfassung den geometrischen Ortssatz liefert.

Erkl. 350. Die geometrischen Ortssätze 49 und 50 sind vorzüglich geeignet, um die in den Antworten 140 und 141 besprochenen Eigenschaften klarzulegen, welche ein geometrischer Ortssatz haben muss.

der gegebenen Punkte (AB) als Sehne und den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel haben.

In Anlehnung an die Auffassungsweise der Erkl. 89 kann man dafür in anderer Fassung sagen:

Satz 49a. Der geometrische Ort für einen Punkt, von welchem aus eine gegebene Strecke (AB) unter einem bestimmten Winkel gesehen wird, ist das Paar von Kreisbogen, welche diese gegebene Strecke als Sehne und den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel haben.

Oder in wieder anderer Ausdrucksweise:

Satz 49b. Der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks mit gegebener Seite (AB) und einem bestimmten Gegenwinkel derselben ist das Paar von Kreisbogen, welche die gegebene Seite (AB) zur Sehne und den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel haben.

Ist aber der Peripheriewinkel ein Rechter, so tritt an die Stelle der beiden Kreisbogen jeweils ein Halbkreis, und man erhält folgende besonders wichtigen geometrischen Ortssätze (Figur 151):

Satz 50. Der geometrische Ort für den Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte (A und B) gehen, ist das Paar der beiden Halbkreise, deren Durchmesser die Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte (AB) ist.

Oder mit Anwendung des Begriffes vom Gesichtswinkel:

Satz 50a. Der geometrische Ort für einen Punkt, von welchem aus eine gegebene Strecke (AB) unter einem rechten Winkel gesehen wird, ist das Paar von Halbkreisen mit der ge-

1) Setzt man nämlich im ersten Satze der beiden Beweise in Erkl. 348 „auf einem der beiden Kreisbogen“ nur die Einzahl „auf dem Kreisbogen“ —, so erhält man den vollkommen richtigen Satz: „Jeder Punkt des Kreisbogens APB liefert als Peripheriewinkel den Winkel α.“ Es wäre aber falsch, zu sagen, „der geometrische Ort . . . sei der Kreisbogen APB“, denn dann liessen sich noch viele Punkte Q angeben, welche ebenfalls den Winkel α liefern und im Ortssatze nicht enthalten wären.

2) Setzt man im zweiten Satze der beiden Beweise in Erkl. 348 statt „auf dem Kreisbogen“: „auf dem Kreise“, so erhält man wieder den vollkommen richtigen Satz: „Jeder Punkt mit dem Winkel $APB = \alpha$ liegt auf einem der Kreise APB oder AQB.“ Es wäre aber falsch, zu sagen, „der geometrische Ort ... sei das Paar der beiden Kreise“, denn dann liessen sich viele Punkte angeben, welche nicht den Winkel α (sondern den supplementären Winkel $180 - \alpha$) lieferten, und doch im Ortssatze enthalten wären.

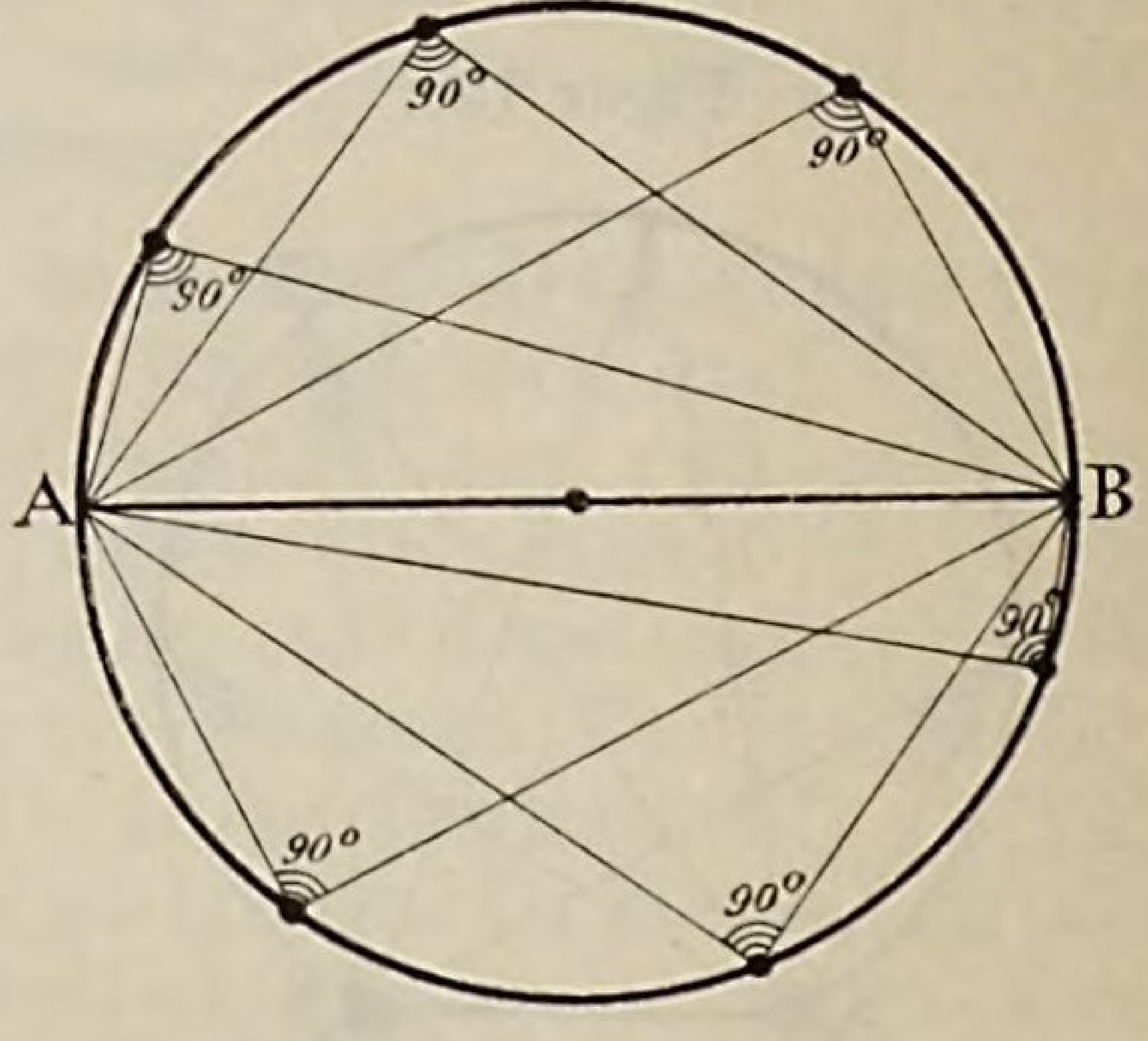
Der geometrische Ortssatz wäre also im ersten Falle zu eng, im zweiten Falle zu weit, obwohl jedesmal der eine der beiden Einzelsätze vollständig richtig ist.

gebenen Strecke (AB) als Durchmesser.

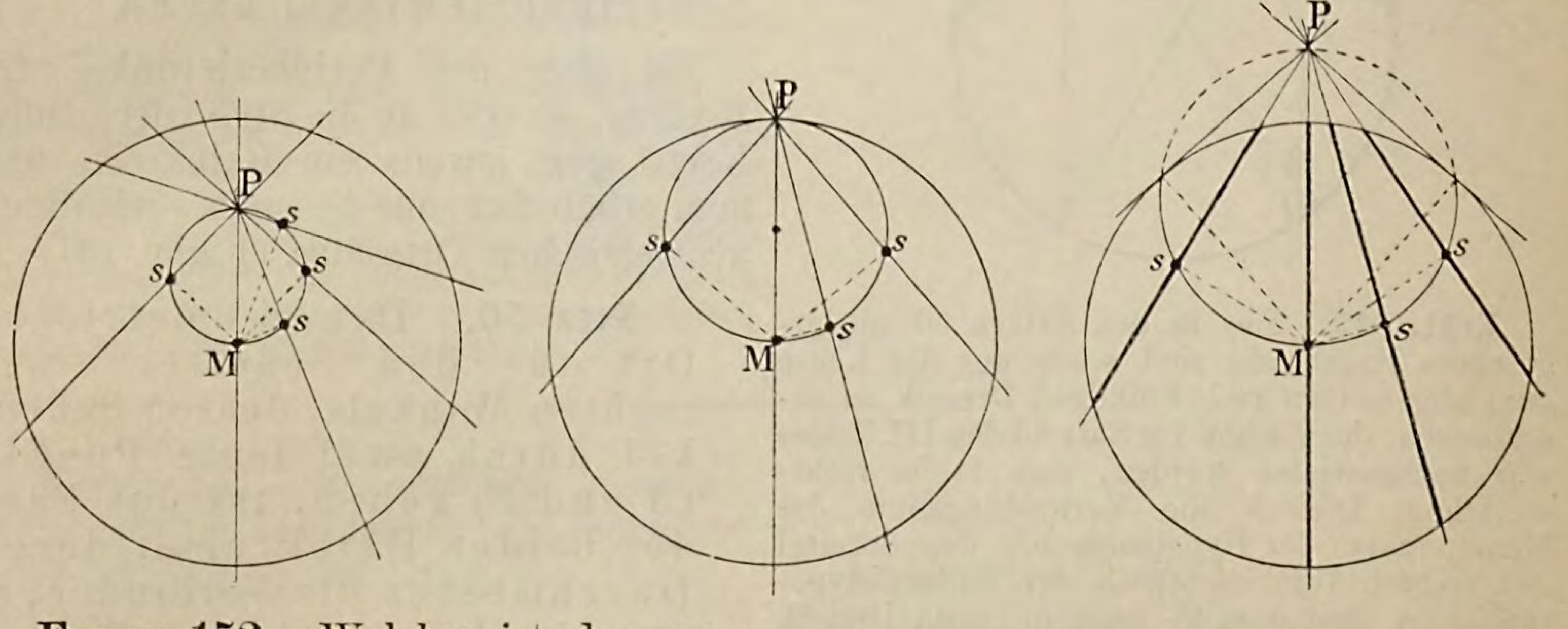
Oder endlich für rechtwinklige Dreiecke:

Satz 50 b. Der geometrische Ort für den Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse (AB) ist das Paar von Halbkreisen, welche die gegebene Hypotenuse zum Durchmesser haben.

Figur 151.



Figur 152.



Frage 152. Welches ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt einer Sehne eines gegebenen Kreises durch einen bestimmten Punkt?

Erkl. 351. Der nebenstehende Ortssatz 51 gilt für jegliche Lage des Punktes P. Liegt nämlich Punkt P im Innern des gegebenen Kreises, so hat man die Wiederholung der zu Figur 16 in Antwort 22 bis 24 enthaltenen Ueberlegungen, und der Ortskreis liegt voll-

Antwort. Der Mittelpunkt jeder beliebigen Sehne wird erhalten als Fusspunkt der vom Kreismittelpunkt auf die Sehne gefällten Senkrechten. Gehen also eine Reihe von Sehnen durch einen bestimmten Punkt P, so sind deren Mittelpunkte die Scheitel von rechten Winkeln, deren einer Schenkel eben die Sehne

ständig im Innern des gegebenen Kreises. — Liegt Punkt P auf der Peripherie des gegebenen Kreises, so erhält man wiederum Bekanntes, nämlich den in Antwort 128 zu Figur 122 abgeleiteten Satz; und der Ortskreis liegt ebenfalls noch ganz im Innern des gegebenen Kreises, berührt denselben aber von innen. — Liegt endlich P ausserhalb des gegebenen Kreises, so wiederholt sich das Ergebnis des zweiten Teiles der Antwort 126 zu Figur 120; und der geometrische Ort ist nicht mehr ein ganzer Kreis, sondern wird nur durch das Stück desselben dargestellt, welches im Innern des gegebenen Kreises liegt.

Erkl. 352. Im letzteren dieser drei Fälle beachte man insbesondere, dass eine Tangente vom Punkte P an den Kreis eine Sehne von der Länge Null bildet, dass also der Mittelpunkt dieser Sehne mit dem Berührungspunkte selbst zusammenfällt. Die Berührungspunkte der beiden vom Punkte P an den Kreis um M gehenden Tangenten sind daher die Schnittpunkte dieses Kreises um M mit dem über der Strecke MP als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Erkl. 353. Die beiden Einzelbeweise des nebenstehenden Ortssatzes sind auf Grund der genannten Ergebnisse leicht zu führen: 1) Liegt S auf dem Halbkreise über PM und man zieht SP, so ist $\sphericalangle PSM$ ein Rechter, also $MS \perp SP$, folglich S Mittelpunkt der Sehne. 2) Ist S Mittelpunkt der Sehne PS, so muss $MS \perp SP$ sein, also $\sphericalangle MSP$ ein Rechter, folglich S ein Punkt des Halbkreises über Durchmesser MP.

durch P ist, deren anderer Schenkel aber durch den Kreismittelpunkt M geht. In Anwendung des Satzes 50 erhält man daher folgenden geometrischen Ortssatz (Figur 152):

Satz 51. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt einer durch einen bestimmten Punkt (P) gehenden Sehne eines gegebenen Kreises ist das innerhalb des gegebenen Kreises liegende Stück desjenigen Kreises, welcher die Verbindungsstrecke des Punktes P mit dem Kreismittelpunkte zum Durchmesser hat.

Frage 153. Welches ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt des Kreises, welcher in irgend einem der über gegebener Sehne AB mit bestimmtem Gegenwinkel γ zu zeichnenden Dreiecken diese Seite AB als Inkreis oder Ankreis berührt?

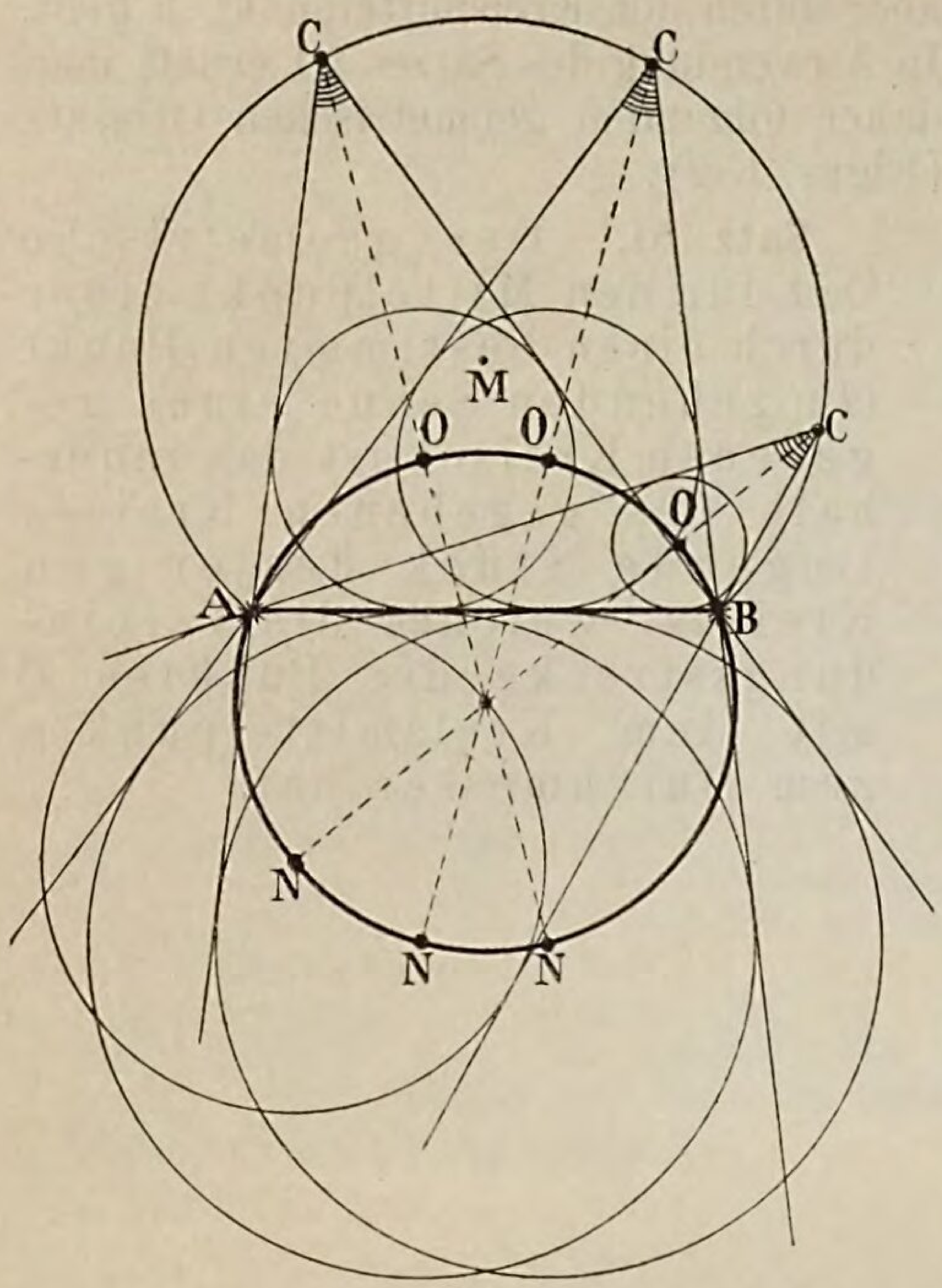
Erkl. 354. In Figur 153 sind über der Sehne AB die Dreiecke ABC gezeichnet. Jedes hat einen Mittelpunkt O seines Inkreises und einen Mittelpunkt N seines Ankreises. Dabei liegen O und N auf der Halbierungslinie des Winkels O, und da OA und NA Halbierungslinien des Winkels und Nebenwinkels bei A sind, so muss $OA \perp NA$ und ebenso $OB \perp NB$ sein. Da also für den Kreis $AOBNA$ der Winkel OAN bezw. OBN ein Peripheriewinkel von 90^0 sein muss, so muss auch die Linie ON jedesmal Durchmesser sein, d. h. die Halbierungslinien sämtlicher Gegenwinkel γ der Dreiecke ABC gehen durch denselben Punkt, nämich den Mittelpunkt des Ortskreises.

Antwort. Die Spitzen der Dreiecke über AB als Seite mit Gegenwinkel γ liegen auf dem Kreisbogen, welcher AB als Sehne und γ als Peripheriewinkel hat (siehe Figur 153). Wird einem solchen Dreieck ein Kreis eingeschrieben, so entsteht an dessen Mittelpunkt O ein Winkel AOB von stets gleicher Grösse, nämlich (vgl. Antwort 65 und Erkl. 147 und 148):

$$\sphericalangle AOB = 180^0 - \frac{BAC}{2} - \frac{ABC}{2}$$
$$= 180^0 - \frac{BAC + ABC}{2}$$
$$= 180^0 - \frac{180 - \gamma}{2} = 90^0 + \frac{\gamma}{2}.$$

Wird demselben Dreieck ein Kreis angeschrieben, welcher AB berührt, so entsteht an dem Mittelpunkt N ein Win-

Figur 153.



Erkl. 355. Der Winkel γ hat Spielraum zwischen 0^0 und 180^0, also $\frac{\gamma}{2}$ zwischen 0^0 und 90^0; daher ist $90 + \frac{\gamma}{2}$ stets grösser als $90 - \frac{\gamma}{2}$, und der Kreisbogen über AB (also im Innern des Dreiecks ABC) muss stets der kleinere sein, weil er den grösseren Peripheriewinkel hat. Nur wenn im Grenzfalle $\gamma = 0$ würde, so wären die Linien AC und BC parallel, und der Ortskreis würde zum Paar der Halbkreise mit Durchmesser AB als Ort für den Mittelpunkt der Kreise, welche je zwei Parallelen durch A und B und gleichzeitig die Transversale AB selbst berühren.

Erkl. 356. Von vielen Anwendungen und Umkehrungen des nebenstehenden Ortssatzes sei hier etwa die folgende erwähnt: Zeichnet man zu einer beliebigen Strecke AB als Sehne einen Kreis $AOBNA$ und konstruiert dazu Kreise, deren Mittelpunkte auf diesem Kreise liegen und welche AB berühren, so schneiden sich die Tangentenpaare, welche von A und B an je einen dieser Kreise gezogen werden können, sämtlich in den Punkten eines Kreisbogens ACB, welcher AB als Sehne hat und als Peripheriewinkel das Supplement des doppelten Peripheriewinkels vom grössern der vorigen Kreisbogen.

kel ANB von ebenfalls stets gleicher Grösse, nämlich:

$$\sphericalangle ANB = 180 - \frac{180 - BAC}{2} - \frac{180 - ABC}{2}$$
$$= \frac{BAC + ABC}{2} = \frac{180 - \gamma}{2}$$
$$= 90 - \frac{\gamma}{2}.$$

Nun liegen alle Punkte über AB (Fig. 153), deren Verbindungslinien mit A und B einen Winkel von $90^0 + \frac{\gamma}{2}$ einschliessen, auf einem Kreisbogen über AB als Sehne mit Peripheriewinkel $90 + \frac{\gamma}{2}$. Und alle Punkte unterhalb AB, deren Verbindungslinien mit A und B einen Winkel von $90^0 - \frac{\gamma}{2}$ einschliessen, liegen auf einem Kreisbogen unterhalb AB als Sehne mit Peripheriewinkel $90 - \frac{\gamma}{2}$. Die Punkte des Kreises, dessen Bogen über AB den Peripheriewinkel $90 + \frac{\gamma}{2}$ ergibt, liefern aber unterhalb AB den Peripheriewinkel:

$$180^0 - \left(90 + \frac{\gamma}{2}\right) = 90 - \frac{\gamma}{2};$$

und umgekehrt gehört zu dem unterhalb AB liegenden Peripheriewinkel $90 - \frac{\gamma}{2}$ ein supplementärer Peripheriewinkel $90 + \frac{\gamma}{2}$ oberhalb AB. Daher liegen die Mittelpunkte der Inkreise und Ankreise sämtlich auf den beiden Kreisbogen eines und desselben Kreises, und man erhält folgenden Ortssatz:

Satz 52. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher in einem Dreieck über gegebener Seite AB und mit bestimmtem Gegenwinkel γ derselben diese Seite AB als Inkreis oder Ankreis berührt, sind die beiden Bogen eines Kreises mit Sehne AB, welcher als Peripheriewinkel innerhalb AB den Winkel $90 + \frac{\gamma}{2}$ oder ausserhalb AB den Winkel $90 - \frac{\gamma}{2}$ hat.

C. Ueber die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Frage 154. Was für Punkte nennt man merkwürdige Punkte in einem Dreieck?

Antwort. Merkwürdige Punkte eines Dreiecks nennt man solche in der Ebene des Dreiecks liegende Punkte, welche zu den Ecken, Seiten, Winkeln des Dreiecks in besonders bemerkenswerten Beziehungen stehen, besonders wenn ein solcher Punkt mehr als zwei Linien gemeinsam ist, wenn also mehrere Linien, statt ein Vieleck zu bilden, durch denselben Punkt gehen. Es sind dies die Zentra der Ecken und Seiten, Höhenpunkt, Schwerpunkt.

Erkl. 357. Es sind im vorliegenden Teile dieses Lehrbuches schon zweierlei solcher besondern Punkte gefunden worden. So ist der Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises zugleich Zentrum der Ecken und gemeinsamer Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten; der Mittelpunkt des eingeschriebenen oder eines angeschriebenen Kreises ist zugleich ein Zentrum der Seiten und gemeinsamer Schnittpunkt je dreier Winkelhalbierenden.

1) Ueber das Zentrum der Ecken eines Dreiecks.

Frage 155. Was ist das Zentrum der Ecken eines Dreiecks?

Antwort. Das Zentrum der Ecken eines Dreiecks ist derjenige Punkt in der Ebene eines Dreiecks, welcher gleichen Abstand hat von den drei Ecken desselben. Dieser Punkt ist daher Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises und ist gemeinsamer Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten. (Vgl. die Antworten der Fragen 48 bis 54, Sätze 18 bis 20 und Figuren 50 bis 55 in diesem Teile.)

Der Punkt liegt der grössten Dreiecksseite am nächsten, der kleinen am fernsten, und zwar im spitzwinkligen Dreieck innerhalb, beim stumpfwinkligen ausserhalb, beim rechtwinkligen auf der Mitte der Hypotenuse.

Der Winkel zweier benachbarten Radien ist das Doppelte des zugehörigen Dreieckswinkels, der Winkel zweier benachbarten Mittelsenkrechten ist das Supplement des zugehörigen Dreieckswinkels, der Winkel einer Mittelsenkrechten mit einem der beiden zugehörigen Radien ist gleich dem zugehörigen Gegenwinkel der Seite, der Winkel einer Seite mit einem Radius ist komplementär zum Gegenwinkel dieser Seite. Je drei nicht aufeinanderfolgende

Erkl. 358. Als Figuren zur nebenstehenden Antwort sind nachzusehen die Figuren 50 bis 55 und später 157 bis 161. An den angeführten Stellen des Abschnittes A 4 a sind auch die Beweise und Ableitungen der nebenstehenden Aussagen nachzusehen. Der Beweis für das Vorhandensein des Zentrums der Ecken ist mittels des geometrischen Ortssatzes auch wie folgt zu führen: Ist M der Schnittpunkt zweier beliebigen Mittelsenkrechten, so hat M gleichen Abstand vom ersten Punkt, wie vom zweiten und wie vom dritten, also auch vom zweiten und dritten, folglich ist M ein Punkt des Ortes dieser beiden Punkte, und deren Mittelsenkrechte muss auch durch M gehen. Es wird also für die beiden ersten Mittelsenkrechten der erste Einzelsatz des Ortssatzes angewandt, wornach die Lage auf der Mittelsenkrechten den gleichen Abstand bedingt. Und darnach wird der zweite Einzelsatz angewandt, wonach der gleiche Abstand vom dritten Paar Ecken die Lage auf deren Mittelsenkrechter bedingt.

Erkl. 359. Man hat bei nebenstehenden Aussagen deren Gültigkeit für das stumpfwinklige Dreieck zu beachten. Es wäre noch beizufügen, dass jede Mittelsenkrechte diejenige Seitenlinie des Dreiecks, welche den kleineren anliegenden Winkel bildet, innerhalb ihrer Seitenstrecke schneidet; diejenige, welche den grösseren anliegenden Dreieckswinkel bildet, auf ihrer Verlängerung. Und zwar ist der anliegende Abschnitt auf der ersteren Seite grösser, gleich, oder kleiner als der nicht anliegende, je nachdem der zweite Winkel spitz,

recht oder stumpf ist. Ueber weitere Beziehungen der dadurch gebildeten Teilstrecken wird später gehandelt werden. (Siehe den Abschnitt über die Transversalen der Dreiecke im VI. Teile dieses Lehrbuches.)

der letztern beiden Winkelgattungen bilden daher zusammen einen rechten Winkel.

2) Ueber die Zentra der Seiten eines Dreiecks.

Frage 156. Was ist ein Zentrum der Seiten eines Dreiecks?

Antwort. Ein Zentrum der Seiten eines Dreiecks ist ein solcher Punkt in der Ebene eines Dreiecks, welcher gleichen Abstand hat von den drei Seitenlinien desselben. Ein solcher Punkt ist daher Mittelpunkt eines dem Dreieck ein- oder angeschriebenen Kreises und ist gemeinsamer Schnittpunkt dreier Winkelhalbierenden, nämlich der drei Innenwinkel, oder je eines Innenwinkels und der beiden andern Aussenwinkel (vergl. die Antworten der Fragen 59 bis 71, die Sätze 21 bis 24 und Figur 57 bis 63 in diesem Teile). Das innere Zentrum der Seiten liegt stets innerhalb des Dreiecks, je ein äusseres in einem der drei Aussenräume des Dreiecks über einer Seite.

Der Winkel zwischen zwei benachbarten Winkelhalbierenden an den Eckpunkten ist am innern Zentrum um 90^0 grösser als die Hälfte des dritten Innenwinkels des Dreiecks, bei einem äusseren Zentrum gleich dieser Hälfte; der Winkel zweier benachbarten Berührungsradien ist supplementär zum zugehörigen Innen- bezw. Aussenwinkel des Dreiecks; der Winkel einer Innenwinkelhalbierenden mit einem der zugehörigen Berührungsradien ist beim innern und äussern Zentrum komplementär, der mit einer Aussenwinkelhalbierenden bei einem äussern ist gleich der Hälfte des zugehörigen Innenwinkels des Dreiecks. Auf jeder Seitenlinie des Dreiecks entstehen vier Berührungspunkte, welche unter einander und mit den beiden Eckpunkten der Seitenstrecke im ganzen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Abstandsstrecken bilden. Von den nach Ausschluss der Seitenstrecke selbst verbleibenden 14 Strecken sind 12 zu je zweien ein-

Erkl. 360. Als Figuren zur nebenstehenden Antwort sind nachzusehen die Figuren 57 bis 63 und später 157 bis 161. Auch die Beweise sind bereits an den angeführten Stellen geführt worden. Mittels des geometrischen Ortssatzes 41 ist der Beweis für das Vorhandensein der Zentra der Seiten, wie folgt, zu führen. Ist M der Schnittpunkt zweier beliebigen Winkelhalbierenden, so hat M gleichen Abstand von der ersten Geraden wie von der zweiten und wie von der dritten, also auch von der zweiten und dritten, folglich ist M auch ein Punkt des Ortes dieser beiden Geraden, also muss eine der beiden Winkelhalbierenden derselben auch durch M gehen. Es wird also wieder für die beiden ersten Winkelhalbierenden der erste Einzelsatz des Ortssatzes angewendet, wonach die Lage auf der Winkelhalbierenden den gleichen Abstand bedingt. Und darnach wird der zweite Einzelsatz angewendet, wonach der gleiche Abstand vom dritten Paar Seiten die Lage auf deren Winkelhalbierender bedingt.

Erkl. 361. Der eingeschriebene oder Inkreis liegt im Innern des Dreiecks und sein Mittelpunkt ist als das innere Zentrum der Seiten der Schnittpunkt der drei Innenwinkelhalbierenden und wird daher keiner der drei Ecken oder Seiten besonders zugeordnet. Ein äusserer Berührungskreis liegt im Aussenraume über einer Seite, im Innenwinkelraum eines Dreieckswinkels und im Nebenwinkelraum der zwei andern, sein Mittelpunkt ist Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Innenwinkels mit denen zweier Aussenwinkel; daher ist ein äusseres Zentrum der Ecken und ein Ankreis der ersteren Seite bezw. Ecke zugeordnet. Es ist also zu jeder Ecke und ihrer Gegenseite ein bestimmter der drei Ankreise zugeordnet. — Einer Winkelhalbierenden sind zugeordnet die von ihren Punkten ausgehenden Radien. Benachbart heissen solche zwei Radien, deren Winkel durch den dritten nicht innen, sondern äusserlich geteilt wird.

Erkl. 362. Es wäre noch beizufügen, dass jede Winkelhalbierende des Innenwinkels sowie Aussenwinkels die Gegenseite auf derjenigen Seite ihres Mittelpunktes schneidet, welche den grössern anliegenden Dreieckswinkel besitzt, also an die kleinere Seite

anstösst. Die dadurch entstehenden Abschnitte der Dreiecksseiten werden als u und v bezeichnet. Schon in der Aufgabe 105 des III. Teiles dieses Lehrbuches wurde nachgewiesen, dass jeder dieser Abschnitte u und v auf einer Seitenstrecke kleiner sein muss, als die anliegende Dreiecksseite. Umgekehrt ist die Teilstrecke zwischen einem Eckpunkte und dem Schnittpunkte der Aussenwinkelhalbierenden an der Gegenecke grösser als die anstossende Dreiecksseite, da diese Teilstrecke jeweils einem grösseren Winkel des von beiden gebildeten Dreiecks gegenüberliegt.

Im gleichschenkligen Dreieck sind diese Abschnitte auf der Grundseite gleichgross, entsprechend der Gleichheit der anstossenden Schenkel; im gleichseitigen Dreieck sind sämtliche gleich. Genauere Beziehungen zwischen diesen Abschnitten findet man im späteren Abschnitte über die Aehnlichkeit der Dreiecke im IV. Teile dieses Lehrbuches.

ander gleich, so dass man ausser der Seitenstrecke selbst nur folgende 8 verschiedene Abschnitte auf jeder der Seitenlinien erhält:

1) und 2) Zwischen Eckpunkt und Berührungspunkt des Inkreises bezw. des der Seite zugehörigen Ankreises = halbe Seitensumme minus anstossender Seite bezw. Gegenseite.

3) Zwischen Eckpunkt und Berührungspunkt des dieser Ecke zugehörigen Ankreises = halbe Seitensumme.

4) Zwischen einer Ecke und dem Berührungspunkt des der andern Ecke zugehörigen Ankreises = halbe Seitensumme minus anstossender Seite bezw. Gegenseite.

5) und 6) Zwischen den beiden inneren bezw. den beiden äusseren Berührungspunkten = Differenz bezw. Summe der anstossenden Seiten.

7) und 8) Zwischen je einem innern und einem äussern Berührungspunkte = die kleinere oder grössere anstossende Seite.

3) Ueber den Höhenpunkt eines Dreiecks, sowie den Kreis der neun Punkte.

Frage 157. Was ist der Höhenpunkt eines Dreiecks?

Erkl. 363. Ueber die Lage des Fusspunktes jeder einzelnen Höhe auf der zugehörigen Seite, sowie über die Grösse der entstehenden Höhenabschnitte und Seitenabschnitte p und q, und die gegenseitige Lage dieser Stücke in jeder der dreierlei Dreiecksgattungen ist schon im III. Teile ausführlich gehandelt worden in dem Abschnitte „Ueber die drei Höhen des Dreiecks" und in den zugehörigen Aufgaben. Aus Figur 154 bis 161 ist zu erkennen, dass der Höhenpunkt ebenso liegt wie das Zentrum der Ecken, nämlich innerhalb oder ausserhalb beim spitzen oder stumpfwinkligen Dreieck, auf dem Umring beim rechtwinkligen. Während aber das Zentrum der Seiten zunächst der grössten Seite liegt, so liegt der Höhenpunkt zunächst dem grössten Winkel, nämlich beim rechtwinkligen im Winkelscheitel, beim stumpfwinkligen im Scheitelwinkelraum des stumpfen Winkels. Die Höhenabschnitte liegen beim spitz- und rechtwinkligen Dreieck ganz im Innern des Dreiecks, beim stumpfwinkligen dagegen (siehe

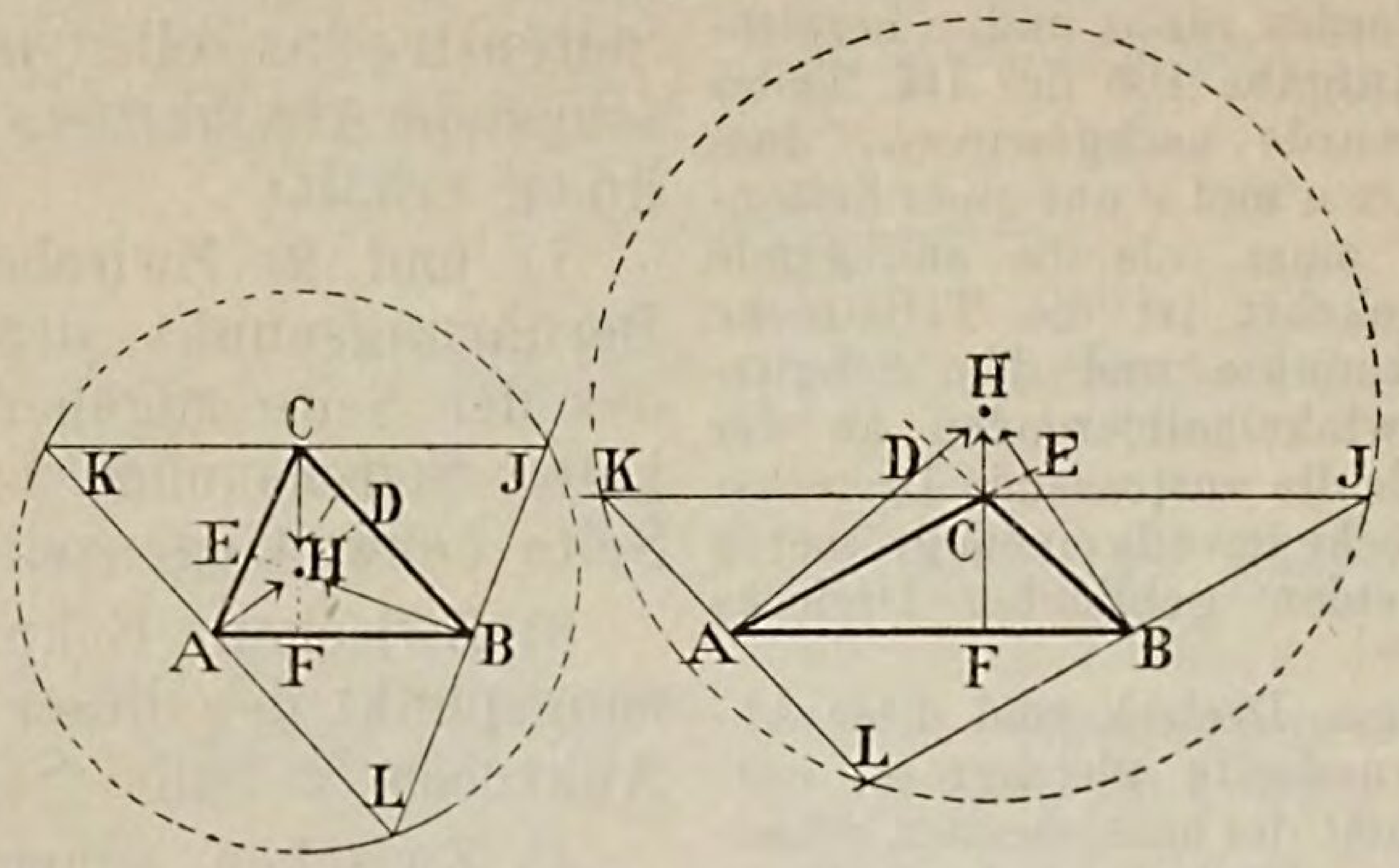
Antwort. Der Höhenpunkt eines Dreiecks ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt seiner drei Höhenlinien. Dies ist beim rechtwinkligen Dreieck selbstverständlich der Scheitel des rechten Winkels, da zwei Höhen mit den beiden Katheten zusammenfallen (siehe Antwort 84 bis 86 im III. Teile dieses Lehrbuches). Für das schiefwinklige Dreieck kann das Vorhandensein eines gemeinsamen Punktes der drei Höhen auf verschiedene Weise bewiesen werden:

Beweis I.

Ist ABC (in Figur 154) ein gegebenes spitz- oder stumpfwinkliges Dreieck, so ziehe man durch jede Ecke die Parallele zur Gegenseite (vergl. Antwort 168 des III. Teiles). Dann wird:

$$AB \parallel JK,\ BC \parallel KL,\ CA \parallel LJ,$$

Figur 154.



Figur 154 und 156) liegt keiner ganz innerhalb. Denn an den spitzwinkligen Ecken ist:

	in Fig. 155 II	in Fig. 155 III
oberer Abschnitt	AH u. BH	AH u. CH
unterer Abschnitt	DH u. EH	DH u. FH,

an der stumpfwinkligen Ecke aber ist:

	in Fig. 155 II	in Fig. 155 III
oberer Abschnitt	CH	BH
unterer Abschnitt	FH	EH

Erkl. 364. Als untern bezw. obern Höhenabschnitt bezeichnet man die Strecke zwischen dem Höhenpunkt und dem Fusspunkt bezw. dem Eckpunkt der Höhe, also die Teilstrecken, welche auf der Höhe selbst durch den Höhenpunkt gebildet werden. Nun ist beim spitzwinkligen Dreieck der Höhenpunkt innerer Teilpunkt jeder Höhe, beim stumpfwinkligen Dreieck äusserer Teilpunkt. Daher ist beim spitzwinkligen Dreieck jede Höhe selbst gleich der Summe des untern und obern Höhenabschnittes, beim stumpfwinkligen Dreieck ist jede Höhe selbst die Differenz des (grössern) untern und des (kleinern) obern Höhenabschnittes.

Erkl. 365. In Figur 155 sind die drei Fälle gezeichnet, welche eintreten können für die nebenstehende zweite Beweisführung. Es ist in den drei Figuren:

1) auf Bogen EA bezw. EH:

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle EDH = \sphericalangle ECH,$$

2) 3) auf Bogen EB bezw. EC:

$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle EDC = \sphericalangle EHC,$$

also in den Dreiecken ABE und 1) ACF, 2) 3) HBF jeweils der $\sphericalangle E = \sphericalangle F = 90^0$. Ebenso ist:

1) 3) auf Bogen DB bezw. DH:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DEH = \sphericalangle DCH,$$

2) auf Bogen DA bezw. DC:

$$\sphericalangle DBA = \sphericalangle DEC = \sphericalangle DHC,$$

also in den Dreiecken BAD und 1) 3) BCF, 2) HAF jeweils der $\sphericalangle D = \sphericalangle F = 90^0$.

Während also der Kreis über AB stets derselbe bleibt, wird der Kreis über dem „obern

also muss die Senkrechte AD von A auf a nicht nur auf BC, sondern auch auf KL senkrecht sein, und so jedesmal:

$$AD \perp KL,\ BE \perp LJ,\ CF \perp JK.$$

Nun ist aber wegen der parallelen Linien jedes der Vierecke $ABJC$, $BCKA$, $CALB$ ein Parallelogramm, also als Gegenseiten derselben:

$$JC \# AB \# CK,\ KA \# BC \# AL,$$
$$LB \# CA \# BJ.$$

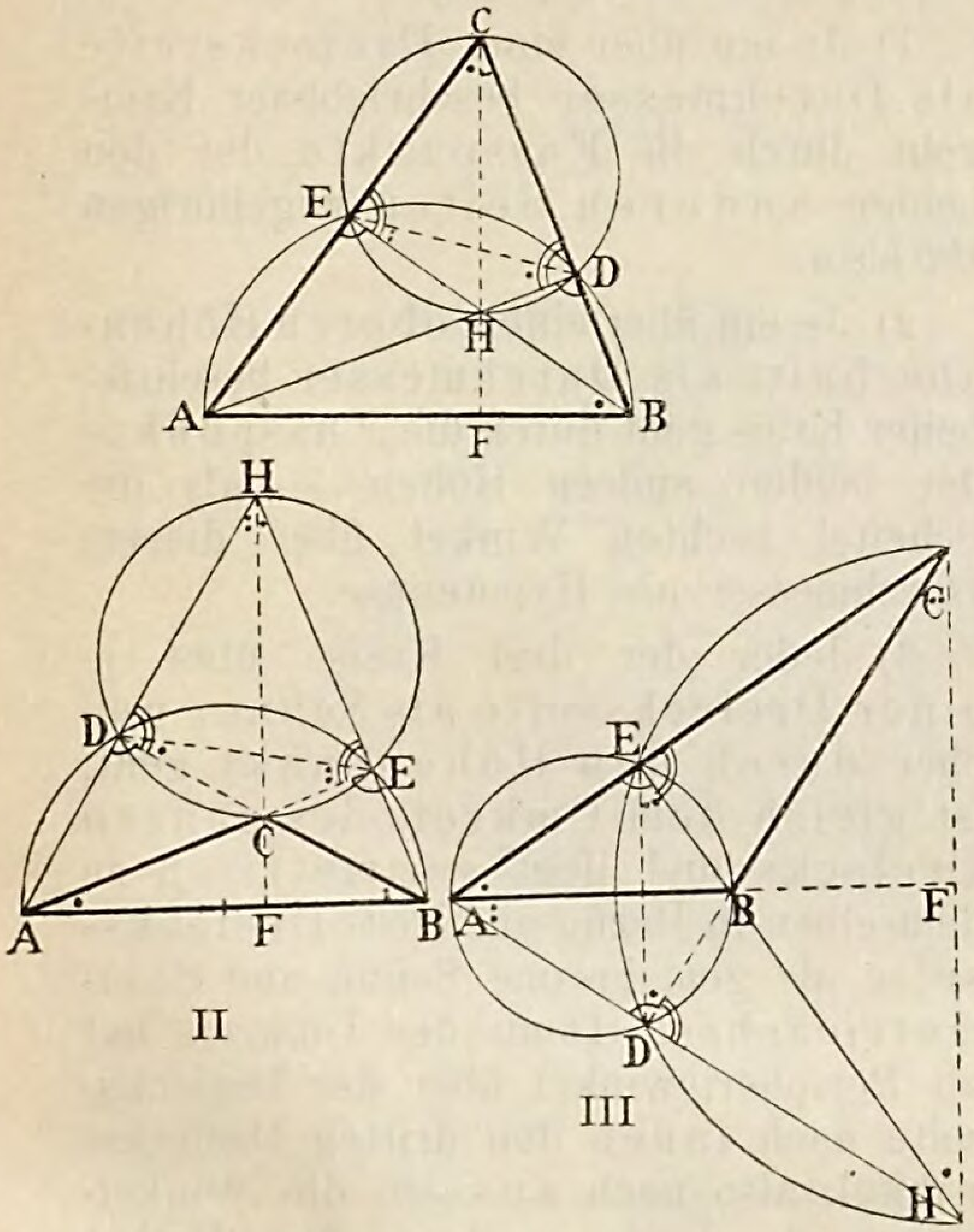
Folglich sind AD, BE, CF nicht nur Höhen des Dreiecks ADC, sondern auch Mittelsenkrechten des Dreiecks JKL, und müssen als solche durch denselben Punkt H gehen, das Zentrum des Umkreises für das Dreieck JKL.

Beweis II.

Zieht man im Dreieck ABC (siehe Figur 155) zunächst nur zwei beliebige der drei Höhen, z. B. AD und BE, und bezeichnet deren Schnittpunkt mit H, so lässt sich nachweisen, dass $CH \perp AB$ wird. Es entstehen nämlich sowohl über Strecke AB die beiden rechten Winkel ADB und AEB, als auch über der Verbindungslinie CH die beiden rechten Winkel CDH und CEH. Daher müssen nach Ortssatz 50 die Scheitelpunkte D und E je auf einem Halbkreis über CH liegen. Zieht man noch die beiden Kreisen gemeinschaftliche Sehne DE, so wird jeder Winkel bei D oder E mit einer Höhe in beiden Kreisen Peripheriewinkel, und zwar im einen Kreise (mit Durchmesser AB) auf demselben Standbogen mit dem Teilwinkel des Dreieckswinkels A oder B, im andern

Höhenabschnitt“ HC jedesmal verschieden: In der ersten und zweiten Figur im Innern bezw. Aeussern des Dreiecks zu verschiedenen Seiten der Strecke CH, in der dritten Figur aber auf nur einer Seite derselben Strecke.

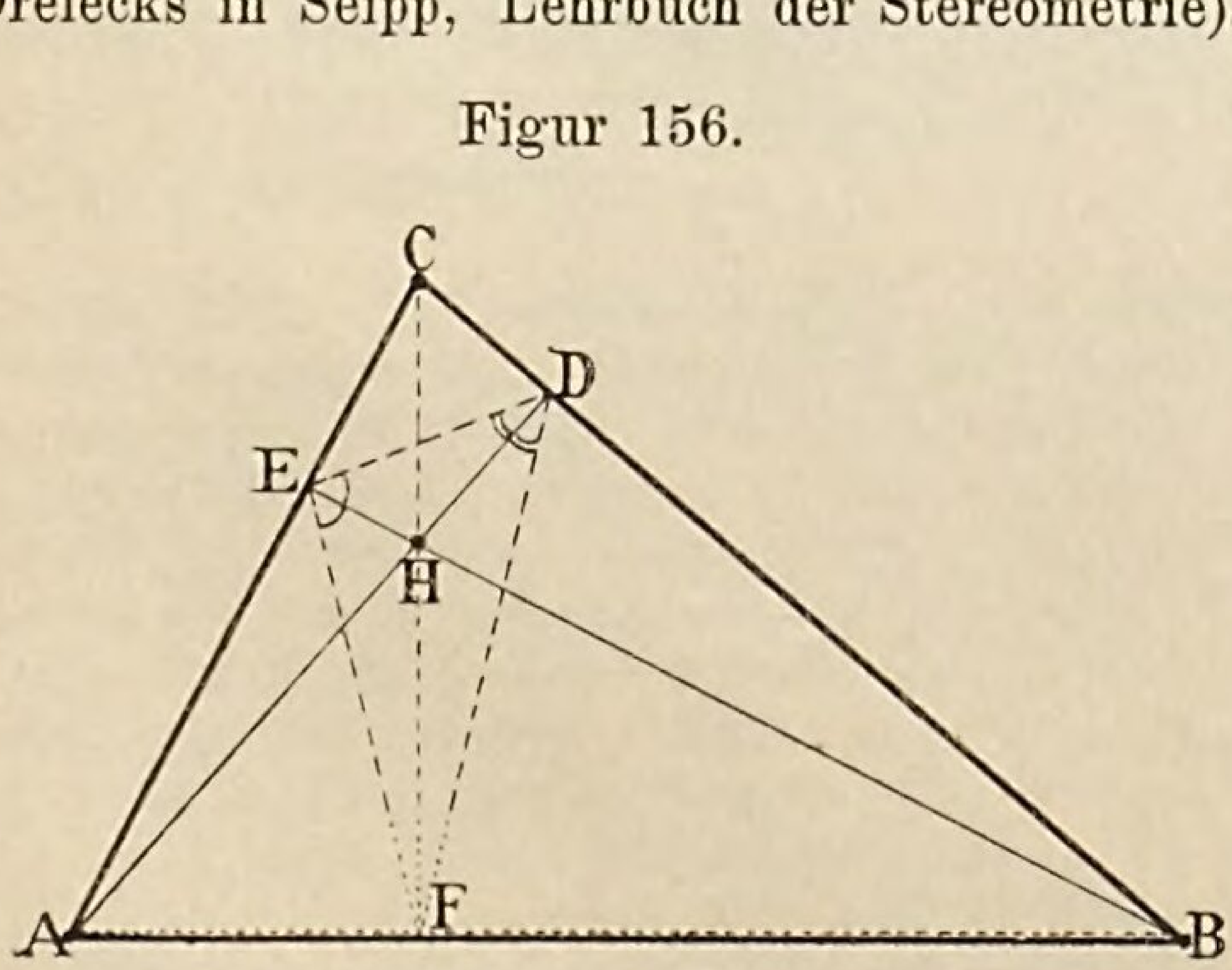
Figur 155.



Erkl. 366. Auch zu Figur 156 könnten die beiden Fälle der Figur 155 noch zugefügt werden für das stumpfwinklige Dreieck. Dabei bleibt der Wortlaut des nebenstehenden Beweises unverändert bestehen.

Der dritte der nebenstehenden Beweise ist dadurch besonders ausgezeichnet, dass er sich nicht auf die Planimetrie beschränkt, sondern auch in der Raumlehre mehrfache Anwendung in wörtlicher Uebertragung zulässt (vergl. den Abschnitt über den Höhenpunkt des sphärischen Dreiecks in Seipp, Lehrbuch der Stereometrie).

Figur 156.



Kreise (mit Durchmesser CH) auf demselben Standbogen mit dem Teilwinkel des Dreieckswinkels C. Diese Teilwinkel gehören aber je den beiden rechtwinkligen Dreiecken über AB an und einem derjenigen, welche den Winkel bei H ebenfalls gleich haben, folglich müssen auch die dritten Winkel dieser Dreiecke gleich sein, nämlich bei D, E und F, d. h. der Winkel HF mit AB muss ebenfalls wie ADB und BEA ein Rechter sein, die Verbindungslinie CHF fällt zusammen mit der Höhe von C auf AB.

Beweis III.

Zieht man wieder im Dreieck ABC (siehe Figur 156) zunächst nur zwei beliebige der drei Höhen, z. B. AD und BE, verbindet DE und trägt die Winkel zwischen ED und AD bezw. BE anderseits dieser Linien nochmals an, so dass $HDE = HDF$ und $HED = HEF$, so lässt sich nachweisen, dass die Verbindungslinien des Schnittpunktes F mit A und B auf der Linie AB liegen müssen, und dass $CF \perp AB$ wird. Es ist nämlich im Dreieck DEF sowohl HD wie HE Winkelhalbierende, also H inneres Zentrum der Seiten. Da ferner:

$$\sphericalangle ADB = ADC = 90^0$$

und

$$\sphericalangle BEA = BEC = 90^0,$$

so sind auch BC und AC Halbierungslinien der Aussenwinkel desselben Dreiecks bei D und E, also sind A und B und C die äusseren Zentren der Seiten. Zieht man daher CH, AF, BF, so müssen dies je die dritten Winkelhalbierenden des Innenwinkels und des Aussenwinkels bei F sein, d. h. es ist $AF \perp CHF \perp BF$, oder CHF ist Höhe von C auf AB.

Frage 158. Zu was für Kreislinien geben die Fusspunkte und der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks Veranlassung?

Antwort. Die Fusspunkte und der Schnittpunkt der drei Höhen eines Dreiecks geben dreierlei Gruppen von je drei Kreislinien Ursprung (s. Figur 157):

1) Je ein über einer Dreiecksseite als Durchmesser beschriebener Kreis geht durch die Fusspunkte der den beiden anderen Seiten zugehörigen Höhen.

2) Je ein über einem oberen Höhenabschnitt als Durchmesser beschriebener Kreis geht durch die Fusspunkte der beiden andern Höhen — als die Scheitel rechter Winkel über diesem Durchmesser als Hypotenuse.

3) Jeder der drei Kreise über je einer Dreiecksseite als Sehne, welcher durch den Höhenpunkt geht, ist gleich dem Umkreis des ganzen Dreiecks und liegt symmetrisch zu demselben in Bezug auf diese Dreiecksseite als gemeinsame Sehne und Symmetrieachse. Denn der Umkreis hat als Peripheriewinkel über der Dreiecksseite nach innen den dritten Dreieckswinkel, also nach aussen die Winkelsumme der beiden andern. Der Winkel zweier oberen Höhenabschnitte am Höhenpunkt ist aber ebenfalls die Summe der beiden zugehörigen Dreieckswinkel, also muss der Kreisbogen über derselben Sehne mit diesem Winkel als Peripheriewinkel gleich sein dem äussern Kreisbogen des Umkreises über dieser Seite. Für zwei gleiche Kreise ist aber die gemeinsame Sehne Symmetrieachse.

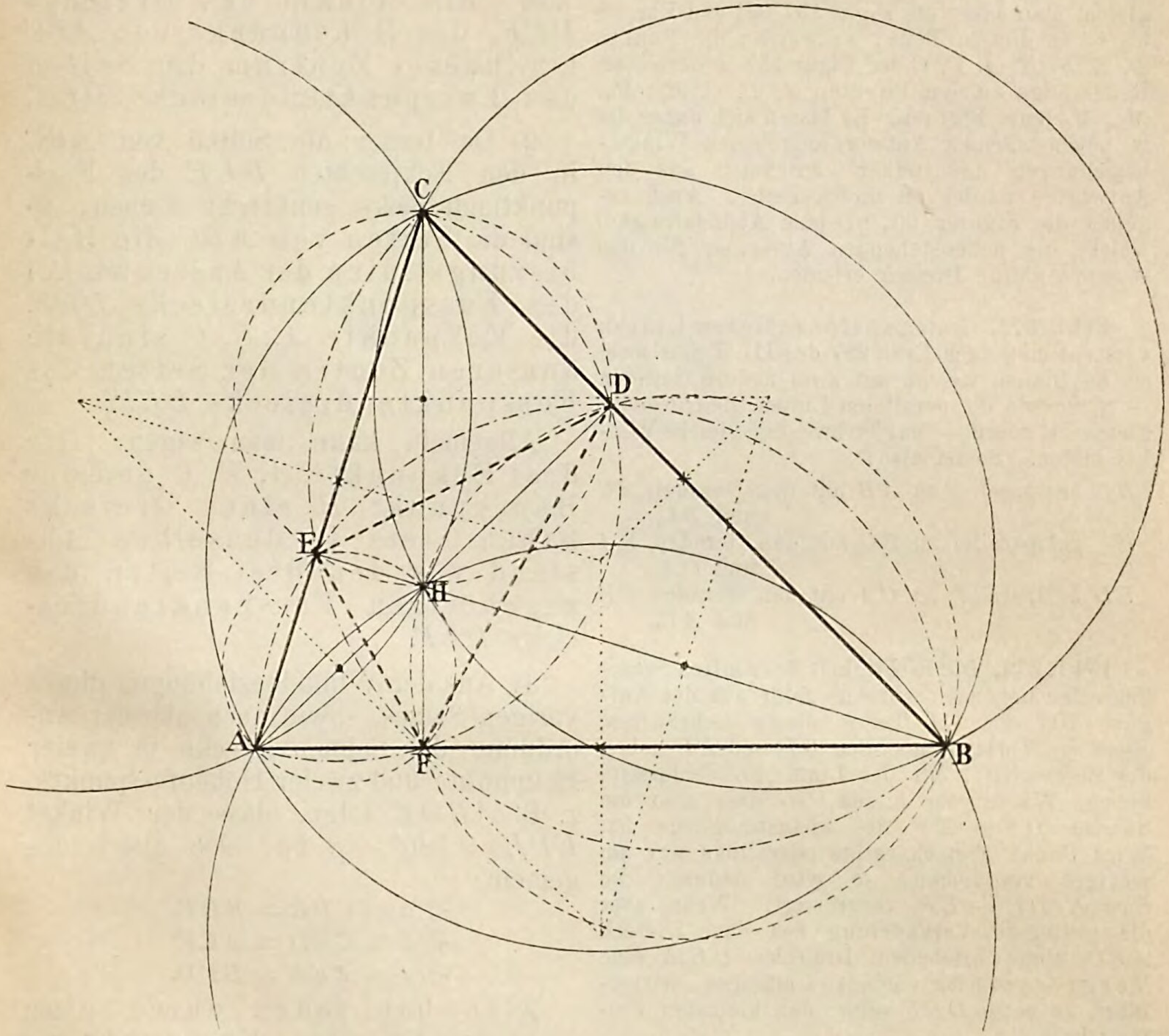
Erkl. 367. Die beiden ersten Gattungen der nebenstehend genannten Kreise sind schon im zweiten der vorigen Beweise benutzt. Deren erste ist bereits erwähnt in Antwort 56; beide Arten der sechs Kreise stützen sich auf Ortssatz 50. Die über den Dreiecksseiten entstehenden Kreisbogen werden nur Halbkreise, wenn der Seite kein stumpfer Winkel anliegt, sonst Vollkreise; die über den oberen Höhenabschnitten entstehenden Kreisbogen werden nur Halbkreise, wenn die zugehörige Seite einem stumpfen Winkel anliegt, sonst Vollkreise.

Erkl. 368. Man könnte diese Ergebnisse auch so fassen: Die Endpunkte jeder Seite und ebenso jedes oberen Höhenabschnittes bilden mit den Höhenpunkten der benachbarten Seiten ein Sehnenviereck mit zwei rechten Gegenwinkeln; je zwei untere Höhenabschnitte teilen das Dreieck in zusammen drei Sehnenvierecke. Die zweite Gattung der Kreise bildet eine Art Sternfigur mit den unteren Höhenabschnitten als Achsen, die dritte Gattung eine ebensolche mit den oberen Höhenabschnitten als Achsen; die erste liefert eine krummlinige Umschreibung des Dreiecks der Höhenfusspunkte durch ein Kreisbogendreieck mit gemeinsamen Ecken.

Erkl. 369. Die Mittelpunkte der Kreise durch den Höhenpunkt und je zwei Dreieckspunkte liegen auf der Mittelsenkrechten der drei Seiten symmetrisch zum Zentrum der Ecken. Der Winkel zweier oberen Höhenabschnitte ist als Scheitelwinkel gleich dem Winkel des Sehnenvierecks gegenüber einem Dreieckswinkel, also gleich dem Supplement des Dreieckswinkels, ebenso wie der Winkel zweier Mittelsenkrechten. Diese Mittelsenkrechten sind aber den Höhen parallel. Und für je zwei der Kreise der dritten Art ist ein oberer Höhenabschnitt gemeinsame Sehne, also Mittelsenkrechte ihrer Zentralstrecke. Folglich sind die Mittelsenkrechten des ursprünglichen Dreiecks Höhen des Dreiecks dieser drei Kreismittelpunkte und umgekehrt die Höhen der ursprünglichen die Mittelsenkrechten von dessen Seiten, die Seiten beider Dreiecke parallel. Würde man also um den Höhenpunkt H des ursprünglichen Dreiecks als Zentrum der Ecken des neuen einen Kreis beschreiben gleich dem Umkreis des gegebenen, so müsste er durch die drei Kreismittelpunkte der dritten Art gehen, da er als gemeinsamer Schnittpunkt der drei Kreise von allen drei Mittelpunkten denselben Abstand hat. Infolge der parallelen Seiten findet man daher, dass das Dreieck dieser Kreismittelpunkte mit dem ursprünglichen kongruent ist und durch Drehung um 180^0 mit demselben zur Deckung kommt. Denn wenn demselben

Kreise zwei Dreiecke mit gleichen Winkeln eingeschrieben würden, so müssen auch die Mittelpunktswinkel der Radien gleich werden, also die Gesamtfigur kongruent.

Figur 157.



Frage 159. Welche weiteren Beziehungen zum ursprünglichen Dreieck hat das Dreieck der Höhenfusspunkte aufzuweisen?

Erkl. 370. Die nebenstehenden Aussagen über Halbierungen der Innen- oder Aussenwinkel des ursprünglichen Dreiecks und des zugehörigen Fusspunktendreiecks gelten in der einzelnen Fassung nur für das spitzwinklige Dreieck. Wird ABC stumpfwinklig, so tritt mehrfach an die Stelle eines Innenwinkels ein Aussenwinkel und umgekehrt. Man vergleiche die gleichartigen Betrachtungen über das stumpfwinklige Dreieck in der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles. Fortdauernde Gültigkeit für alle Arten von Dreiecken behält dagegen die

Antwort. Das Dreieck der Höhenfusspunkte, welches auch kurz das „Fusspunktendreieck des Dreiecks ABC“ genannt wird, zeigt noch eine Reihe besonderer Beziehungen zum gegebenen Dreieck (siehe Figur 157).

1) In den Dreiecken ABE und ACF sind die Winkel bei B und C einander gleich, und als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen der obigen Kreise erster Gattung der erstere gleich dem Winkel ADE, letzterer gleich ADF. Durch

allgemeine Fassung am Schlusse des zweiten Abschnitts der nebenstehenden Antwort.

Erkl. 371. Würde man vom Dreieck DEF als ursprünglichem ausgehen und dessen Zentrum der Seiten suchen, so würde man auf das Dreieck ABC und dessen Höhenpunkt H geführt. Vergleicht man daher die Figur 157 mit den Fig. 59 bis 63 in diesem Teile, so werden die Punkte D, E, F, H, A, B, C der Figur 157 in derselben Reihenfolge zu den Punkten A, B, C, M_0, M_a, M_b, M_c jener Figuren. Es lassen sich daher die in nebenstehender Antwort gegebenen Winkelbeziehungen unmittelbar entnehmen aus den Antworten 64 bis 68 dieses Teiles. Auch ergeben die Figuren 60, 61 jene Abänderungen, welche die nebenstehenden Aussagen für das stumpfwinklige Dreieck erleiden.

Erkl. 372. Unter antiparallelen Linien versteht man nach Erkl. 297 des III. Teiles zwei solche Linien, welche mit zwei andern Geraden — nicht wie die parallelen Linien gleichwendig gleiche, sondern — ungleichwendig gleiche Winkel bilden. So ist also:

DE antiparallel zu AB mit den Geraden AC und BC,
EF antiparallel zu BC mit den Geraden BA und CA,
FD antiparallel zu CA mit den Geraden CB und AB.

Erkl. 373. Die Richtigkeit des fünften Satzes der nebenstehenden Antwort folgt aus der Aufgabe 103 des III. Teiles dieses Lehrbuches. Denn die Verbindungslinien DF und EF haben die Eigenschaft, mit der Linie AB beiderseits gleiche Winkel zu bilden, so dass also die Summe $DF + EF$ die kleinstmögliche ist. Wird Punkt F nach rechts oder links nur um weniges verschoben, so wird dadurch die Summe $DF + EF$ vergrössert. Wenn aber die geringste Veränderung des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Dreiecks DEF eine Vergrösserung seines Umfanges herbeiführt, so muss DEF selbst den kleinsten Umfang haben.

Erkl. 374. Weil D, E, F die Mittelpunkte von HD', HE', HF' sind, müssen

$$2 \cdot DE = D'E' \parallel DE,$$
$$2 \cdot EF = E'F' \parallel EF,$$
$$2 \cdot FD = F'D' \parallel DF$$

sein, also auch die Seiten des Dreiecks $D'E'F'$ je das Doppelte der Seiten DEF. Ebenso muss

$$\sphericalangle HD'E' = \sphericalangle HDE,$$
$$HD'F' = HDF,$$

also, weil $HDE = HDF$, auch

$$HD'E' = HD'F'.$$

Aber nicht nur auf den untern Höhenabschnitten selbst werden gleiche Strecken ausgeschnitten durch die parallelen Dreiecksseiten, sondern auch die auf den obern Höhenabschnit-

dieselbe Betrachtung erhält man zusammen:

$$\sphericalangle HDE = HDF, \quad \sphericalangle HED = HEF,$$
$$\sphericalangle HFE = \sphericalangle HFD.$$

Also halbieren die Höhen von ABC die Winkel des Dreiecks DEF, der Höhenpunkt von ABC ist inneres Zentrum der Seiten des Fusspunktendreiecks DEF.

2) Da ferner die Seiten von ABC in den Eckpunkten DEF des Fusspunktendreiecks senkrecht stehen, so sind die Seiten von ABC die Halbierungslinien der Aussenwinkel des Fusspunktendreiecks DEF, die Eckpunkte A, B, C sind die äusseren Zentra der Seiten des Fusspunktendreiecks DEF.

Allgemein kann man sagen: Die drei Eckpunkte A, B, C und der Höhenpunkt H eines Dreiecks haben stets je denselben Abstand von den drei Seiten des zugehörigen Fusspunktendreiecks DEF.

3) Aus den Winkelbeziehungen dieses vorigen Satzes, sowie auch aus der Anordnung der Sehnenvierecke je zweier Eckpunkte und zweier Höhenfusspunkte, z. B. $ABDE$ folgt, dass der Winkel $EDB = 180^0 - \beta$ ist, also gleich allgemein:

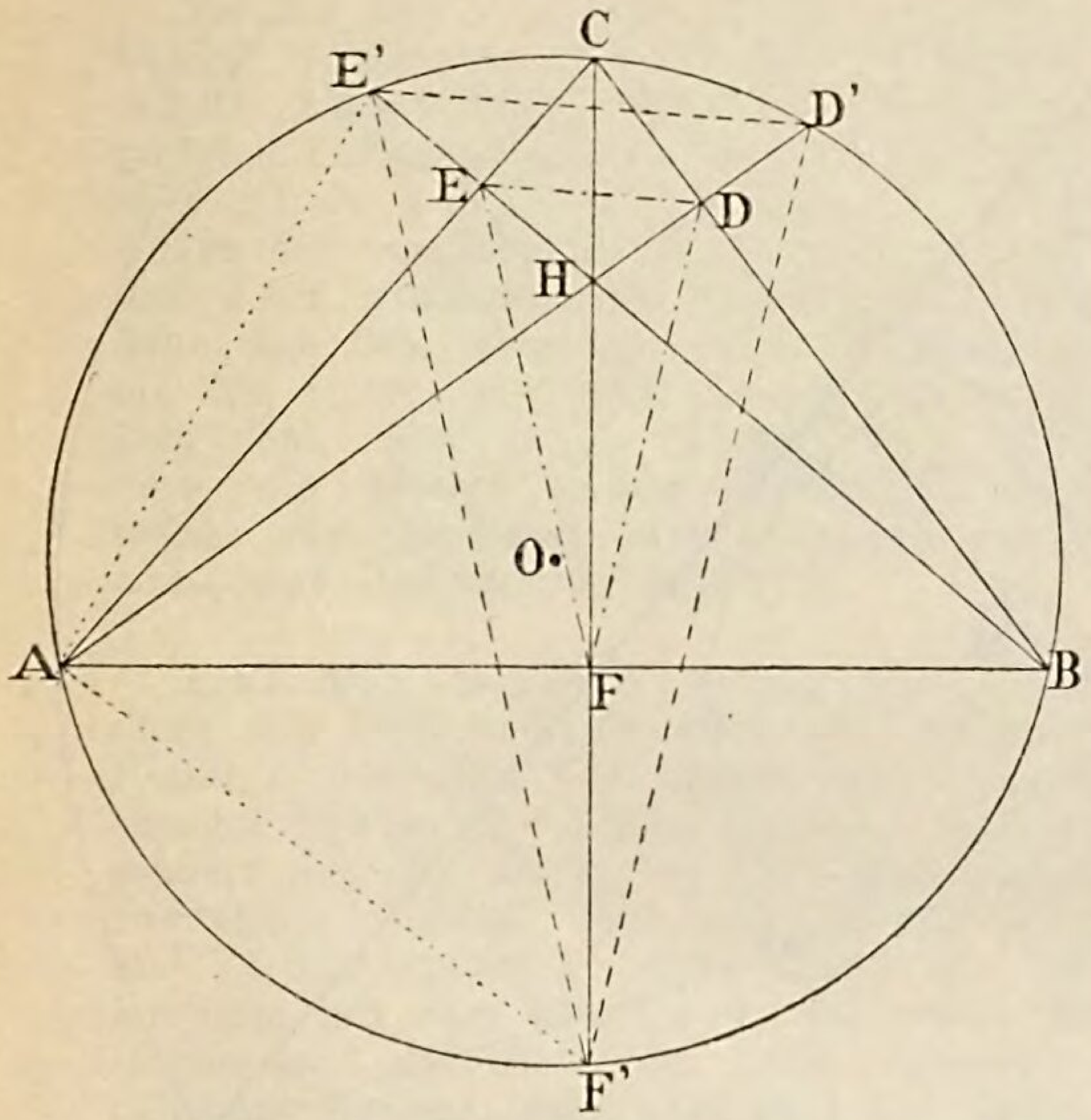
$$\sphericalangle \alpha = CDE = BDF,$$
$$\sphericalangle \beta = CED = AEF,$$
$$\sphericalangle \gamma = AFE = BFD.$$

Also hat jedes durch eine Seitenlinie des Fusspunktendreiecks vom ursprünglichen Dreieck abgeschnittene Dreieck dieselben drei Winkel, wie das ursprüngliche; oder: jede Seite des Fusspunktendreiecks ist antiparallel mit der zugehörigen Dreiecksseite zu den beiden anliegenden Dreiecksseiten.

4) Die Grösse der Winkel des Fusspunktendreiecks ergibt sich aus dem vorigen je als das Doppelte des Komplements eines gegenüberliegenden Dreieckswinkels. So ist:

ten entstehenden Teilstrecken sind gleichgross und ebenso die auf den Dreiecksseiten ABC beiderseits der Höhenfusspunkte ausgeschnittenen Strecken. Der Radius des Inkreises von $D'E'F'$ ist das Doppelte vom Radius des Inkreises des Dreiecks DEF.

Figur 158.



$$\sphericalangle EDF = 2 \cdot \sphericalangle EDA = 2 \cdot \sphericalangle EBA = 2\,(90 - \alpha);$$

oder derselbe:

$$\sphericalangle EDF = 180 - EDC - FDB = 180 - \alpha - \alpha = 180 - 2\alpha = 2\,(90 - \alpha).$$

5) Aus dem ersten Teile dieser Antwort folgt zugleich: Das Fusspunktendreieck DEF hat den kleinstmöglichen Umfang von allen Dreiecken, welche dem Dreieck ABC eingeschrieben werden können.

6) Verlängert man eine Höhenlinie, z. B. CF (siehe Figur 158) zum Schnitt mit dem Umkreise, so entsteht im Punkte F' der Peripheriewinkel $CF'A$ auf demselben Bogen mit $CBA = \beta$. Da nun am Höhenpunkte H auch $\sphericalangle AHF = \beta$ ist (als Ergänzung zu $\sphericalangle HAF$ im rechtwinkligen Dreieck HAF wie β im Dreieck BAD), so sind im Dreieck AHF' die Winkel bei H und F' einander gleich, also AF Mittelsenkrechte dieses gleichschenkligen Dreiecks, $HF = FF'$.

Die Verlängerungsstrecke einer Höhe bis zum Umkreis des Dreiecks ist also gleich ihrem untern Höhenabschnitt.

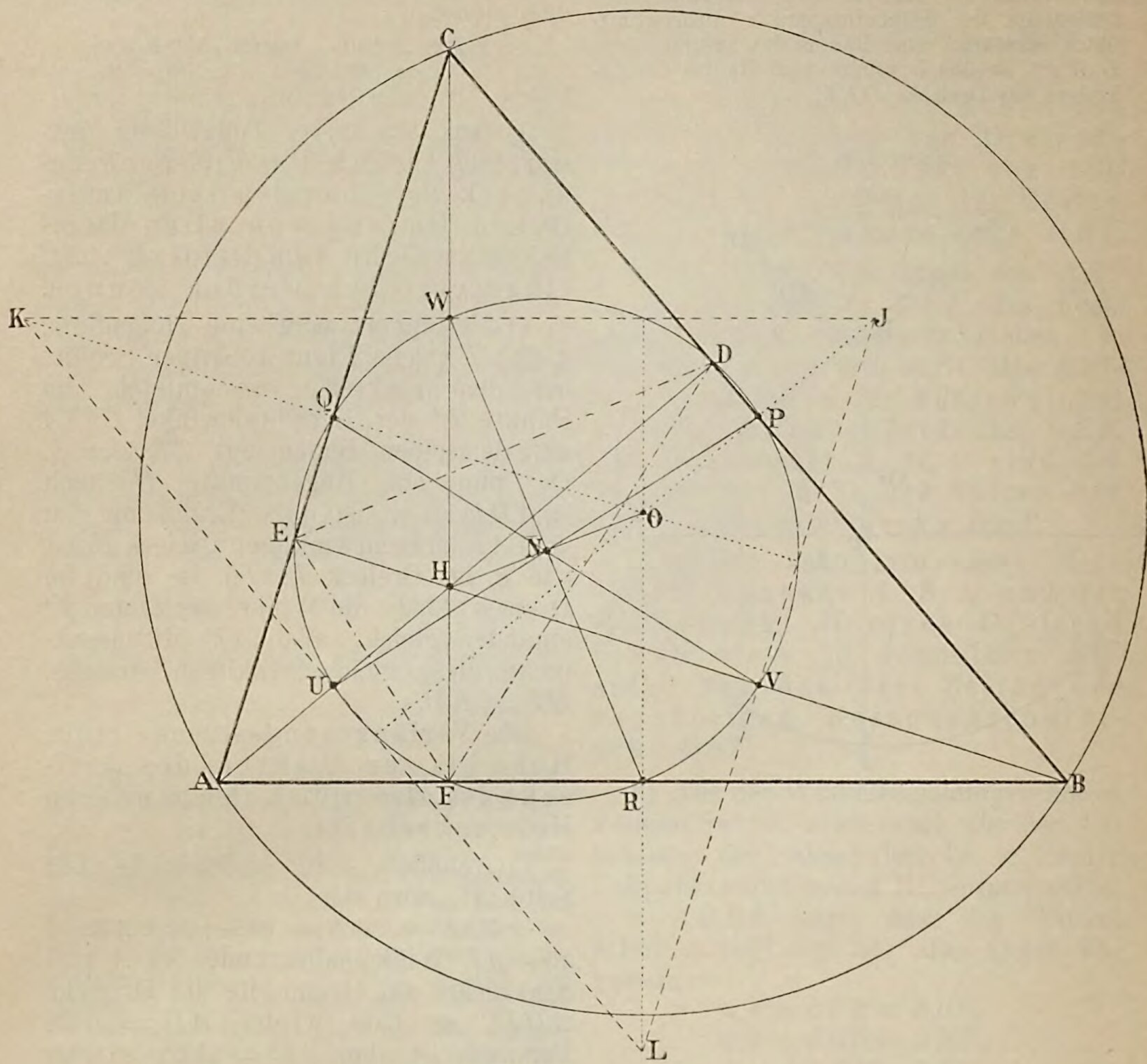
7) Aehnlich wird andererseits der Seite AC etwa der

$$\sphericalangle CAE' = CBE' = 90 - \gamma = CAD,$$

also AE Winkelhalbierende bei A und Senkrechte zur Grundseite des Dreiecks AHE', so dass wieder $AH = AE'$. Demnach ist aber $AF' = AE'$, so dass die Peripheriewinkel $AD'E' = AD'F'$ als Winkel auf gleichgrossen Standbogen.

Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch Betrachtung der Dreiecke $HD'E'$, $AE'F'$, $HF'D'$, in welchen D, E, H die drei Seitenmitten sind. Nach Satz 73 und 76 des III. Teiles müssen deshalb die Seiten des Dreiecks $D'E'F'$ der Schnittpunkte der Höhenlinien mit dem Umkreis des gegebenen Dreiecks ABC parallel sein zu den Seiten des Fusspunktendreiecks DEF; und die Höhen des gegebenen Dreiecks ABC sind die Winkelhalbierenden beider Dreiecke.

Figur 159.



Frage 160. Welche Beziehungen im ursprünglichen Dreieck liefert die Untersuchung des Dreiecks der Mittelpunkte JKL der Kreise durch zwei Ecken und den Höhenpunkt?

Erkl. 375. In vollständiger Zusammenstellung der nebenstehenden Aussagen erhält man für Figur 159 folgende Beziehungen:

$$AB \perp OL \perp JK, \quad BC \perp OJ \perp KL, \quad CA \perp OK \perp JL;$$
$$AB \# JK, \quad BC \# KL, \quad CA \# LJ;$$
$$OP = PJ, \quad OQ = QK, \quad OR = RL;$$
$$JW = WK, \quad KU = UL, \quad LV = VJ;$$
$$UA = UH, \quad VB = VH, \quad WC = WH;$$
$$JK \perp CHF, \quad KL \perp AHD, \quad LJ \perp BHE.$$

Antwort. 1) Da die drei Kreise durch den Höhenpunkt und je zwei Eckpunkte des Dreiecks mit dessen Umkreis je eine Dreiecksseite, und mit einander je einen obern Höhenabschnitt als gemeinsame Sehne haben, so sind die drei Mittelpunkte derselben die gemeinsamen Schnittpunkte der Mittelsenkrechten je einer Seite und eines obern Höhenabschnitts, und die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte mit einander und mit dem Zentrum der Ecken werden senkrecht

Erkl. 376. Dass der Radius des Umkreises für das Dreieck JKL derselbe ist, wie für ABC, folgt daraus, dass wie $OA = OB = OC$, so auch dieselbe Strecke

$$= JB = JC = JH$$

und $\quad = KC = KA = KH$

und $\quad = LA = LB = LH.$

Es sind also im ganzen fünf gleiche Umkreise vorhanden, nämlich für die Dreiecke ABC; ABH, BCH, CAH; JKL. Da zu gleichen Peripheriewinkeln in gleichen Kreisen aber gleiche Sehnen gehören, so müssen wegen der parallelen Seiten der Dreiecke ABC und JKL zunächst ihre Winkel gleich sein, dann aus dem eben genannten Grunde auch die drei Seiten, also sind die beiden Dreiecke kongruent. Und wegen der parallelen Seiten muss die einzige Lagenveränderung, durch welche ihre Deckung hervorgebracht werden kann, eine Drehung um 180° sein.

Erkl. 377. In Figur 159 sind zur Vermeidung von Undeutlichkeit nicht alle die durch Punkt N gehenden Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Dreiecke gezogen, sondern nur HO und die zu Kreisdurchmessern werdenden Strecken. Es kämen also noch hinzu die Verbindungslinien jedes Eckpunktes des Dreiecks mit dem Mittelpunkt des durch den Höhenpunkt und die beiden andern Eckpunkte gehenden Kreises, dann aber auch die Verbindungslinien jedes Höhenfusspunktes mit der Gegenecke desjenigen Rechtecks, welches durch diesen mit dem Mittelpunkt der zugehörigen Seite und des zugehörigen obern Höhenabschnitts bestimmt ist.

Erkl. 378. Da HO, CL entsprechende Punktepaare sind, so entstehen die Parallelogramme $HCOL$, $HAOJ$, $HBOK$, und in diesen als gleiche Gegenseiten bezw. Mittelparallelen:

$$HC = OL = 2 \cdot OR,\; HA = OJ = 2 \cdot OP,$$
$$HB = OK = 2 \cdot OQ$$

und $HL = WR = CO,\; HJ = UP = AO,$

$$HK = VQ = BO.$$

Da aber O das Zentrum der Ecken ist, so wird:

$$OA = OB = OC,$$

also auch:

$$WR = UP = VQ = r,$$

und als Hälften:

$$NW = NU = NV = NR = NP = NQ = \frac{1}{2} r.$$

Erkl. 379. Da die Höhenfusspunkte des einen Dreiecks ABC auf dem Kreise mit Radius $\frac{r}{2}$ um N liegen, so gilt dasselbe von den Höhenfusspunkten des Dreiecks JKL, so dass 12 Punkte auf dem Kreise liegen. Jedoch werden diese letzteren nicht besonders erwähnt, da sie zu dem Grunddreieck ABC nicht in be-

halbiert durch die Höhen und Seiten (siehe Figur 159).

2) Die Seiten des Dreiecks JKL sind parallel den Seiten des Dreiecks ABC, der Radius des umgeschriebenen Kreises ist derselbe, also sind die beiden Dreiecke kongruent.

3) Das Symmetriezentrum, um welches Dreieck ABC um 180° gedreht werden muss, um mit JKL zur Deckung zu gelangen, ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecken je zweier entsprechender Punkte. Es schneiden sich also im gemeinsamen Schnittpunkte N als Mittelpunkte die Strecken OH; AJ, BK, CL; PU, QV, RW; folglich kann man aussagen:

Die Verbindungslinien des Eckenzentrums und Höhenpunktes, sowie der Mittelpunkte der Seiten und der zugehörigen obern Höhenabschnitte eines Dreiecks halbieren einander im gemeinsamen Schnittpunkte.

4) Die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in beiden Dreiecken bilden gleiche Strecken, also ist z. B.:

$$HC = OL,\; HW = WC = \frac{HC}{2} = OR:$$

Jeder obere Höhenabschnitt ist doppelt so gross, als die mittelsenkrechte Strecke der entsprechenden Seite.

5) Es muss auch $HL = OC = WR$ sein, da letztere Strecke die Mittelparallele des Parallelogramms $HLOC$; also, da OC Radius des Umkreises ist:

Die Verbindungsstrecke je einer Seitenmitte mit dem Mittelpunkt des zugehörigen obern Höhenabschnitts ist parallel und gleich dem zugehörigen Radius des Umkreises, folglich sind diese Strecken alle drei einander gleich.

6) Da N gemeinschaftlicher Mittelpunkt dieser gleichen Strecken:

$$PU = QV = RW = r$$

ist, so liegen P, Q, R, U, V, W auf einem Kreise mit Radius $\frac{PU}{2} = \cdots = \frac{r}{2}$. Durchmesser dieses Kreises sind die

sonderer Beziehung stehen. — Da der Kreis durch die drei Punkte DEF geht, so ist er Umkreis dieses Dreiecks, liefert $ND = NE = NF$ und ist gemeinsamer Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten, und zwar für die Fusspunktendreiecke der beiden Dreiecke ABC und DEF.

Erkl. 380. Da die Endpunkte je zweier Kreisdurchmesser ein Rechteck bilden, so bilden je zwei Paare der genannten neun Punkte ein Rechteck mit gemeinsamem Mittelpunkt N. Man kann also ausser den in Erkl. 377 genannten Rechtecken weiter aussagen: Je zwei Seitenmitten eines Dreiecks bilden mit den Mittelpunkten der zugehörigen obern Höhenabschnitte Rechtecke mit gleichen Diagonalen und gemeinsamem Mittelpunkte.

Erkl. 381. Der Kreis um den Punkt N mit Radius $\frac{r}{2}$, welcher durch die genannten neun (12) Punkte geht, heisst auch ausdrücklich der „Kreis der neun Punkte“ oder der „Neunpunktekreis“ des Dreiecks ABC oder auch nach seinem Entdecker Feuerbach der „Feuerbachsche Kreis des Dreiecks ABC“ (siehe Klimpert, Geschichte der Geometrie).

vorigen Strecken. Daher sind Peripheriewinkel desselben Kreises die rechten Winkel $PDU = QEV = RFW$, also liegen auch diese Punkte D, E, F auf demselben Kreise, und dieser ist Umkreis des Fusspunktendreiecks. Man erhält also:

Auf dem Umkreis des Fusspunktendreiecks DEF eines Dreiecks ABC liegen neun Punkte, nämlich die Höhenfusspunkte der Seitenmitten und die Mitten der obern Höhenabschnitte des Dreiecks ABC. Der Radius des Kreises ist die Hälfte des Radius des Umkreises von ABC, sein Mittelpunkt halbiert die Verbindungsstrecke des Eckenzentrums und Höhenpunktes von ABC, sowie die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je einer Seite und des zugehörigen obern Höhenabschnitts.

Frage 161. Durch welche Ueberlegungen kann man denselben vorigen Satz auf andere Weise nachweisen?

Erkl. 382. Die Winkelbeziehungen, welche für den Kreis der neun Punkte von Bedeutung werden, sind die folgenden:

1) Die Teilwinkel der Dreieckswinkel zwischen Seiten und Höhen sind die Komplemente der anliegenden Dreieckswinkel, also:

$$ABH = ACH = 90 - \alpha,$$
$$BCH = BAH = 90 - \beta,$$
$$CAH = CBH = 90 - \gamma.$$

2) Die Winkel zweier benachbarten obern Höhenabschnitte und ebenso

3) die Winkel zweier untern Höhenabschnitte sind (als Gegenwinkel im Sehnenviereck $AFHE$ mit zwei rechten Winkeln) die Supplemente der zugehörigen dritten Dreieckswinkel, also:

$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle EHF = 180^0 - \alpha = \beta + \gamma,$$
$$\sphericalangle CHA = \sphericalangle FHD = 180^0 - \beta = \gamma + \alpha,$$
$$\sphericalangle AHB = \sphericalangle DHE = 180^0 - \gamma = \alpha + \beta.$$

4) Die Winkel eines obern mit einem benachbarten untern Höhenabschnitt sind (als Komplemente des Komplements) gleich dem zugehörigen dritten Dreieckswinkel, also:

$$\sphericalangle BHF = CHE = \alpha,$$
$$\sphericalangle CHD = AHF = \beta,$$
$$\sphericalangle AHE = BHD = \gamma.$$

5) Die Winkel einer Seite des Fusspunktendreiecks mit einer anliegenden Dreiecksseite

Antwort. Man kann die Eigenschaften des Neunpunktekreises auch auf folgende Weise auffinden:

1) Zieht man den Umkreis des Fusspunktendreiecks DEF (siehe Figur 160), so ist N Zentrum der Ecken (und die Punkte H, A, B, C die vier Zentra der Seiten) des Dreiecks DEF. Verbindet man nun den Schnittpunkt V des Kreises auf der Höhe HB mit einem Höhenpunkt F, so wird der Peripheriewinkel:

$$FVE = FDE = 180 - 2\alpha.$$

Da aber im Dreieck:

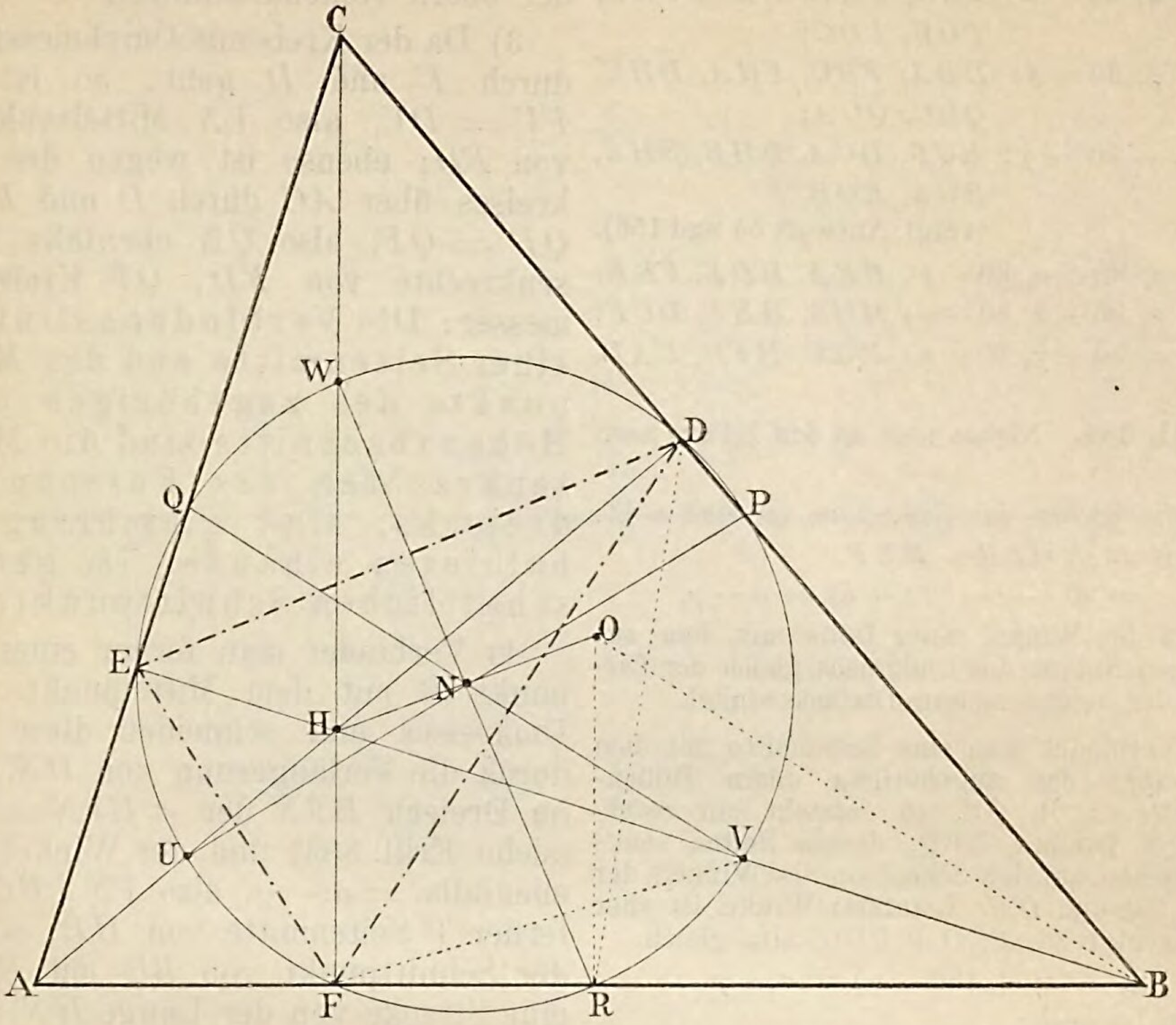
$$FVH \text{ oder } \sphericalangle FHV = \alpha$$

ist, so muss hiernach auch $\sphericalangle HFV = \alpha$ sein, das Dreieck FVH gleichschenklig, und $VF = VH$. Als Komplement zu HVF ist daher der Winkel:

$$VFB = 90^0 - \alpha,$$

ebenso wie $\sphericalangle HBF$, also ist auch $\sphericalangle VFB = VBF$, Dreieck FVB gleichschenklig, $BV = VF = VH$, V Mittelpunkt von BH. Daher geht der Umkreis des Fusspunktendreiecks durch die Mittelpunkte der obern Höhenabschnitte.

Figur 160.



sind (wegen des Sehnenvierecks über der zugehörigen Dreiecksseite) gleich (bezw. der Nebenwinkel supplementär) dem Gegenwinkel dieser Dreiecksseite, also:

$$\sphericalangle EDC = \sphericalangle FDB = \alpha,$$
$$\sphericalangle FEA = DEC = \beta,$$
$$DFB = EFA = \gamma.$$

6) Die Winkel des Fusspunktendreiecks sind (wegen der vorigen Ergänzungswinkel zum gestreckten) gleich den Supplementen der doppelten gegenüberliegenden Dreieckswinkel, also:

$$\sphericalangle FDE = 180^0 - 2\alpha,$$
$$DEF = 180^0 - 2\beta,$$
$$EFD = 180^0 - 2\gamma.$$

7) Die Winkel einer Seite des Fusspunktendreiecks mit einer anliegenden Höhenlinie sind (als Hälften der vorigen Winkel) gleich dem Komplement des zur Höhe gehörigen Dreieckswinkels, also:

$$\sphericalangle HDF = HDE = 90 - \alpha,$$
$$HED = HEF = 90 - \beta,$$
$$HFE = HFD = 90 - \gamma.$$

Erkl. 383. Nach den vorigen Ergebnissen erhält man in den Figuren 157 bis 160 eine Reihe von Dreiecken mit gleichgrossen Winkeln, nämlich:

2) Verbindet man ferner den Schnittpunkt R des Kreises auf der Seite AB mit einem Höhenfusspunkt D, so wird der Peripheriewinkel DRF supplementär zu dem auf gleicher Sehne DF im entgegengesetzten Bogen stehenden Peripheriewinkel DEF, welcher gleich $180 - 2\beta$ ist. Daher ist:

$$\sphericalangle DRF = 2\beta,$$

und folglich im Dreieck ARD, wo:

$$\sphericalangle DAR = 90 - \beta$$

ist, auch:

$$\sphericalangle ADR = 90 - \beta;$$

das Dreieck ist gleichschenklig, und $AR = RD$. Ebenso muss als Komplementwinkel der

$$\sphericalangle RDB = 90^0 - ADR = \beta = ABD$$

sein, also ist auch das Dreieck DRB gleichschenklig, $DR = RB$, und folglich $AR = RB$, R Mittelpunkt von AB. Daher geht der Umkreis des Fusspunktendreiecks auch durch die Mittelpunkte der Seiten, und es liegen auf ihm die je drei Höhen-

1) α, β, γ: ABC, DEC, AEF, DBF.
2) 90^0, α, $90-\alpha$: FAC, EAB, EHC, FHB, POB, POC;
90^0, β, $90-\beta$: DBA, FBC, FHA, DHC, QOC, QOA;
90^0, γ, $90^0-\gamma$: ECB, DCA, DHB, EHA, ROA, ROB
(vergl. Antwort 54 und 156).
3) $\alpha+\beta$, $90-\alpha$, $90-\beta$: HBA, HDE, FBE;
$\beta+\gamma$, $90-\beta$, $90-\gamma$: HCB, HEF, DCF;
$\gamma+\alpha$, $90-\gamma$, $90-\alpha$: HAC, HFD, EAD.

Erkl. 384. Nimmt man zu den Höhen noch hinzu:

1) die Radien des Umkreises, so wird z. B.:

$$\sphericalangle OBH = \sphericalangle OBR - HBF$$
$$= 90-\gamma-(90-\alpha) = \alpha-\gamma,$$

also ist der Winkel einer Höhe mit dem zugehörigen Radius des Umkreises gleich der Differenz der beiden andern Dreieckswinkel.

2) Verbindet man eine Seitenmitte mit dem Mittelpunkt des zugehörigen obern Höhenabschnitts, z. B. QV, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck EVQ, dessen Seiten senkrecht stehen auf den Schenkeln des Winkels der Linien CA und DF. Letzterer Winkel ist aber supplementär zu $ACD + FDC$, also gleich:

$$180^0 - (\gamma + 180 - \alpha) = \alpha - \gamma.$$

Also ist auch:

$$\sphericalangle EVQ = HVN = \alpha - \gamma.$$

3) Verbindet man einen Höhenfusspunkt mit dem Mittelpunkt eines obern Höhenabschnitts, z. B. FV, so wird der Winkel dieser Linie mit der Dreiecksseite gleich dem Komplement des dritten Dreieckswinkels:

$$VFB = VBF = 90-\alpha.$$

4) Der Winkel derselben Linie mit ihrem untern Höhenabschnitt ist gleich dem dritten Dreieckswinkel, nämlich:

$$\sphericalangle HFV = \sphericalangle FHV = \alpha.$$

5) Der Winkel derselben Linie mit dem obern Höhenabschnitt ist gleich bezw. supplementär dem doppelten dritten Dreieckswinkel, nämlich:

$\sphericalangle FVH$ als Aussenwinkel,

$$2\cdot\sphericalangle VBF = 2(90-\alpha) = 180-2\alpha,$$
$$\sphericalangle FVB = 2\alpha$$

oder auch:

$$\sphericalangle FVH = 180^0 - 2\cdot\sphericalangle FHV = 180-2\alpha;$$
$$\sphericalangle FVB = 2\alpha.$$

Erkl. 384a. Einen dritten Beweisgang für die Ergebnisse der beiden Antworten 160 und 161 erhält man später noch aus der Antwort 165. (Vergl. Erkl. 397 und 398.)

fusspunkte, Seitenmitten, Mittelpunkte der obern Höhenabschnitte.

3) Da der Kreis mit Durchmesser HB durch F und D geht, so ist auch $FV = DV$, also VN Mittelsenkrechte von FD; ebenso ist wegen des Halbkreises über AC durch D und F auch $QD = QF$, also QN ebenfalls Mittelsenkrechte von FD, QV Kreisdurchmesser: Die Verbindungslinien je einer Seitenmitte und des Mittelpunkts des zugehörigen obern Höhenabschnitts sind die Mittelsenkrechten des Fusspunktendreiecks, sind gleichlang und halbieren einander im gemeinschaftlichen Schnittpunkte.

4) Verbindet man ferner einen Eckpunkt B mit dem Mittelpunkt O des Umkreises und schneidet diese Linie durch die Verlängerung von HN, so ist im Dreieck HVN der $\sphericalangle HVN = \alpha-\gamma$ (siehe Erkl. 384) und der Winkel HBO ebenfalls $= \alpha-\gamma$, also $VN \parallel BO$. Da ferner V Seitenmitte von HB, so muss der Schnittpunkt von BO mit HN um eine Strecke von der Länge HN über N hinaus liegen. Dasselbe gilt vom Schnittpunkt von CO mit HN, also muss HN von diesen beiden Linien BO und CO im gleichen Schnittpunkt getroffen werden, HN muss durch O gehen, und es wird:

$$HN = NO,\ OB = OC = 2\cdot NV = 2\cdot NW:$$

Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises halbiert die Verbindungsstrecke des Höhenpunkts und des Zentrums der Ecken, sein Radius ist die Hälfte des Radius des Umkreises.

5) Fällt man noch von O die Senkrechte OR, so wird:

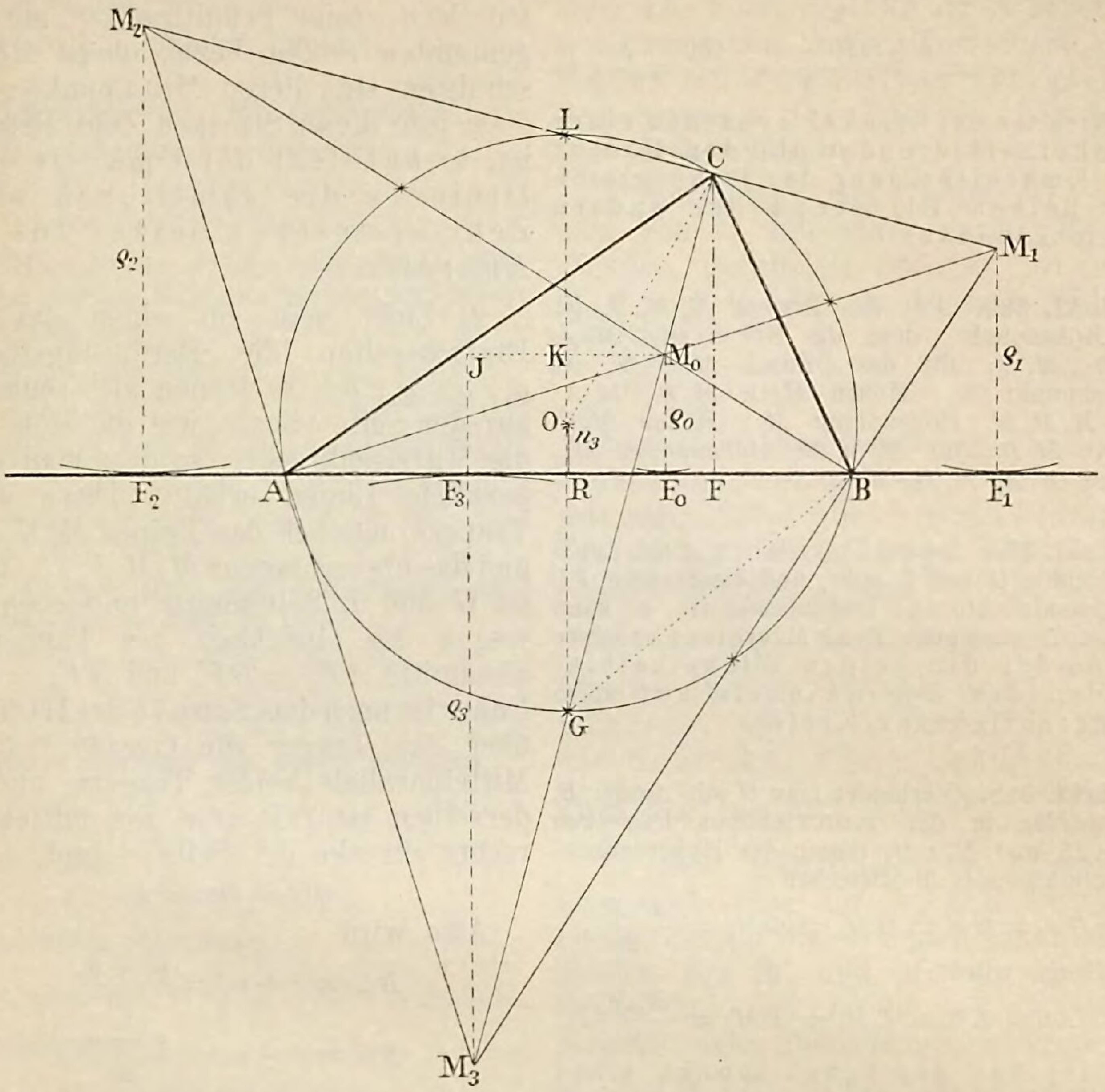
$$\triangle ONR \cong HNW,$$

also:

$$HW = OR = \frac{1}{2}\cdot HC,$$

also ist jeder obere Höhenabschnitt doppelt so gross, als die zugehörige Mittelsenkrechte.

Figur 161.



Frage 162. Welche Längenbeziehungen bestehen zwischen den Radien der Berührungskreise eines Dreiecks untereinander und mit den Höhen und Mittelsenkrechten?

Erkl. 385. Zieht man von einem Eckpunkte C aus den Radius des Umkreises, die Winkelhalbierende und die Höhe, so ist der Winkel:

$$M_0CA = M_0CB = \frac{\gamma}{2},$$

$$\sphericalangle OCA = 90 - \beta, \quad \sphericalangle BCF = 90 - \beta,$$

also ist auch:

$$\frac{\gamma}{2} - OCA = \frac{\gamma}{2} - FCB,$$

d. h.:

$$M_0CO = M_0CF,$$

die Winkelhalbierende halbiert den Winkel zwischen der Höhe und dem Radius des Umkreises. Es ist nämlich jede Hälfte gleich:

Antwort. 1) Zieht man in einem Dreieck die sechs Winkelhalbierenden, so wird das Dreieck selbst zum Fusspunktendreieck für jedes der vier von den Zentren der Seiten gebildeten Dreiecke, nämlich für das spitzwinklige Dreieck $M_1M_2M_3$ und für die drei stumpfwinkligen Dreiecke:

$$M_0M_1M_2, \; M_0M_2M_3, \; M_0M_3M_1.$$

In jedem derselben sind die Punkte ABC Fusspunkte, die Zentralstrecken der Kreise, nämlich die Linien M_0M_1A, M_0M_2B, M_0M_3C; M_1CM_2, M_2AM_3, M_3BM_1 die Seiten bezw. die Höhen. Für jedes dieser Dreiecke der Zentra der Seiten wäre also der Umkreis

$$\frac{\gamma}{2} - (90 - \beta) = \frac{2\beta + \gamma - 180}{2}$$

$$= \frac{\beta + (180 - \alpha) - 180}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Also ist der Winkel zwischen einer Winkelhalbierenden und dem Radius des Umkreises oder der Höhe gleich der halben Differenz der andern Dreieckswinkel.

Erkl. 386. Für das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ ist M_0 Höhenpunkt, denn die Höhen sind $M_1 A$, $M_2 B$, $M_3 C$; für das Dreieck $M_0 M_1 M_2$ ist Höhenpunkt M_3, Höhen $M_0 C$, $M_1 B$, $M_2 A$; für $M_2 M_0 M_3$ Höhenpunkt M_1, Höhen $M_2 C$, $M_0 A$, $M_3 B$; für $M_3 M_0 M_1$ Höhenpunkt M_2, Höhen $M_3 A$, $M_0 B$, $M_1 C$.

Erkl. 387. Da der Umkreis von ABC durch die Punkte G und L geht, und die Strecke GL Mittelsenkrechte und Durchmesser ist, so kann man auch aussagen: Eine Mittelsenkrechte schneidet die beiden Winkelhalbierenden des Gegenwinkels auf dem umgeschriebenen Kreise.

Erkl. 388. Verbindet man G mit A oder B, so werden in den rechtwinkligen Dreiecken $M_0 A M_3$ und $M_0 B M_3$ wegen des Hypotenusenmittelpunktes G die Strecken:

$$GA = GB = GM_3 = GM_0 = \frac{M_0 M_3}{2}.$$

Ebenso würde:

$$LA = LB = LM_2 = LM_1 = \frac{M_1 M_2}{2}.$$

Also hat der Schnittpunkt einer Winkelhalbierenden mit dem Umkreise gleichen Abstand von den zwei zugehörigen Dreiecksseiten wie von den der Ecke zugehörigen Zentren der Seiten. (Er ist nämlich nach früherem der Mittelpunkt des Sehnenvierecks $M_0 A M_3 B$ bezw. $M_2 A B M_3$.)

Erkl. 389. Ebenso wie in nebenstehender Antwort findet man die Gruppe:

$$r + n_1 = \frac{\varrho_2 + \varrho_3}{2}, \quad r - n_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{2},$$

$$r + n_2 = \frac{\varrho_3 + \varrho_1}{2}, \quad r - n_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho_0}{2},$$

$$r + n_3 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}, \quad r - n_3 = \frac{\varrho_3 - \varrho_0}{2}.$$

Hieraus entsteht:

1) durch Addition je zweier nebeneinanderstehenden Posten jedesmal:

$$2r = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_0)$$

oder:

$$4r = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_0.$$

von ABC der Kreis der neun Punkte, seine Schnittpunkte mit den genannten Seiten bezw. obern Höhenschnitten sind deren Mittelpunkte. Da aber jede dieser Strecken Zentralstrecke ist, so halbiert der Umkreis eines Dreiecks die sämtlichen sechs Zentralstrecken seiner In- und Ankreise.

2) Zieht man zur einen der drei Dreiecksseiten die Berührungsradien: ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so stehen alle senkrecht auf der Seite ebenso wie die Höhe und die Mittelsenkrechte, so dass man sechs parallele Linien erhält. Diese bilden Trapeze, nämlich das Trapez $M_1 M_2 F_2 F_1$ und das überschlagene $M_0 M_3 F_3 F_0$. Darin ist G und L Seitenmitte und ebenso R wegen der Gleichheit der Tangentenabschnitte $AF_2 = BF_1$ und $AF_3 = BF_0$. Daher ist nach dem Satze 75 des III. Teiles über das Trapez die Gerade GL die Mittelparallele beider Trapeze, und auf derselben ist $OR = n_3$ die mittelsenkrechte Strecke der Seite c, und

$$OG = OL = r.$$

Also wird:

$$RL = r + n_3 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2},$$

$$RG = r - n_3 = \frac{\varrho_3 - \varrho_0}{2}:$$

Der Umkreis des Dreiecks bildet auf einer Mittelsenkrechten einer Seite zwei Abschnitte, deren einer gleich der halben Differenz der Radien des zugehörigen An- und Inkreises ist, deren anderer gleich der halben Summe der Radien der Ankreise der andern Seiten.

3) Durch Zusammenfassung der für $r \pm n$ erhaltenen Ausdrücke entsteht (siehe Erkl. 389):

$$4r + \varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3.$$

Und dieselbe Summe auch gleich:

$$3r + n_1 + n_2 + n_3,$$

also:

$$n_1 + n_2 + n_3 = r + \varrho_0.$$

Also ist die Summe der Radien der drei Ankreise gleich dem vierfachen Radius des Umkreises

2) Durch Subtraktion je zweier nebeneinanderstehenden Posten erhält man:

$$2n_1 = \frac{\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3}{2}$$

und ähnlich $2n_2$, $2n_3$, also ohne Brüche:

$$4n_1 = \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3,$$
$$4n_2 = \varrho_0 + \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3,$$
$$4n_3 = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3.$$

3) Hieraus oder durch Addition bezw. Subtraktion zweier übereinanderstehenden Posten oben erhält man:

$$n_1 + n_2 = \frac{\varrho_0 + \varrho_3}{2}, \quad n_1 - n_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2},$$

$$n_2 + n_3 = \frac{\varrho_0 + \varrho_1}{2}, \quad n_2 - n_3 = \frac{\varrho_3 - \varrho_2}{2},$$

$$n_3 + n_1 = \frac{\varrho_0 + \varrho_2}{2}, \quad n_3 - n_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{2}.$$

4) Addiert man alle drei übereinanderstehenden Posten oben, so kommt:

$$3r + (n_1 + n_2 + n_3) = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3,$$

$$3r - (n_1 + n_2 + n_3) = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - 3\varrho_0).$$

Hieraus bestimmt sich wieder wie oben:

$$6r = \frac{3}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_0),$$

woraus wieder:

$$4r + \varrho_0 = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3.$$

Und durch Subtraktion:

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{1}{4}(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + 3\varrho_0),$$

was gleichkommt:

$$\frac{1}{4}(4r + \varrho_0 + 3\varrho_0),$$

also gleich $r + \varrho_0$.

Erkl. 390. Ebenso wie G und L werden auch die Schnittpunkte der Halbierungslinien M_0M_1 und M_2M_3 bezw. M_0M_2 und M_3M_1 mit dem Umkreise zu Mittelpunkten von Kreisen, deren erster jeweils die Schenkel von α bezw. β berührt und zum Radius hat:

$$\frac{\varrho_0 + \varrho_1}{2} \text{ bezw. } \frac{\varrho_0 + \varrho_2}{2}.$$

Der zweite Kreis berührt ebenfalls jeweils die Schenkel der Winkel α und β, und hat zum Radius:

$$\frac{\varrho_3 - \varrho_2}{2} \text{ bezw. } \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{2}.$$

Ihre Schnittpunkte mit der Mittelsenkrechten bilden jeweils die vierten Ecken je eines Rechtecks mit Ecken im Seitenmittelpunkt, Mittelpunkt ihres In- und Ankreises, und Berührungspunkten desselben.

plus dem Radius des Inkreises, und die Summe der drei Mittelsenkrechten vom Zentrum der Ecken zu den Seiten ist gleich der Summe der Radien des Um- und Inkreises.

4) Verlängert man ferner M_3F_3 bis zum Schnitt mit einer durch M_0 gezogenen Parallelen zu AB, so wird $M_0K = KJ$, also im Dreieck M_0JM_3 die Seite:

$$M_3J = \varrho_0 + \varrho_3 \text{ und } GK = \frac{\varrho_0 + \varrho_3}{2}.$$

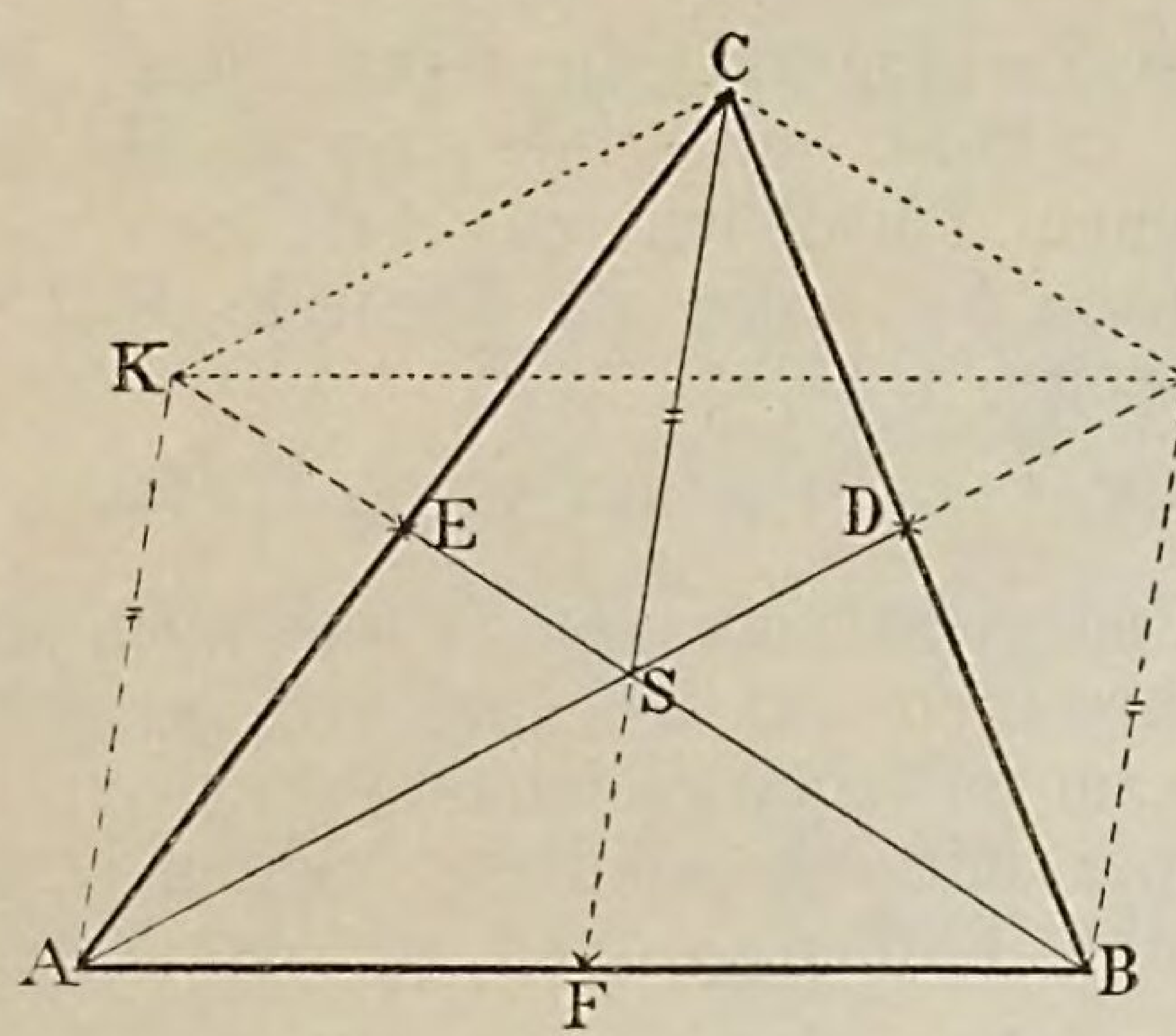
Und zieht man von G aus auch die Senkrechten auf AC und CB, so wird jede zur mittelparallelen Strecke in einem Trapez mit den zu diesen Seiten senkrechten Radien ϱ_0 und ϱ_3 als Gegenseiten, also jede ebenfalls gleich $\frac{\varrho_0 + \varrho_3}{2}$. Daher ist G Mittelpunkt eines Kreises, welcher (durch K geht,) die Schenkel von γ berührt und zum Radius hat: $\frac{\varrho_0 + \varrho_3}{2}$.

5) Zieht man auch vom Punkte L eine Senkrechte auf AC und BC, und ebenso die auf diesen Seiten senkrechten Radien von M_1 und M_2, so wird die Senkrechte von L die mittelparallele Strecke eines überschlagenen Trapezes, also $= \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2}$. Also ist L Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Schenkel von γ berührt und zum Radius hat: $\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2}$. Seine Schnittpunkte mit OL sind vierte Ecken je eines Rechtecks mit Seiten LRF_1M_1 bezw. LRF_2M_2.

4) Ueber den Schwerpunkt eines Dreiecks.

Frage 163. Was versteht man unter dem Schwerpunkt eines Dreiecks?

Figur 162.



Erkl. 391. Der nebenstehende Beweis für den Schwerpunkt ist entsprechend demjenigen für die andern besondern Punkte geführt. Zwei der Linien werden zuerst gezogen, der Schnittpunkt dieser zwei ersten Linien wird mit der dritten Ecke verbunden, und von dieser Verbindungslinie wird nachgewiesen, dass sie die Eigenschaft der ersten Linien besitzt in Bezug auf die dritte Seite.

Ein anderer Beweis für das Vorhandensein des Schwerpunkts wird bei der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke geführt werden im nächsten Teile dieses Lehrbuches.

Erkl. 392. Auch bei den Mittellinien, ebenso wie bei Höhen, nennt man obern Abschnitt den von der Ecke, untern Abschnitt den von dem Seitenschnittpunkte zum gemeinsamen Schnittpunkte führenden Abschnitt.

Statt zu sagen, der obere Abschnitt sei doppelt so gross als der untere, sagt man oft auch: der obere verhalte sich zum untern wie 2 zu 1, oder man sagt: der Schwerpunkt teile jede Mittellinie im Verhältnis 2 zu 1.

Erkl. 393. Die Bezeichnung der Mittellinien als Schwerlinien und ihres Schnittpunktes als Schwerpunkt des Dreiecks hat seinen Grund in physikalischen Beziehungen über das Gesetz der Schwere. Würde nämlich ein Dreieck längs einer seiner Mittellinien unterstützt, z. B. durch Unterlegen eines Lineals, oder eines Fadens, so halten sich die beiderseitigen Hälften des Dreiecks das Gleichgewicht und halten das Dreieck in der Schwebe. Wird aber ein Dreieck unterstützt unter dem Schnittpunkt zweier Mittellinien, z. B. durch Unterhalten eines Fingers oder einer Nadelspitze, so halten sich die ringsherumliegenden Teile des Dreiecks gegenseitig das Gleichgewicht, das Dreieck bleibt wieder in der

Antwort. Unter dem Schwerpunkt eines Dreiecks versteht man den gemeinsamen Schnittpunkt seiner drei Mittellinien. Diese letzteren heissen daher auch Schwerlinien.

1) Das Vorhandensein dieses gemeinschaftlichen Schnittpunktes kann wie folgt bewiesen werden:

Zieht man in einem beliebigen Dreieck zunächst zwei beliebige Mittellinien AD und BE, und verlängert jede derselben über ihren Seitenmittelpunkt um eine Strecke gleich der Strecke bis zum Schnittpunkt S, so entstehen die Streckenpaare:

$$DB = DC \text{ und } DS = DJ$$

sowie:

$$EA = EC \text{ und } ES = EK.$$

Folglich liefern die Endpunkte B, C und S, J sowie A, C und S, K je ein Parallelogramm $CSBJ$ und $CSAK$. Zieht man also die Verbindungslinie CS, so wird sie Gegenseite zu BJ im einen, zu AK im andern Parallelogramm, und es wird:

$$BJ \# CS \# AK.$$

Da hiernach auch $BJ \# AK$ ist, so liefern die vier Punkte $KABJ$ wieder ein Parallelogramm mit Diagonalen AJ und BK, also Diagonalenschnittpunkt S. Demnach wird die Linie CS Mittelparallele der Geraden AK und BJ, und schneidet als solche nicht nur AJ und BK im Mittelpunkte, sondern auch AB. Daher ist die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Schnittpunkt der beiden andern Mittellinien die Mittellinie der dritten Seite.

2) Wegen der Parallelogramme $ABJK$ und $SBJC$ ist $SA = SJ$ und

$$SD = DJ = \frac{SJ}{2} = \frac{SA}{2},$$

und ebenso auch die andern:

$$SE = \frac{SK}{2} = \frac{SB}{2},$$

Schwebe. Daher kann man sich vorstellen, dass die Wirkung des Eigengewichts des Dreiecks oder die Anziehung der Schwerkraft nach der Erde hin jeweils in einer jener Mittellinien oder zuletzt in diesem ihrem einzigen Schnittpunkte vereinigt sei; und auf Grund dieser Vorstellung heisst dann jede Mittellinie eine Schwerlinie und der Schnittpunkt derselben Schwerpunkt.

also ebenso auch:

$$SF = \frac{SC}{2},$$

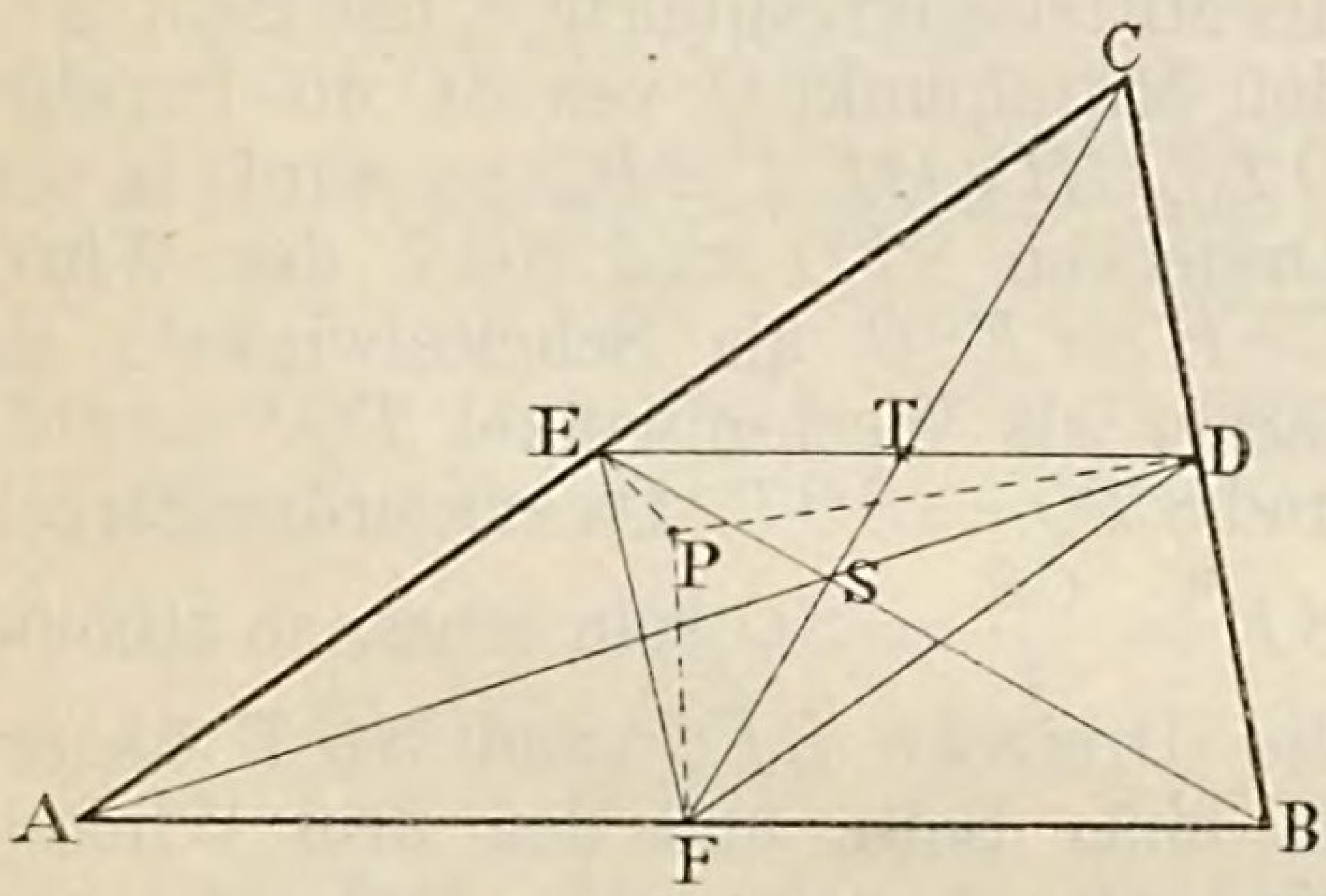
oder:

$$AS = 2 \cdot SD, \quad BS = 2 \cdot SE, \quad CS = 2 \cdot SF.$$

Also ist auch der obere Abschnitt jeder Mittellinie (vom Schwerpunkt aus zur Ecke) doppelt so gross als der untere (vom Schwerpunkt zum Seitenmittelpunkte).

Frage 164. Welche Beziehungen der Höhen- und Mittellinien müssen nach Antwort 175, 1 für ein Dreieck und das seiner Seitenmittelpunkte bestehen?

Figur 163.



Erkl. 394. Da zwischen dem Schnittpunkte T und dem Punkte F in Figur 163 eine Hälfte von der ganzen Mittellinie CF liegt und zwischen S und F ein Drittel, so beträgt die Strecke $ST = TF - SF = \frac{CF}{2} - \frac{CF}{3} = \frac{CF}{6}$, also ein Sechstel der Mittellinie CF des grossen Dreiecks und ein Drittel von TF, der Mittellinie des kleinen Dreiecks — entsprechend dem Umstande, das S zugleich Schwerpunkt und TS unterer Abschnitt dieser Schwerlinie des kleinen Dreiecks DEF ist. Man findet also die Erweiterung des Satzes 76 im III. Teile dieses Lehrbuches, dass nicht nur die Seiten des Dreiecks der Seitenmitte, sondern auch seine Schwerlinien, sowie einzeln deren obere und untere Abschnitte jeweils die Hälfte der entsprechenden Stücke des grossen Dreiecks betragen.

Erkl. 395. Zeichnet man zu einem Dreieck in fortlaufender Reihenfolge nach innen und aussen jeweils die Dreiecke der Seitenmitten und der Parallelen zu den Gegenseiten, so entsteht Figur 293 des III. Teiles, in welcher jedes beliebige Dreieck als Ausgangsdreieck angenommen werden kann. Darin ist dann nach nebenstehender Antwort jede Mittellinie

Antwort. 1) Nach Antwort 157 ist in dem Dreieck DEF der Seitenmitten von ABC jede Seite parallel zur Gegenseite des grossen Dreiecks, also jede Senkrechte auf der einen von beiden, auch senkrecht auf der andern. Für das Dreieck ABC sind also die Senkrechten in den Seitenmitten DEF die Mittelsenkrechten, P ist Zentrum der Ecken; für das Dreieck DEF aber sind dieselben Linien die Senkrechten von den Eckpunkten auf die Gegenseiten, also die Höhen, und P ist Höhenpunkt. Daher ist das Zentrum der Ecken des Dreiecks der Höhenpunkt seines Seitenmittendreiecks und umgekehrt ist der Höhenpunkt eines Dreiecks das Zentrum der Ecken des Dreiecks der Parallelen zu seinen Seiten durch die Gegenecken.

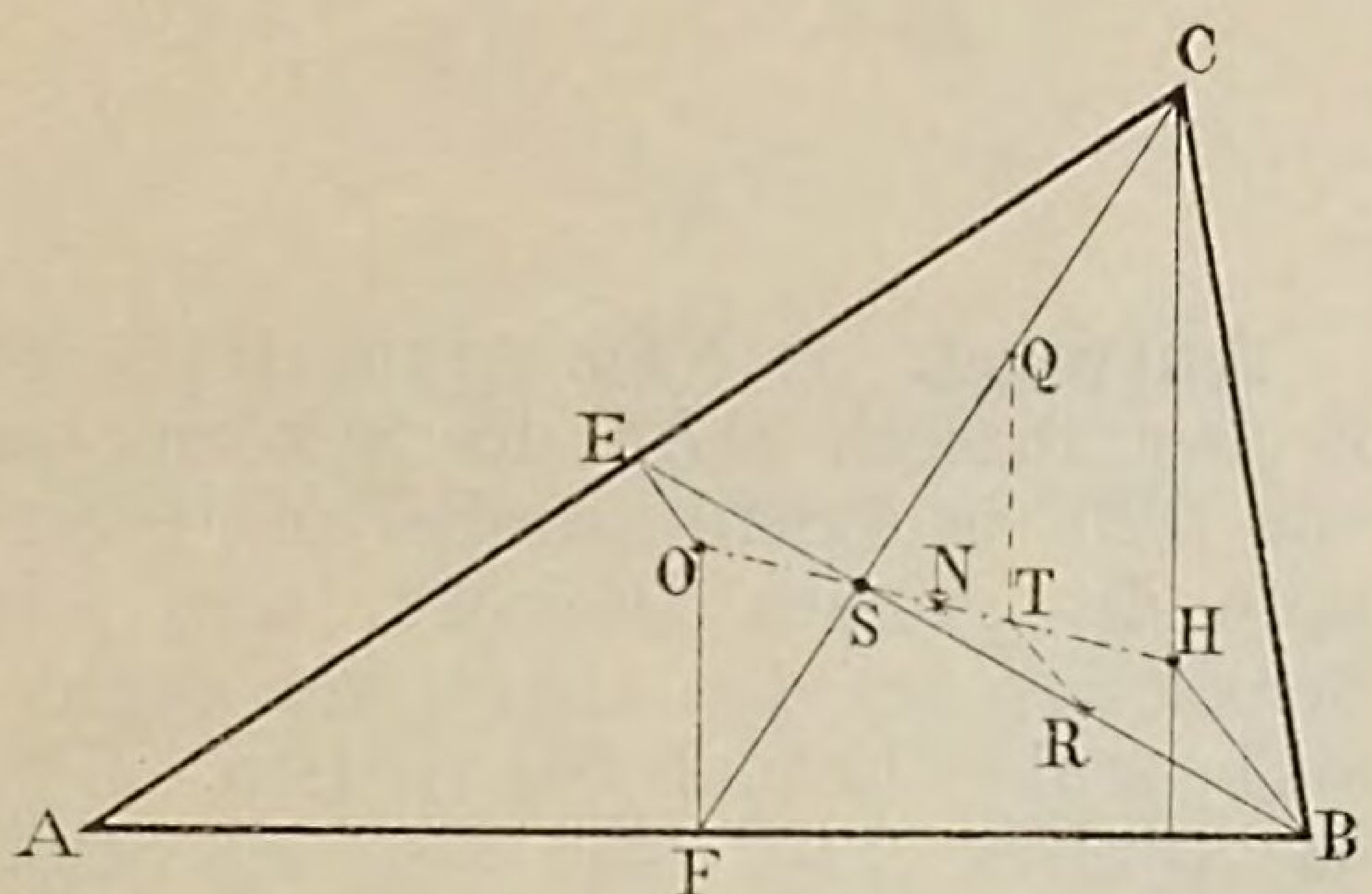
2) Da die Seiten des Dreiecks DEF der Seitenmitten Parallelogramme bilden mit den Seitenhälften des ursprünglichen Dreiecks ABC, so sind je eine Mittellinie und eine Verbindungsstrecke der zwei andern Seitenmitten die Diagonalen eines solchen Parallelogramms, und halbieren einander im Schnittpunkte. Daher geht jede Mittellinie auch durch Seitenmitte und Gegenecke des Dreiecks der Seitenmitten; und man kann aussagen: Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks und die Mittellinie der dritten halbieren einander; jede Mittellinie

eines einzigen der Dreiecke auch Mittellinie aller übrigen und der Schwerpunkt ist sämtlichen Dreiecken der ganzen Reihe gemeinsam.

eines Dreiecks ist auch Mittellinie des Dreiecks der Seitenmitten, und der Schwerpunkt ist beiden Dreiecken gemeinsam.

Frage 165. Welche Beziehung besteht zwischen Höhenpunkt, Schwerpunkt und Eckenzentrum eines Dreiecks?

Figur 164.



Erkl. 396. Der Gang des nebenstehenden Beweises ist derselbe, wie derjenige mehrfacher früherer Beweise [z. B. in Antwort 161, 4]: Um zu beweisen, dass mehrere Linien durch denselben Schnittpunkt gehen, wird nachgewiesen, dass auf einer bestimmt gegebenen von ihnen der Schnittpunkt mit der ersten der übrigen derselbe Punkt dieser gegebenen Linie sein muss, in welchem sie auch von einer zweiten oder dritten geschnitten wird. Demnach schneiden sich diese letzteren Linien in einem auf der gegebenen liegenden Punkt, oder diese gegebene geht durch denselben Schnittpunkt, in welchem sich die übrigen Linien treffen.

Erkl. 397. Aus der Kongruenz der Dreiecke SOF und STQ bezw. SOE und STR folgt nicht nur, dass:

$$SO = ST = \frac{SH}{2},$$

sondern auch dass:

$$OF = TQ = \frac{CH}{2},$$

und dass:

$$OE = TR = \frac{BH}{2}$$

ist. Man erhält also auf diesem Wege einen dritten Beweis für die bereits in den Antworten 160, 4 und 161, 5 aufgefundene Beziehung, dass jeder obere Höhenabschnitt doppelt so gross ist, als die zugehörige Mittelsenkrechte.

Erkl. 398. Ausgehend von dem Ergebnis der vorigen Erkl. 397 findet man sodann durch

Antwort. Zieht man in einem Dreieck ABC (siehe Figur 164) zu zwei Seiten AB nnd AC die Höhen CH und BH, die Mittellinien CSF und BSE und die Mittelsenkrechten FO und EO, so lässt sich nachweisen, dass die Verbindungsstrecke HS in ihrer Verlängerung durch O geht.

1) Bezeichnet man nämlich mit O zunächst bloss den Schnittpunkt von HS mit der Mittelsenkrechten in F, und zieht durch den Mittelpunkt Q von SC die Parallele $QT \parallel CH \parallel OF \perp AB$, so wird in den Dreiecken SFO und SQT der Winkel $CSH = FSO$ als Scheitelwinkel, und ferner als Wechselwinkel $TQS = OFS$ und $STQ = SOF$. Da ausserdem Strecke $SF = \frac{CS}{2} = SQ$ sein muss, so stimmen die Dreiecke SFO und SQT überein in einer Seite und den drei Winkeln, sind also kongruent. Daher ist auch $SO = ST$. Wegen der Parallelen QT durch den Mittelpunkt Q der Seite SC des Dreiecks SCH ist aber auch T Mittelpunkt von SH, also:

$$ST = TH = SO = \frac{SH}{2}.$$

Also ist der Schnittpunkt O der Mittelsenkrechten in F mit der Verbindungslinie HS derjenige Punkt, welcher um die Hälfte von HS über S hinausliegt.

2) Bezeichnet man nunmehr mit O nicht mehr den Schnittpunkt von HS mit der Mittelsenkrechten in F, sondern mit jener in E, so entstehen die Dreiecke SEO und SRT, welche wieder kongruent werden wegen Gleichheit der Winkel und der Seite $SE = SR = \frac{SB}{2}$. Also ist auch der Schnittpunkt O der Mittelsenkrechten in E mit der Verbindungslinie HS derjenige Punkt,

Verbindung der Punkte OC und Zeichnung einer Parallelen hiezu durch den Punkt F die Gleichheit der Verbindungslinie einer Seitenmitte nach dem Mittelpunkt des zugehörigen obern Höhenabschnittes und der Strecke $OC = OA = OB$, also dem Radius des Umkreises, und ebenso die übrigen Aussagen der Antworten 160 und 161.

Erkl. 399. Da der Schnittpunkt der Strecke OH mit einer jeden Verbindungslinie einer Seitenmitte mit dem Mittelpunkt des zugehörigen Höhenabschnitts der Mittelpunkt von OH sein muss, so liegt auch der Mittelpunkt des Neunpunktekreises auf der Linie OH, er ist nämlich der Mittelpunkt N der Strecke OH, also auch der Strecke ST. Demnach liegen auf einer Geraden die vier Punkte O, S, N, H, und zwar so, dass SN die kleinste Strecke ist, nämlich:

$$NS = \frac{1}{2} \cdot OS = \frac{1}{3} NH = \frac{1}{6} OH,$$

also entsprechend:

$$OS = 2 \cdot NS = \frac{1}{2} \cdot SH,$$

und

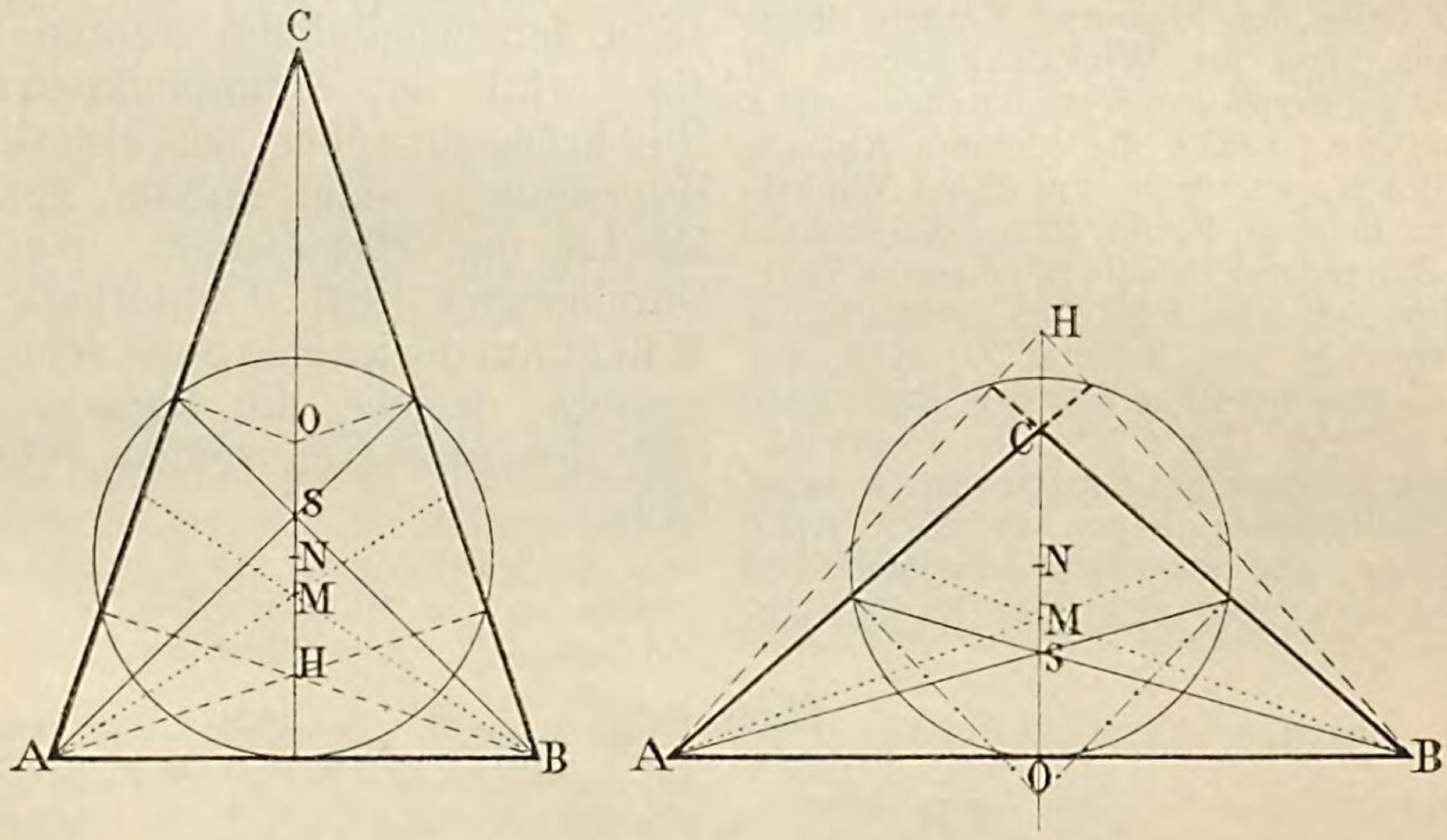
$$OH = 6 \cdot NS = 3 \cdot OS = 2 \cdot NH = \frac{3}{2} SH.$$

welcher um die Hälfte von HS über S hinaus liegt.

Folglich schneidet die Mittelsenkrechte in F und jene in E im gleichen Punkte, d. h. die Linie HS geht durch den Schnittpunkt der beiden, also aller drei Mittelsenkrechten des Dreiecks. Man erhält also die Aussage:

Höhenpunkt, Schwerpunkt und Eckenzentrum eines Dreiecks liegen in gerader Linie, und zwar so, dass der Abstand vom Schwerpunkt zum Höhenpunkt doppelt so gross ist, als der zum Mittelpunkt des Umkreises.

Figur 165.



Frage 166. Welche Lage nehmen die merkwürdigen Punkte ein in den besonderen Arten von Dreiecken?

Erkl. 400. Wenn ein Dreieck eine Symmetrieachse besitzt, so muss eine zu einem der symmetrischen Winkel oder Seiten gehörige Linie symmetrisch sein zu der entsprechenden Linie des symmetrischen Winkels oder Seite, also müssen die beiden einander auf einem Achsenpunkte treffen. Dass bei stumpfem Winkel O unter, H über S liegt, rührt daher, dass eine

Antwort. 1) Wenn ein Dreieck eine Symmetrieachse besitzt, so liegen alle seine merkwürdigen Punkte auf dieser Linie. Daher liegen die Punkte O, M, H, S, N im gleichschenkligen Dreieck sämtlich auf der Achse, da diese für die Grundseite und Spitze gleichzeitig Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Höhe und Mittellinie ist. Und

Mittelsenkrechte stets senkrecht im Seitenmittelpunkt steht, die Mittellinie aber einen spitzen Winkel bildet nach derjenigen Seite des Seitenmittelpunktes hin, welcher die kleinere Seite oder der grössere Winkel anliegt. Hat der Winkel am Scheitel 60⁰, so sind beiderseits des Schenkels gleiche Winkel; Mittelsenkrechte und Mittellinie fallen zusammen. Wird der Winkel am Scheitel grösser oder kleiner als 60⁰, so weicht die Mittellinie ab nach oben oder nach unten.

Erkl. 401. Dass *M* beim gleichschenkligen Dreieck zwischen *H* und *S* liegt, folgt daraus, dass die Winkelhalbierende die Gegenseite in zwei Teile teilt, deren grösserer an der grösseren Seite liegt (vergl. Erkl. 362), also muss die Winkelhalbierende selbst nach derjenigen Seite der Mittellinie hin liegen, welche die kleinere Seite hat, also den grösseren Winkel. Nach derselben Seite hin liegt aber nach Erkl. 400 auch die Höhe; diese bildet aber nach der Seitenmitte hin einen rechten Winkel, dagegen die Winkelhalbierende einen stumpfen; also muss der Schnittpunkt der letztern zwischen dem Höhenfusspunkt und der Seitenmitte liegen, sie selbst zwischen Mittellinie und Höhe, ihr Schnittpunkt *M* zwischen *H* und *S*.

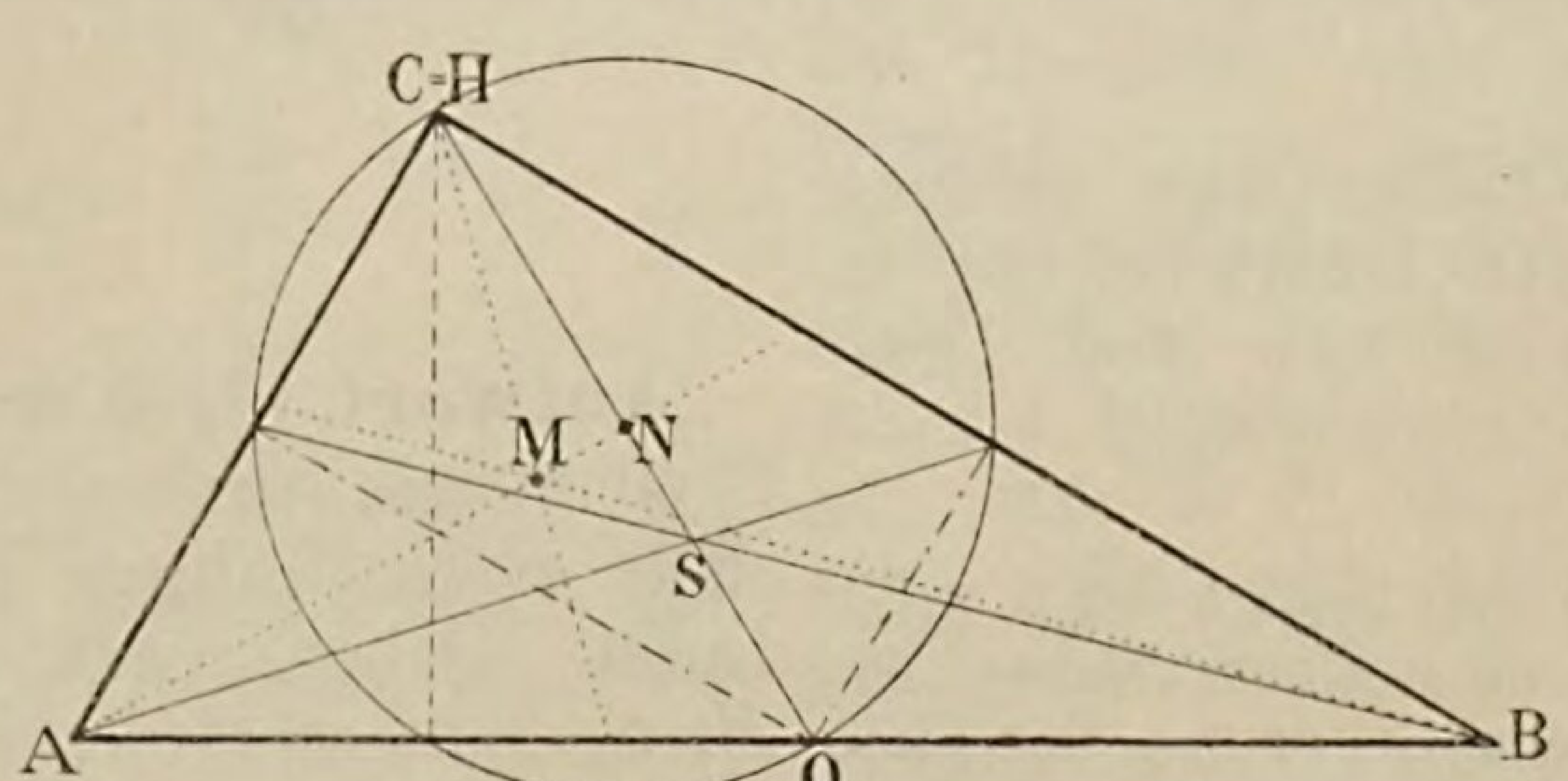
Erkl. 402. Dass im rechtwinkligen Dreieck *M* auf der Seite der kleineren Kathete liegt, folgt daraus, dass die Winkelhalbierende an dem Scheitel auf derjenigen Seite der zugehörigen Mittellinie liegt, welche die kleinere Kathete hat. Folglich muss auch der auf dieser Winkelhalbierenden liegende Punkt *M* auf dieser Seite liegen. — Ein anderer Beweis für dieselbe Thatsache ergibt sich aus Erkl. 385, wonach die Winkelhalbierende am Scheitel *C* auch den Winkel zwischen der Höhe und dem Radius des Umkreises halbiert. Da *CNSO* im rechtwinkligen Dreieck Radius des Umkreises ist, so muss die Winkelhalbierende liegen zwischen Höhe und Mittellinie, und zwar auf derselben Seite wie die Höhe, also gegen die kleinere Kathete hin.

zwar bleibt die Lage der Punkte *O* und *H* gegen *S* und *N* die nach Antwort 165 bedingte. Nun liegt, wenn der Winkel am Scheitel unter 60⁰ beträgt, *O* über *S* und *H*, wenn der Winkel aber über 60⁰ beträgt, *O* unter *S* und *H*. Der Punk *M* rückt so zwischen die anderen Punkte ein, dass er stets zwischen *H* und *S*, und zwar unter denselben Bedingungen wie zuvor, unterhalb oder oberhalb *S* liegt. Von den neun Punkten des Feuerbachschen Kreises fallen zwei auf den Mittelpunkt der Grundseite, derselbe berührt die Grundseite.

2) Im gleichseitigen Dreieck ist jede der drei Symmetrieachsen gleichzeitig Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Höhe, Mittellinie, folglich fallen sämtliche Punkte *OMHSN* in deren gemeinsamen Schnittpunkt, den Mittelpunkt der Gesamtfigur. Der Neunpunktekreis fällt mit dem Inkreis zusammen.

3) Beim rechtwinkligen Dreieck fällt *O* in den Mittelpunkt der Hypotenuse, *H* in den Scheitel des rechten Winkels, also wird der Neunpunktekreis zum Halbkreispaar über der Mittellinie der Hypotenuse, sein Radius gleich dem Viertel der Hypotenuse. Auf seinem Durchmesser liegt *S* unterhalb *N*, und *M* liegt auf derjenigen Seite seines Durchmessers, welche die kleinere Kathete oder den grösseren spitzen Winkel enthält.

Figur 166.



Aufgaben-Sammlung.

1) Aufgaben über die Abstände von Kreispunkten unter sich und von einer Geraden.

(Zu Abschnitt A 1.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll auf einer gegebenen Kreislinie zwei Punkte angeben, so dass von den beiden durch sie bestimmten Kreisbogen der eine das 5-fache, 3-fache, 2-fache des andern wird.

Erkl. 403. Ein Mittelpunktswinkel von 60^0 wird erhalten durch ein beliebiges gleichseitiges Dreieck, welches eine Ecke im Kreismittelpunkte hat; ein Winkel von 120^0 entsteht durch Verdoppelung eines solchen.

Erkl. 404. Damit der eine Bogen das 4-fache, 6-fache u. s. w. des andern würde, wäre eine Konstruktion der Winkel von $\frac{360}{5} = 72^0$, $\frac{360^0}{7}$ u. s. w. nötig, welche mit den bisherigen Mitteln nicht ausführbar ist.

Auflösung. Man zeichne einen Mittelpunktswinkel von 60^0, 90^0, 120^0; dann schneiden die Winkelschenkel auf der Peripherie je zwei Punkte aus, deren zugehörige Kreisbogen 60, 90, 120 Bogengrade haben. Die andern Bogen haben also:

$$360 - 60 = 300 = 5 \cdot 60^0,$$
$$360 - 90 = 270 = 3 \cdot 90^0,$$
$$360 - 120 = 240 = 2 \cdot 120^0,$$

also das 5-fache, 3-fache, 2-fache des zugehörigen kleineren Ergänzungsbogens.

Aufgabe 2. Man soll auf einer gegebenen Kreislinie zwei Punkte angeben, so dass die beiden durch sie bestimmten Bogen sich verhalten wie $m:n$.

Erkl. 405. Man sagt, zwei Bogen verhalten sich wie die Zahlen m und n, wenn ein und dasselbe kleine Bogenstück als Masseinheit in dem einen Bogen m mal, im andern n mal enthalten ist. Die Aufgabe 1 ist ein besonderer Fall dieser Teilung, indem $m = 1$ gesetzt ist.

Erkl. 406. Eine Auflösung dieser Aufgabe im allgemeinen Falle kommt darauf hinaus, die 360 Bogengrade der Kreisperipherie oder die 360 Winkelgrade des Vollwinkels am Mittelpunkt in $m + n$ gleiche Teile zu teilen. Man vergleiche hierüber Erkl. 233.

Auflösung. Man zeichne einen Mittelpunktswinkel von $\frac{m}{m+n} \cdot 360^0$ bezw. von $\frac{n}{m+n} \cdot 360^0$: dann ergeben die Schnittpunkte der Winkelschenkel auf der Peripherie je zwei Punkte, deren Bogen $\frac{m}{m+n} \cdot 360$ bezw. $\frac{n}{m+n} \cdot 360$ Bogengrade besitzen.

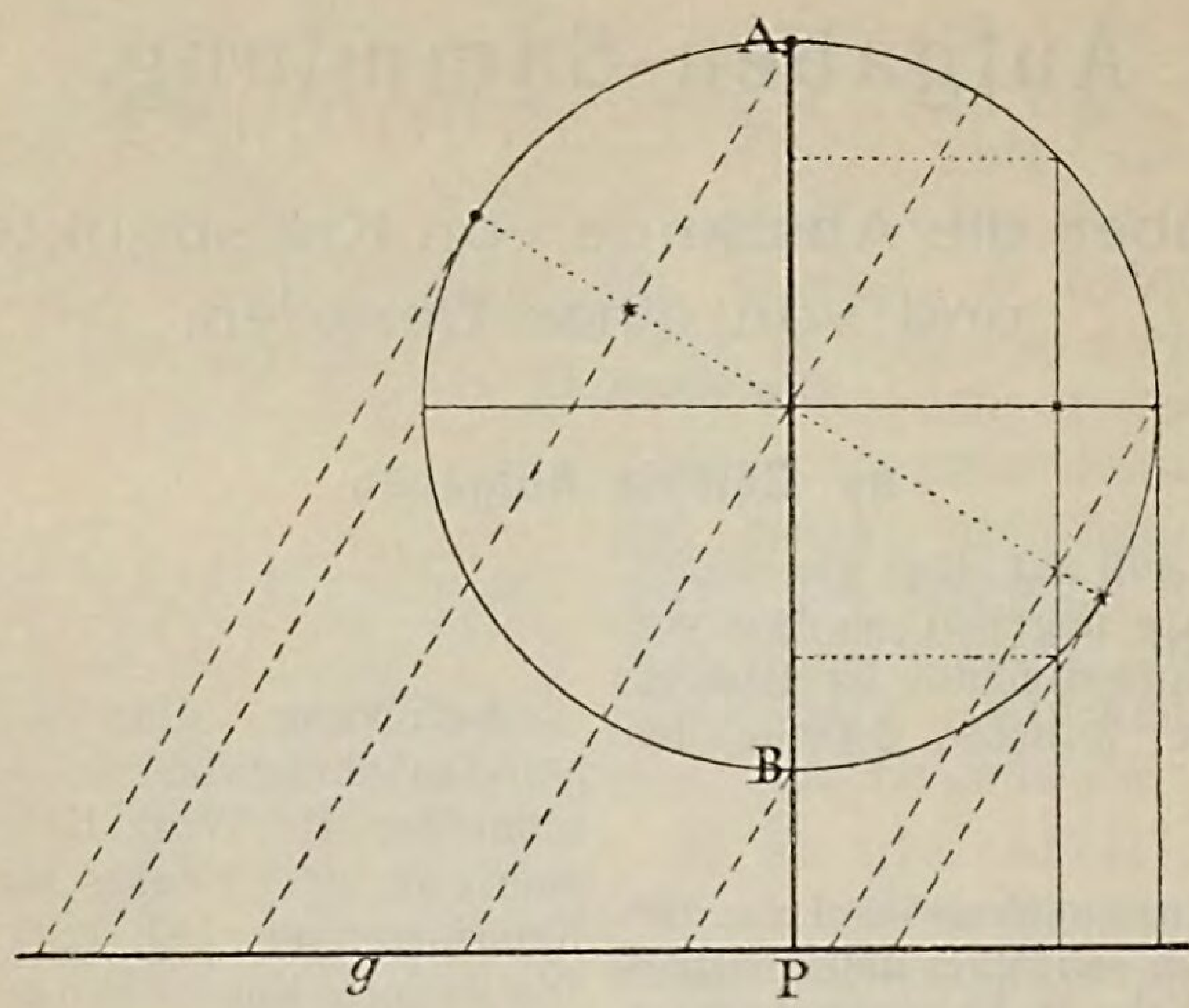
Oder: Man teile die Kreisperipherie in $m + n$ gleiche Teile, und wähle als Teilpunkte zwei solche, welche m bezw. n solche Teile zwischen sich haben. Dann hat jeder Bogen $\frac{m}{m+n} \cdot 360$ bezw. $\frac{n}{m+n} \cdot 360$ Bogengrade. Und es ist:

$$\frac{360\,m}{m+n} : \frac{360\,n}{m+n} = m:n.$$

Aufgabe 3. Man soll die Abstände zwischen den Punkten einer Kreislinie und einer gegebenen Geraden untersuchen.

Auflösung. Um die Abstände zwischen den Punkten eines Kreises einerseits und einer geraden Linie anderseits zu untersuchen,

Figur 167.



fällt man die Senkrechten auf diese Gerade aus den Kreispunkten. Dann ist für den Kreis und die Gerade derjenige Durchmesser Symmetrieachse, welcher auf der gegebenen Geraden senkrecht steht. Man erhält also beiderseits dieser Achse je zwei gleiche parallele Abstandsstrecken, deren jede durch Parallelverschiebung auf ein S t ü c k der Achse zu liegen kommt. Bei dieser Verschiebung durchläuft jeder Endpunkt eine Kreissehne, schneidet also den Durchmesser innerhalb des Kreises. Folglich ist die Strecke AP in Figur 167 die längste, die Strecke BP die kürzeste von allen diesen Abständen.

Auf jeder Senkrechten finden sich zweierlei Abstände, ein längerer und ein kürzerer; bloss auf der Tangente am Kreise fallen beide Endpunkte zusammen in einen einzigen, den Berührungspunkt.

Erkl. 407. Zieht man in Figur 167 noch den zur Geraden g parallelen Durchmesser, so enthält derselbe die Mittelpunkte aller derjenigen Sehnen, welche den Unterschied der beiden Abstandsstrecken auf jeder Senkrechten darstellen. Der Abstand dieser Durchmesserpunkte von g ist also jeweils das Mittel aus den beiden Abständen der Schnittpunkte der Senkrechten. Da aber auf demselben Durchmesser auch die Berührungspunkte der Tangenten liegen, so ist der Abstand dieser Berührungspunkte von der Geraden g gleich dem Mittel aus j e z w e i solchen Abständen, welche auf einer und derselben Senkrechten zur gegebenen Geraden gelegen sind.

Aufgabe 4. Man soll beweisen, dass auch unter den in irgend einer schiefen Richtung gemessenen Strecken zwischen Kreispunkten und einer gegebenen Geraden g die längste und kürzeste von A und B ausgeht.

Auflösung. Zieht man von einem beliebigen Kreispunkte die senkrechte und die zur gegebenen Richtung parallele schiefe Strecke zur Geraden g, so erhält man jeweils ein rechtwinkliges Dreieck mit denselben Winkeln, in welchem die schiefe Strecke Hypotenuse ist, die senkrechte Kathete. Nach dem Satze in der Aufgabe 200 des III. Teils ist also in demjenigen Dreieck auch die H y p o t e n u s e die grössere, wo die K a t h e t e die grössere ist, und umgekehrt. Also ist auch die schiefe Strecke von A bezw. B ebenso die l ä n g t e bezw. k ü r z e s t e, weil

Erkl. 408. Auch bei den schiefen Strecken liegen auf jeder Sekante zwei verschiedene und deren Unterschied ist durch die Sehne dargestellt. Die Hälfte dieses Unterschiedes ist wieder im Mittelpunkt der Sehnen; und diese Mittelpunkte liegen sämtlich auf dem zur schiefen Richtung senkrechten Durchmesser. Folglich sind die schiefen Strecken von den Endpunkten des zu ihrer Richtung senkrechten Durchmessers besonders ausgezeichnet, weil auf ihnen je nur eine einzige schiefe Strecke entsteht. Aber das Mittel aus j e z w e i e n auf derselben schiefen

Strecke gelegenen Strecken sind wieder die beiden Strecken, welche ausgehen von den Eckpunkten des zur Geraden g parallelen Durchmessers; denn hier sind die Katheten der Dreiecke die mittleren, folglich auch die Hypotenusen die mittleren.

die senkrechte Strecke von denselben Punkten die längste bezw. kürzeste ist. Und es sind auch wieder die schiefen Strecken von je zwei solchen Kreispunkten aus einander gleich, welche symmetrisch liegen zu dem zu g senkrechten Durchmesser als Achse; denn für solche sind die Katheten der Dreiecke gleich, also auch die Hypotenusen.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 5. Auf einer Kreislinie zwei Punkte anzugeben, so dass von den durch sie bestimmten beiden Kreisbogen der eine ebenso gross, 7-mal, 11-mal so gross als der andere ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1 und geschieht durch fortgesetzte Teilung des Vollwinkels in Winkel von $\frac{360}{2} = 180^0$, $\frac{360}{8} = 45^0$, $\frac{360}{12} = 30^0$.

Aufgabe 6. Zwei Punkte einer Kreislinie zu suchen, durch welche der Umfang geteilt wird im Verhältnis 3 : 5 oder 5 : 7.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 2 und 5.

Aufgabe 7. Man soll die Aufgabe 3 durchführen für eine Gerade, welche den Kreis schneidet oder berührt.

Andeutung. Man vergleiche wieder die Längen und Richtungen des von den Kreispunkten auf die Gerade gefällten Senkrechten.

Aufgabe 8. Es sollen die Längen der Strecken untersucht werden, welche von den Punkten eines Kreises gegen eine beliebig gegebene Gerade unter 45^0 Neigungswinkel gezogen sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 4.

2) Aufgaben über Sehnen eines Kreises.

(Zu Abschnitt A 2, a.)

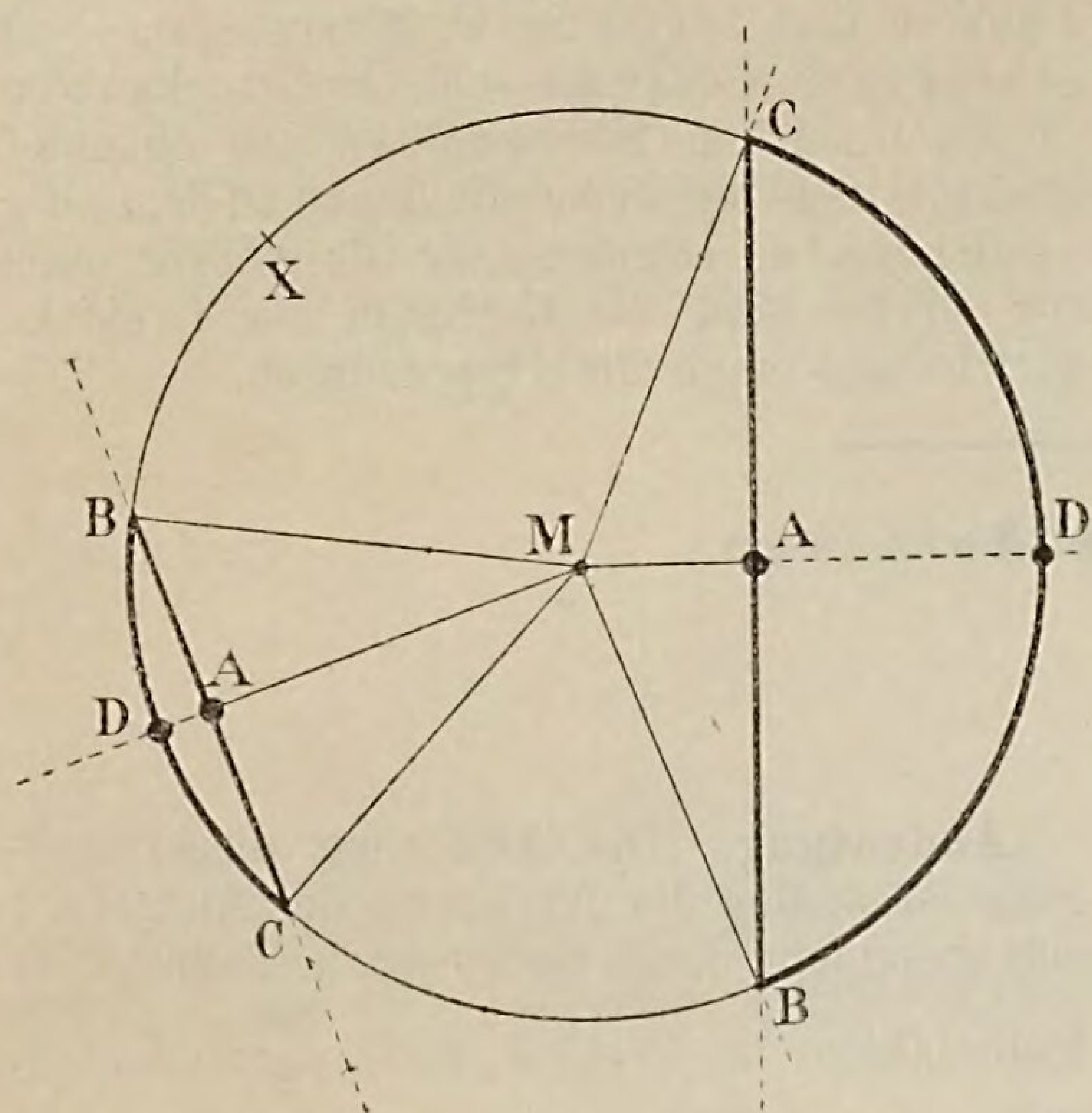
a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Man soll von einem gezeichnet vorliegenden Kreisbogen (oder Kreise), dessen Mittelpunkt nicht angezeichnet wurde, den Mittelpunkt suchen.

Erkl. 409. Es ist eine sehr empfehlenswerte Gewohnheit, den Mittelpunkt eines zu zeichnenden Kreises stets vor dem Einsetzen der Zirkelspitze durch einen Punkt oder ein kleines Kreuz zu bezeichnen.

Auflösung. Wenn der Mittelpunkt bekannt wäre (M in Figur 168), so wäre er der Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten DAM auf jede beliebige Sehne. Man zeichne also in den gegebenen Kreisbogen zwei beliebige Sehnen und errichte auf denselben die Mittelsenkrechten. Dann ist deren Schnittpunkt der

Figur 168.

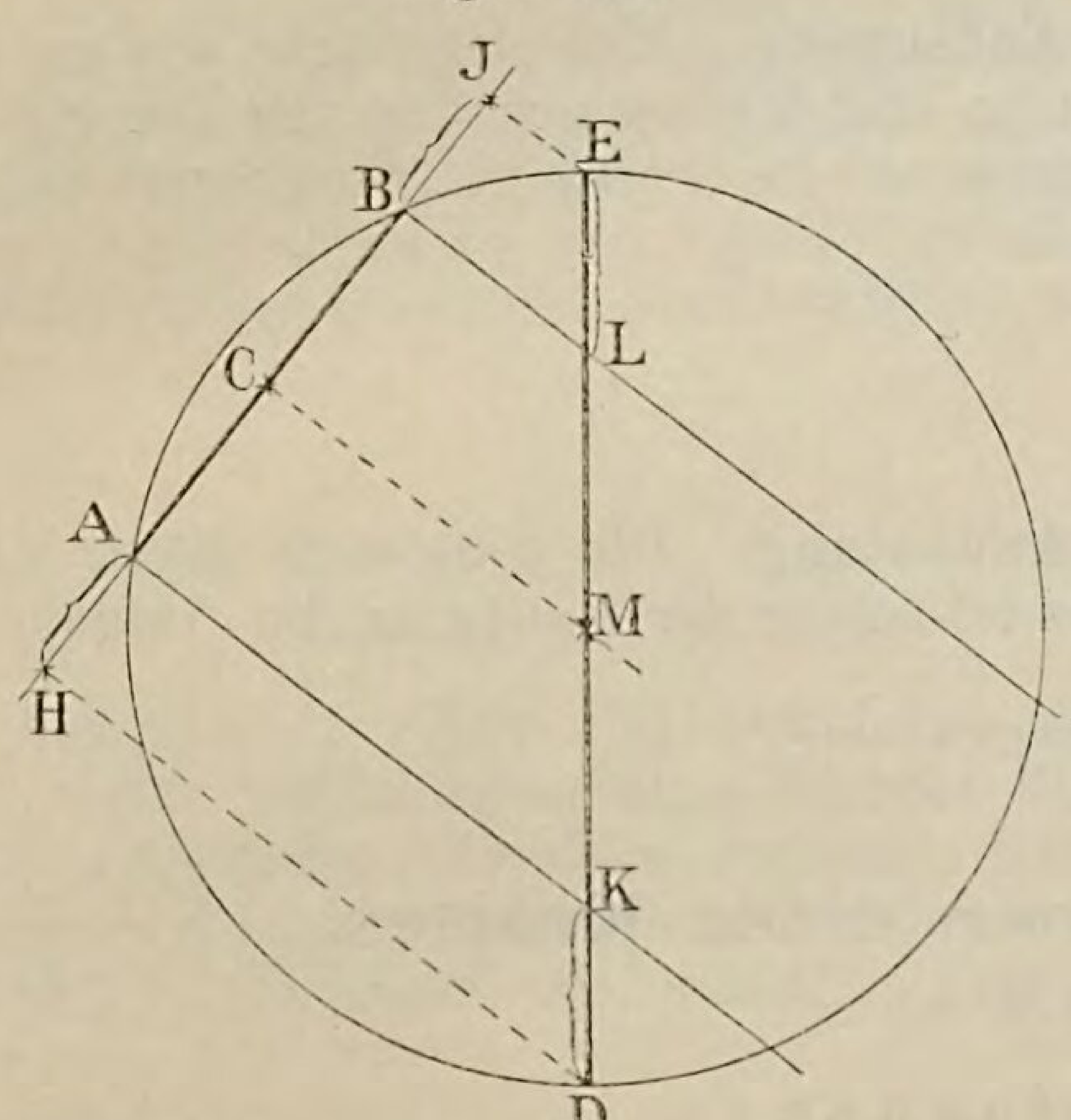


gesuchte. — Zur Ausführung der Konstruktion nach Aufgabe 170 des III. Teiles ist die wirkliche Auszeichnung der Sehnen nicht erforderlich.

Aufgabe 10. Man fälle von den Endpunkten eines Durchmessers senkrechte Linien auf eine beliebige Sehne und untersuche die dadurch auf der Sehne entstehenden Strecken.

Auflösung. Die beiden senkrechten Linien sind parallel unter sich und mit der durch den Kreismittelpunkt zu ziehenden Senkrechten auf die Sehne, als ihrer Mittelparallelen. Der Schnittpunkt der letzteren mit der Sehne ist also Mittelpunkt zwischen den Fusspunkten der andern Senkrechten und zugleich nach Satz 4 Mittelpunkt der beiden Kreisschnittpunkte. Folglich müssen auch die beiden S t r e c k e n z w i s c h e n d i e s e n K r e i s p u n k t e n u n d d e n F u s s p u n k t e n d e r S e n k r e c h t e n g l e i c h l a n g sein (s. Figur 169).

Figur 169.



Erkl. 410. In den zu Aufgaben 10 und 21 gehörigen Figur 169 ist MC Mittelparallele sowohl für $DH \parallel EJ$, als auch für $AK \parallel BL$, also C Mittelpunkt von AB und HJ, M Mittelpunkt von DE und KL. — Man beachte die Fortdauer der Gültigkeit der in Aufgaben 10 und 21 erhaltenen Sätze für eine Sehne, welche den Durchmesser innerhalb des Kreises oder auf der Peripherie selbst schneidet.

Aufgabe 11. Man soll beweisen, dass zwei Sehnen einander nicht halbieren können, ausser wenn beide Durchmesser sind.

Erkl. 411. Wenn überhaupt eine Sehne durch den Mittelpunkt einer andern geht, so liegen im kleineren Kreisabschnitt auch die kleineren Sehnenstücke und umgekehrt, also entstehen nur dann gleiche Strecken, wenn Halbkreise vorliegen.

Auflösung. Wenn zwei Sehnen einander je im Mittelpunkt schneiden, so muss die auf jeder derselben im Schnittpunkt errichtete Senkrechte durch den Kreismittelpunkt gehen. Das ist aber nur möglich, wenn der Fusspunkt beider Senkrechten, also der Schnittpunkt beider Sehnen Kreismittelpunkt ist.

Aufgabe 12. Man beweise, dass die Radien nach den Endpunkten einer Sehne auf jeder parallelen Sehne gleiche Strecken von deren Kreispunkten aus abschneiden.

Erkl. 412. Es sind gleichgross sowohl die Strecken zwischen Kreis und Radius beiderseits des Mittelpunktes, als auch die über den Mittelpunkt der Sehne hinausgreifenden Strecken zwischen Schnittpunkt einerseits und Kreispunkt anderseits der Achse. — Und der Satz gilt sowohl für solche parallele Sehnen, welche die Radien innerhalb des Kreises treffen, als auch solche, deren Schnittpunkte erst auf den Verlängerungen der Sehnen oder Radien auswärts oder einwärts gelegen sind.

Auflösung. Der zur Sehnenrichtung senkrechte Durchmesser ist Symmetrieachse für die beiden Radien und für die Kreisschnittpunkte jeder der parallelen Sehnen, als auch für die Schnittpunkte jedes Radius mit einer der Sehnen. Daher sind auch die Strecken zwischen je einem dieser Schnittpunkte und einem der Kreispunkte gleichgross.

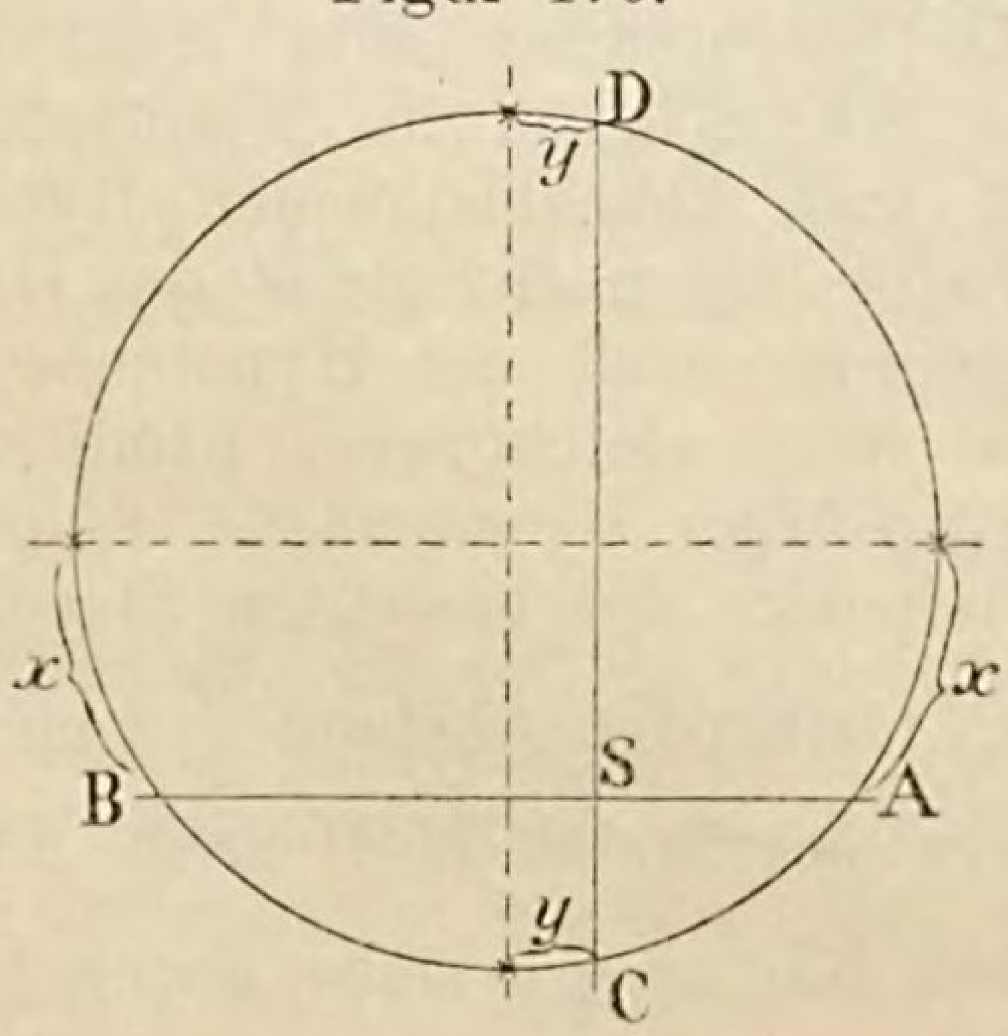
Aufgabe 13. Man zeichne zwei Sehnen, deren zweite mit dem durch ihren Schnittpunkt gehenden Durchmesser denselben Winkel bildet, wie die erste, und untersuche die entstehenden Sehnenstrecken und Kreisbogen.

Erkl. 413. Wie aus den Doppelfiguren 12 und 13 hervorgeht, behält der obige Satz seine Gültigkeit, ob der Schnittpunkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt. Und beide Fälle lassen sich gar nicht von einander trennen, indem die Figur des einen stets die Eigenschaften des andern Falles in sich vereinigt.

Auflösung. In den Figuren 12 und 13 sind sowohl ABQ mit CDQ und auch ACP mit BDP Sehnenpaare der verlangten Eigenschaft, und es ergibt sich aus der Symmetrie zum Durchmesser PQM die Gleichheit der Sehnen $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{AC} = \overline{BD}$, sowie der Bogen $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ und $\widehat{ADC} = \widehat{DAB}$.

Aufgabe 14. Man soll die durch zwei beliebige senkrechte Sehnen eines Kreises ausgeschnittenen Bogenstücke untersuchen.

Figur 170.



Auflösung. Um die Bogenstücke AD, DB, BC, CA zu untersuchen, ziehe man die zu den Sehnen AB und CD parallelen Durchmesser. Dadurch entstehen je zwei gleiche Bogenstücke x zwischen der Sehne AB und dem parallelen Durchmesser, y zwischen CD und dem Durchmesser. Und es ist ohne weiteres im positiven Umlaufe:

$$\frac{360^0}{4} = 90^0 = x + BC - y = y + CA + x$$
$$= AD - x + y = DB - y - x.$$

Folglich wird durch Addition des ersten und dritten Posten gleiches erhalten, wie durch Addition des zweiten und vierten, und es entsteht:

Erkl. 414. Das Ergebnis der nebenstehenden Auflösung lässt sich als Satz aussprechen in der Weise: Von den durch zwei senkrechte Kreissehnen ausgeschnittenen Bogen sind je zwei gegenüberliegende supplementär. Einen andern Beweis für denselben Satz findet man bei den Aufgaben über Sehnenwinkel.

$$180^0 = (x + BC - y) + (AD - x + y) = AD + BC$$

und ebenso:

$$180^0 = (y + CA + x) + (DB - y - x) = DB + CA.$$

Aufgabe 15. Man soll durch einen gegebenen Punkt im Kreise:

a) die kürzeste Sehne ziehen,

b) diejenige Sehne ziehen,

welche in diesem Punkte halbiert wird.

Auflösung. Da nach Satz 10 die kürzeste Sehne durch einen Punkt diejenige ist, welche auf dem Durchmesser dieses Punktes senkrecht steht, so ist die Auflösung dieser beiden Aufgaben dieselbe. Man ziehe nämlich durch den gegebenen Punkt den Durchmesser und errichte auf diesem im gegebenen Punkte die senkrechte Sehne.

Aufgabe 16. Man soll durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne von vorgeschriebener Länge ziehen.

Erkl. 415. Andere Auflösungen derselben Aufgabe 16 und verwandter Aufgaben lassen sich mittels der Sätze über die geometrischen Oerter ausführen. Eine solche ist die in Müllers Konstruktionsaufgaben gegebene Lösung der Aufgabe 1748. — Man beachte die Gleichartigkeit dieser Aufgaben und Auflösungen für die Lage des Punktes P innerhalb oder ausserhalb des gegebenen Kreises, sowie deren ausserordentliche Vereinfachung, wenn der Punkt P auf die Peripherie selbst zu liegen kommt.

Auflösung. Durch Betrachtung der Fig. 16 findet man, dass der Abstand dieser Sehne vom Kreismittelpunkte in dem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse MP gleich der Gegenkathete des Punktes P sein muss. Den Abstand aber kann man finden als Kathete eines andern rechtwinkligen Dreiecks, welches zur Hypotenuse den Kreisradius hat, und als Kathete die Hälfte der gegebenen Sehnenlänge.

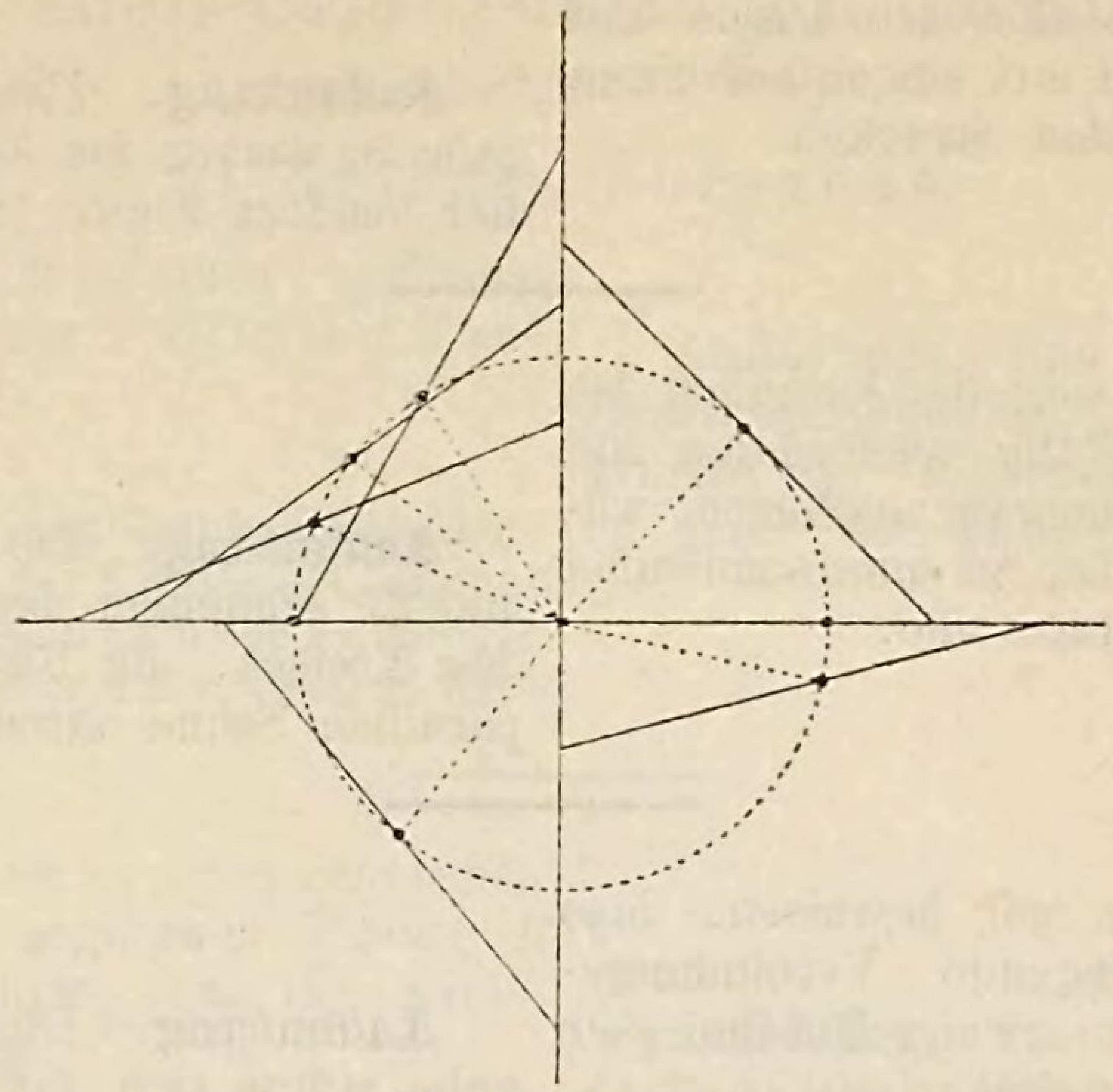
Trägt man also diesen Abstand von M aus als Sehne in den Halbkreis über MP ein, so entsteht die verlangte Sehne des grossen Kreises durch Verbindung von P mit deren Endpunkt.

Aufgabe 17. Es seien gegeben zwei einander unter rechtem Winkel schneidende Geraden. Eine Strecke von gegebener Länge a bewege sich so, dass ihre Endpunkte stets auf den beiden Geraden verbleiben. Welchen Weg beschreibt der Mittelpunkt dieser Strecke?

Erkl. 416. Man erkennt leicht, dass die andern Punkte der Strecke a ebenfalls krummlinige Wege beschreiben, nämlich Ellipsen um denjenigen Kreisdurchmesser, welchem die kleinere Teilstrecke von a anliegt. — Als praktisches Beispiel denke man sich etwa eine an eine Wand angelehnte und auf glattem Boden rutschende Leiter.

Auflösung. Die Strecke bildet in jeder Lage die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Scheitel im Schnittpunkt der Geraden und gleichbleibender Hypotenuse. Daher bleibt auch nach Satz 60 des III. Teiles die Mittellinie nach der Hypotenuse dieses Dreiecks stets gleichgross, nämlich gleich der Hälfte dieser Hypotenuse. Folglich hat der Mittelpunkt der bewegten Strecke stets den gleichbleibenden Abstand $\frac{a}{2}$ vom Schnittpunkt, er beschreibt also einen Kreis um diesen mit Radius $\frac{a}{2}$ (siehe Figur 171).

Figur 171.



Aufgabe 18. Es soll ein Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M beschrieben werden, welcher aus einer gegebenen Geraden g eine Sehne von vorgeschriebener Länge a ausschneidet.

Auflösung. Der Mittelpunkt der aus der Geraden g auszuschneidenden Sehne ist der Fusspunkt F der Senkrechten von M auf g. Trägt man also beiderseits dieses Fusspunktes die Strecken $FA = FB = \frac{a}{2}$ ab, so werden $MA = MB$ die Radien des gesuchten Kreises.

(Die zugehörige Figur ist nach den Angaben der Aufgabe leicht zu entwerfen.)

Erkl. 417. Dass wirklich $MA = MB$ wird, folgt sofort aus der Kongruenz der Dreiecke $MFA \cong MFB$, weil:

1) $MF = MF$,

2) $\sphericalangle MFA = \sphericalangle MFB$,

3) $FA = FB$

ist. Folglich geht ein Kreis um M mit Radius MA von selbst durch Punkt B und bildet die Sehne $AB = a$.

Aufgabe 19. Man soll Kreise zeichnen, welche ihren Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden m haben, und welche aus einer gegebenen Geraden g stets eine Sehne von gegebener Länge a ausschneiden.

Auflösung. Man wiederholt für mehrfache Punkte der Geraden m die Konstruktion der vorigen Aufgabe und erhält Kreise von verschiedenen Grössen, welche alle der Aufgabe genügen.

Erkl. 418. Eine Aufgabe, wie die vorliegende Aufgabe 19, heisst eine unbestimmte Aufgabe. Damit eine solche vollständig bestimmt werde, kann noch irgend eine weitere Beschränkung der Allgemeinheit hinzugefügt werden, etwa wie in Aufgabe 18 der Mittelpunkt selbst, oder ein Punkt, durch welchen der Kreis gehen soll, oder eine zweite Sehne, u. s. w.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 20. Es sei ein Kreisbogen oder eine Kreislinie gezeichnet worden ohne Angabe des Mittelpunktes; die Zirkelöffnung sei aber festgehalten worden. Man soll den Mittelpunkt wieder aufsuchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 9, bedarf aber nur einer einzigen Sehne.

Aufgabe 21. Man errichte in den Endpunkten einer Sehne senkrechte Linien und untersuche die dadurch auf einem beliebigen Durchmesser entstehenden Strecken.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 10 und benutzt Figur 169.

Aufgabe 22. Man soll die Aufgaben 10, 12, 13, 21 für solche Fälle wiederholen und die zugehörigen Zeichnungen ausführen, wobei die Richtungen, der zu untersuchenden Strecken entgegengesetzte sind.

Andeutung. Die Sehne in Aufgaben 10 und 21 schneiden den Durchmesser innerhalb des Kreises, die Radien in Aufgabe 12 die parallele Sehne ausserhalb des Kreises.

Aufgabe 23. Man soll beweisen, dass je zwei gegenüberliegende Verbindungsstrecken der Endpunkte zweier Durchmesser parallel und gleichlang sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Sätze 4 und 7a.

Aufgabe 24. Man soll beweisen, dass ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf irgend einem Punkte einer Winkelhalbierenden zweier Geraden liegt, auf diesen beiden Geraden gleiche Sehnenstrecken ausschneidet.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 13.

Aufgabe 25. Man soll durch einen gegebenen Punkt innerhalb oder ausserhalb eines Kreises die längstmögliche Sehne legen.

Andeutung. Man vergleiche die Sätze 4 und 9.

Aufgabe 26. Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Sehne eines gegebenen Kreises ziehen, welche vom Kreismittelpunkt einen gegebenen Abstand hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 16.

Aufgabe 27. Man soll mit gegebenem Radius r einen Kreis zeichnen, welcher aus einer gegebenen Geraden g eine vorgeschriebene Strecke AB als Sehne ausschneidet (Auflösbarkeit?).

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 18 und 20.

Anmerkung 3. Weitere zu diesem Abschnitt gehörigen Konstruktionsaufgaben findet man in den dieser Encyklopädie angehörigen Büchern:

Müller, Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, I. Teil: Aufgaben 1738 bis 1740, 1746 bis 1749, 1789, 1880 u. a. m.,

Cranz, Das apollonische Berührungsproblem: Aufgabe 1, 49, 51.

3) Aufgaben über Tangenten eines Kreises.

(Zu Abschnitt A, 2 b.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 28. Man soll an einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte eine Tangente errichten.

Erkl. 419. Bei der Auflösung dieser Aufgabe ist der Mittelpunkt des Kreises als bekannt angesehen oder als gefunden nach der Aufgabe 9. Für andere Fälle sehe man die folgenden Aufgaben.

Auflösung. Man zieht den Radius des Berührungspunktes und errichtet in diesem Punkte die Senkrechte auf demselben; diese ist nach Satz 11 die verlangte Tangente.

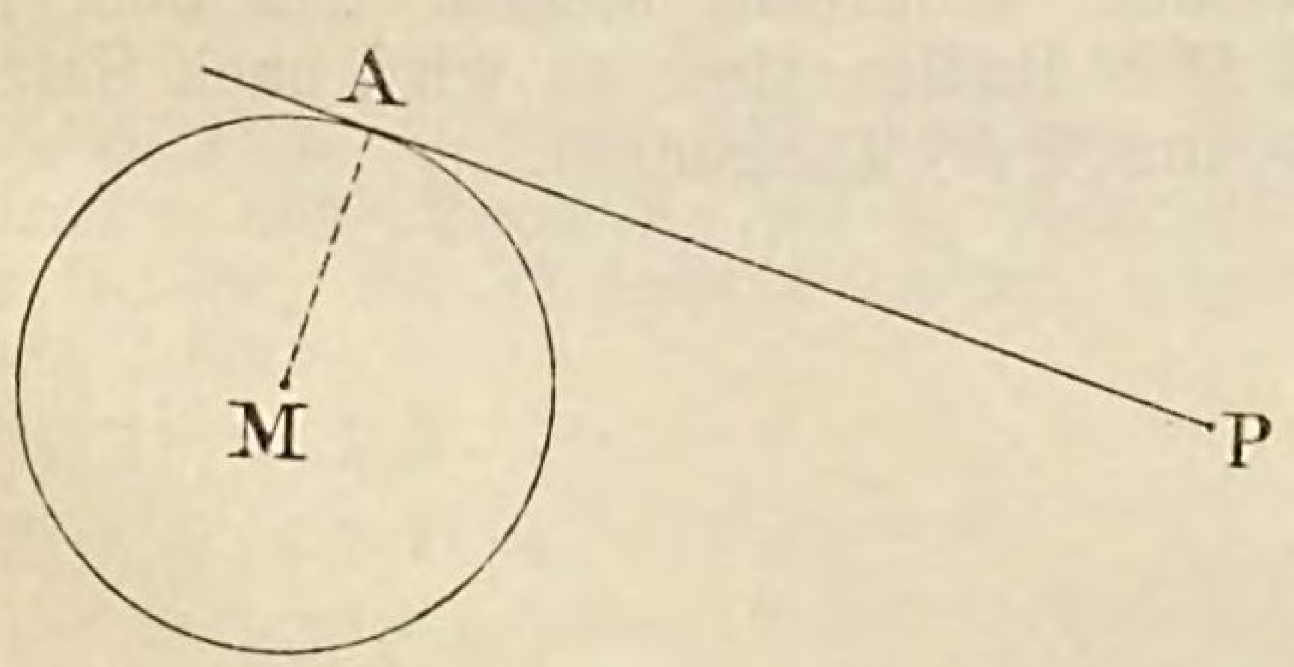
Aufgabe 29. Man soll an einen gegebenen Kreisbogen in einem gegebenen Punkte P eine Tangente errichten, ohne den Kreismittelpunkt zu benutzen.

Erkl. 420. Statt zur Sehne die Parallele durch P unmittelbar zu konstruieren, kann man auch auf der Sehne die Mittelsenkrechte oder die Senkrechte von P aus ziehen, oder P mit dem Sehnenmittelpunkt verbinden und auf dieser Linie in P die Senkrechte errichten. — Wäre P der Endpunkt des gegebenen Kreisbogens, so müsste zuerst nach Aufgabe 28 der Kreismittelpunkt aufgesucht werden.

Auflösung. Da die zur gesuchten Tangente parallelen Sehnen aus dem Kreise Bogen mit dem Mittelpunkt P ausschneiden, so kann man eine Parallele zur gesuchten Tangente erhalten, indem man mit dem Zirkel beiderseits des Punktes P gleichlange Kreisbogenstücke abschneidet und deren Endpunkte verbindet. Zieht man durch P die Parallele zu dieser Verbindungsstrecke, so ist sie die gesuchte Tangente.

Aufgabe 30. Man soll von einem gegebenen Punkte P (siehe Figur 172 und 173) eine Tangente an einen gegebenen Kreis mit Mittelpunkt M konstruieren.

Figur 172.



Erkl. 421. Nach Satz 60 des III. Teiles muss der Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse auf dem Halbkreise liegen, welcher über der Hypotenuse als Durchmesser beschrieben wird.

Auflösung.

I. Analysis. Angenommen Punkt A in Figur 172 sei der gesuchte Berührungspunkt der Tangente von P. Dann ist der Winkel MAP ein rechter, also das Dreieck MAP ein rechtwinkliges. Von diesem sind bekannt die Grösse und Lage der Hypotenuse MP, die Grösse der Kathete $MA = r$ und der rechte Winkel. Folglich ist Punkt A zu finden als Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks über Hypotenuse MP mit Kathete r.

II. Ausführung. Man sucht mittels der Mittelsenkrechten auf der Strecke MP deren Mittelpunkt und zieht (s. Figur 173) den Kreis mit Durchmesser MP. Dessen Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreise sind die Berührungspunkte B und B'.

III. Beweis. Das Dreieck MBP bezw. $MB'P$ ist bei P rechtwinklig, die Strecke MB ist aber Radius, also ist nach Satz 11 die Linie BP Tangente.

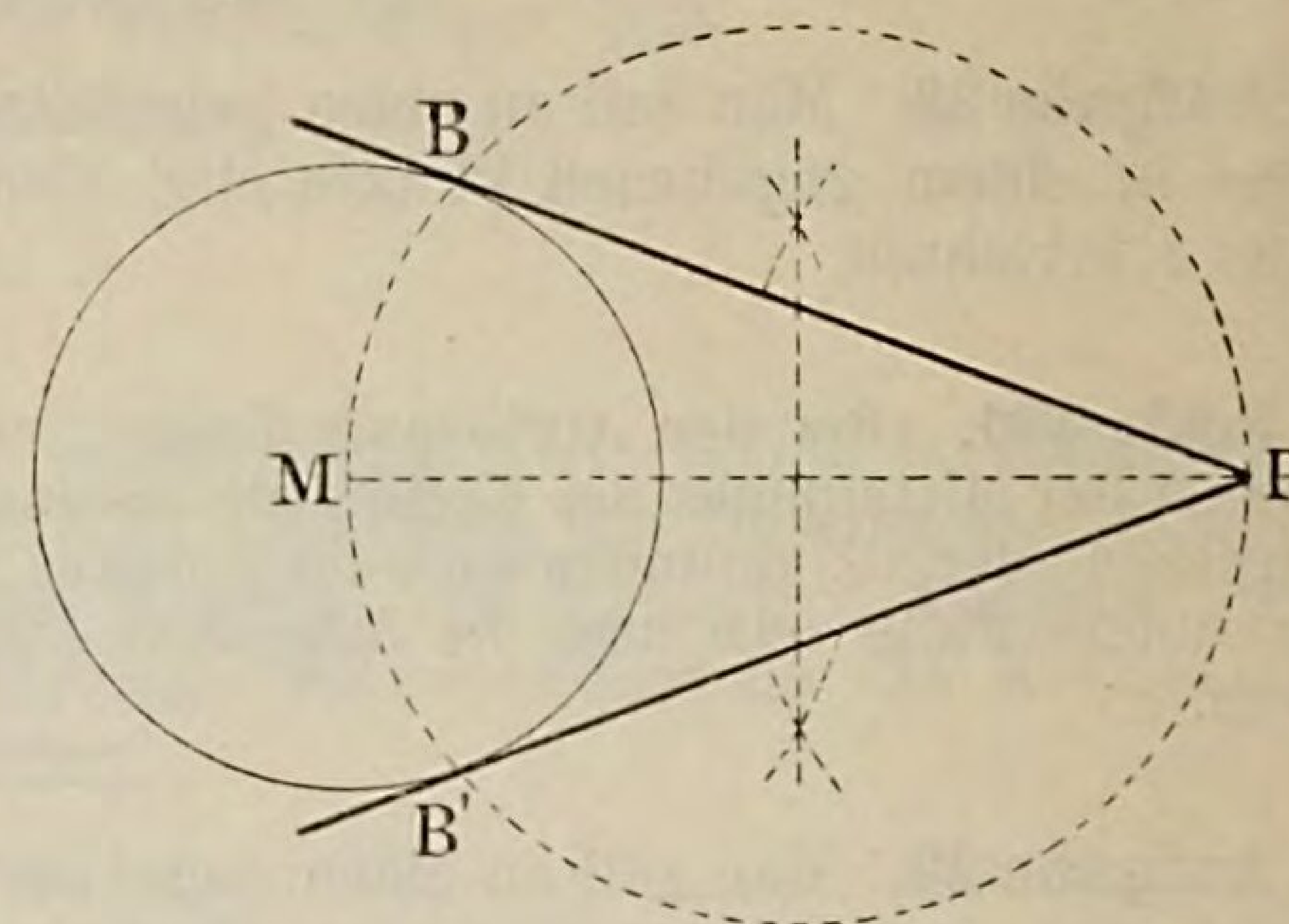
IV. Determination. Man erhält bei jeglicher Lage des Punktes P ausserhalb des Kreises zwei Schnittpunkte B, also

Erkl. 422. Man beachte die dualistische Uebertragung der Beziehungen eines Kreises zum Punkte und zur Geraden:

Von den Punkten einer beliebigen Geraden (Sekante) liegen zwei auf dem Kreise.	Von den Geraden durch einen beliebigen (äussern) Punkt berühren zwei den Kreis.
Wird der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt gleich dem Radius, so fallen beide Schnittpunkte zusammen in den Berührungspunkt der Geraden.	Wird der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt gleich dem Radius, so fallen beide Berührungslinien zusammen in die Tangente des Punktes.
Wird der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt grösser als der Radius, so verschwinden die Schnittpunkte (werden imaginär).	Wird der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt kleiner als der Radius, so verschwinden die Tangenten (werden imaginär).

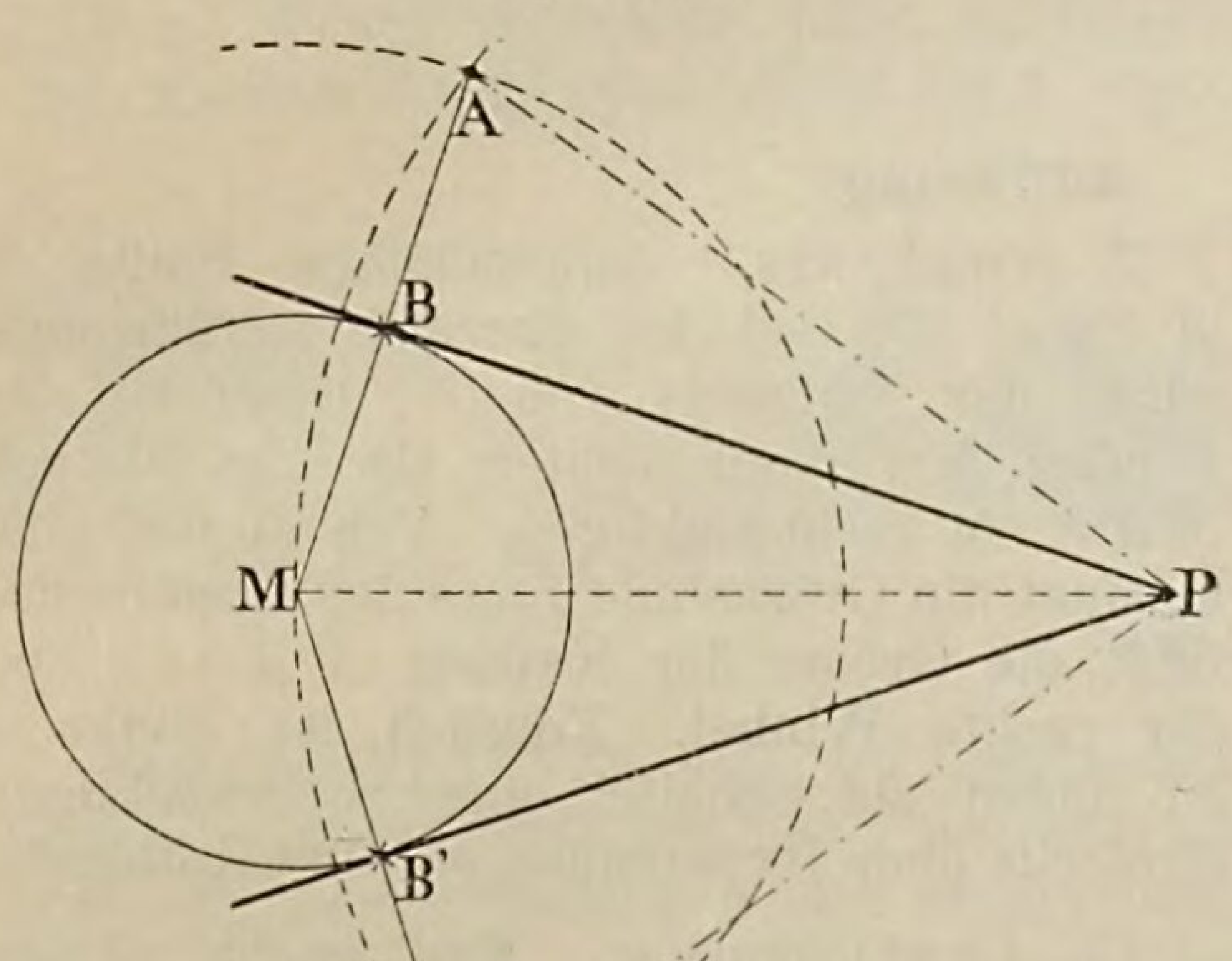
zwei Tangenten an jeden Kreis von jedem äussern Punkte.

Figur 173.



Aufgabe 31. Man soll beweisen, dass die Berührungspunkte der Tangenten von P an den Kreis um M auch ausgeschnitten werden durch die Radien von M nach den Punkten, deren Entfernung von M gleich $2r$, von P gleich PM ist.

Figur 174.



Erkl. 423. Wenn der Punkt P dem Kreise immer näher rückt, so wird der Winkel BPA immer kleiner; und fällt P auf die Peripherie selbst, so wird die Konstruktion nach der vorigen Auflösung 30 ergebnislos, in Auflösung 31 aber fällt der Punkt B mit P zusammen, aber Punkt A wird ein Punkt der Tangente, denn die Konstruktion fällt dann vollständig zusammen mit der Auflösung der Aufgabe 173 des III. Teiles, auf einer Strecke MP im Endpunkte P eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Die Punkte, deren Entfernung von M gleich $2r$ und von P gleich PM ist, sind die Schnittpunkte zweier Kreise um M und P mit Radius $2r$ und PM. Bezeichnet man dieselben mit A und A' (s. Figur 174), so sind PMA und PMA' gleichschenklige Dreiecke mit Grundseite $MA = MA' = 2r$, und die Kreisschnittpunkte B, B' sind die Mittelpunkte ihrer Grundseiten. Folglich muss die Verbindungslinie PB und PB' auf MA und MA' senkrecht stehen. Da aber MB und MB' Radien sind, so wird nach Satz 11 PB und PB' Tangenten.

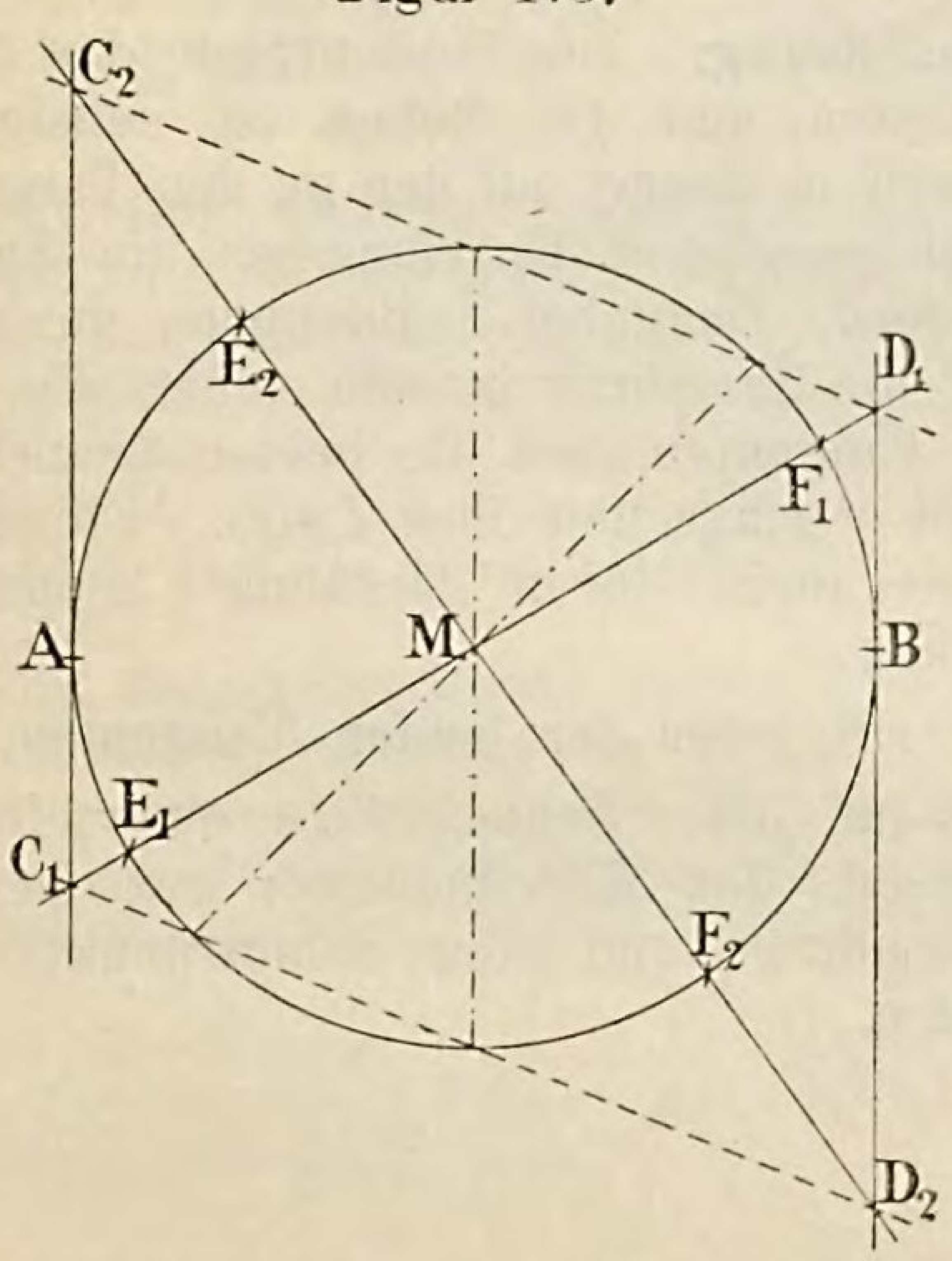
Aufgabe 32. Man soll durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade ziehen, welche von einem zweiten gegebenen Punkte M eine gegebene Entfernung r hat.

Erkl. 424. Wie aus den Auflösungen der beiden vorigen Aufgaben hervorgeht, gibt es durch einen Punkt P zwei gerade Linien, die von einem zweiten Punkte M einen gegebenen Abstand r haben, und die Linie PM halbiert den Winkel dieser beiden Geraden.

Auflösung. Da die Entfernung der gesuchten Geraden g von dem Punkte P gemessen wird durch die Senkrechte von M auf g, so muss im Fusspunkte B ein rechter Winkel MBP entstehen, also ist die gesuchte Gerade eine Tangente PB an einen Kreis um M mit Radius r, und die Auflösung dieser Aufgabe fällt zusammen mit den Auflösungen der beiden vorigen Aufgaben.

Aufgabe 33. Man ziehe an einen Kreis zwei parallele Tangenten und einen beliebigen Durchmesser, und untersuche die dadurch auf Tangenten und Durchmesser entstehenden Strecken.

Figur 175.



Erkl. 425. In Figur 175 sind nach Nebenstehendem ohne Rücksicht auf die Zeigerziffern oder Indices, nur in jeder Gleichung mit denselben Ziffern:

1) $AC = BD$,

2) $CE = DF$ und $CF = DE$.

Die Verbindungslinien zweier Punktepaare E und F bilden nach Aufgabe 23 ein Rechteck.

Auflösung. Die Gesamtfigur der beiden Tangenten und des Durchmessers ist zentrischsymmetrisch in Bezug auf den Kreismittelpunkt als Symmetriezentrum. Denn bei Umdrehung um 180^0 bleibt die Kreislinie in sich selbst, die parallelen Tangenten und die beiden Durchmesserrichtungen vertauschen ihre Lage. Daher entstehen auch durch Deckung kongruente Strecken:

1) auf jeder der beiden Tangenten,

2) auf jeder Durchmesserhälfte

zwischen dem Kreispunkte und dem Schnittpunkte.

Aufgabe 34. Welche Eigenschaften besitzt die Verbindungslinie zweier Punktepaare C und D in Figur 175?

Erkl. 426. Nicht immer werden die Verbindungslinien $C_1 D_2$ und $C_2 D_1$ den Kreis treffen. Geschieht dies aber von der einen, dann muss es auch bei der andern geschehen. —

Würde die Linie $C_1 D_2$ den Kreis berühren, so würde auch $C_2 D_1$ eine Tangente. Dadurch

Auflösung. Werden in einem Kreise zwei Durchmesser gezogen (s. Figur 175) und mit zwei parallelen Tangenten zum Schnitt gebracht, so bilden die Punkte $C_1 D_2 D_1 C_2$ ein Viereck mit Mittelpunkt M, da seine Diagonalen CD einander in M halbieren. Daher ist $C_1 D_2 D_1 C_2$ ein Parallelogramm, und es müssen die Strecken $C_1 D_2$

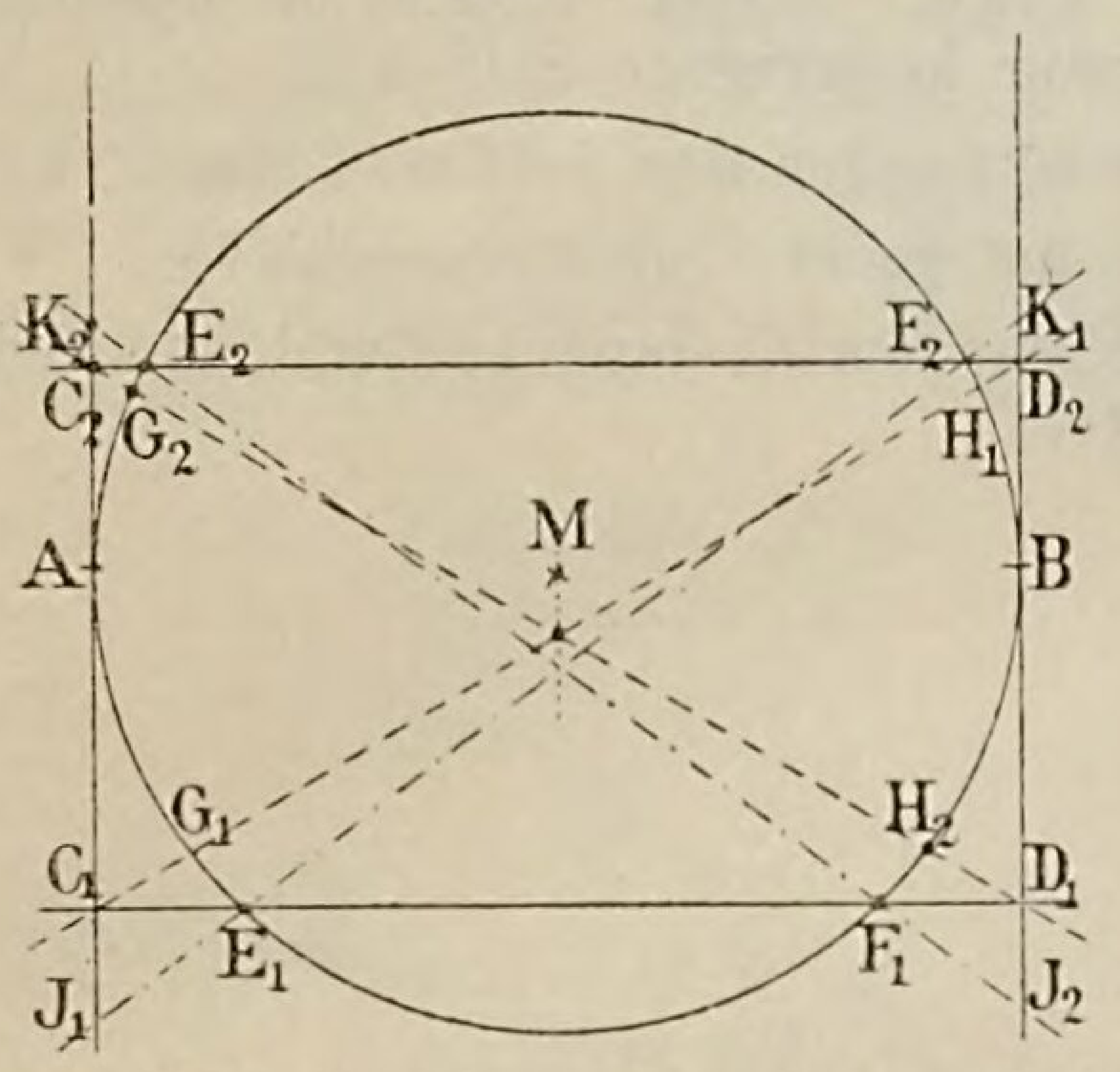
entstünde ein Parallelogramm mit zwei gleichen Höhen, also ein Rhombus. Die beiden Höhen des Parallelogramms $C_1 D_2 D_1 C_2$ sind nämlich die (durch M gezogenen) Senkrechten der Parallelenpaare. Davon ist die eine unveränderlich gleich AB, dem Kreisdurchmesser. Die andere Senkrechte wird ebenfalls gleich dem Durchmesser, wenn $C_1 D_2$ und $C_2 D_1$ den Kreis berühren. Denn die Verbindungslinie dieser Berührungspunkte ginge durch M und wäre auf beiden Tangenten senkrecht. Blieben die Parallelen $C_1 D_2$ und $C_2 D_1$ ausserhalb des Kreises, so ist nach Aufgabe 257 des III. Teiles gleichzeitig ihre zugehörige Höhe die grössere, ihre Länge die kleinere; schneiden aber $C_1 D_2$ und $C_2 D_1$ den Kreis, so wird ihre Höhe die kleinere, aber ihre Länge grösser als $C_1 C_2 = D_1 D_2$.

und $C_2 D_1$ ebensowohl parallel und gleichgross sein, wie die Strecken $C_1 C_2$ und $D_1 D_2$.

Wenn die Verbindungslinien $C_1 D_2$ und $C_2 D_1$ den Kreis treffen, so müssen auch je zwei solche Schnittpunkte mit dem Kreise bei der Umdrehung um 180° zur Deckung gelangen, also sind diese Kreisschnittpunkte ebenfalls zentrisch-symmetrisch und bilden daher selbst wieder die Endpunkte zweier Durchmesser, und schliessen zwischen sich und den Tangentenpaaren beiderseits parallele und gleichlange Strecken ein.

Aufgabe 35. Man ziehe an einen Kreis zwei parallele Tangenten und eine dazu senkrechte Sehne, und untersuche die dadurch entstehenden Strecken.

Figur 176.



Erkl. 427. In Figur 176 sind nach Nebenstehendem ohne Rücksicht auf die Ziffern:

1) $AC = BD$,

2) $CE = DF$ und $CF = DE$,

wie in Erkl. 425 für Figur 175.

Erkl. 428. Man beachte die fast wörtliche Uebereinstimmung der Aufgaben und Auflösungen 33 und 35 für achsige bezw. zentrische Symmetrie.

Auflösung. Die Gesamtfigur der beiden Tangenten und der Sehne ist achsig-symmetrisch in Bezug auf den zu den Tangenten (mittel-)parallelen Durchmesser als Symmetrieachse. Denn bei Umklappung um diesen bleibt die Kreislinie in sich selbst, die parallelen Tangenten und die beiden Sehnenrichtungen vertauschen ihre Lage. Daher entstehen auch durch Deckung kongruente Strecken:

1) auf jeder der beiden Tangenten,

2) auf jeder Sehnenhälfte einerseits und beiderseits des Mittelpunktes: zwischen den Kreispunkten und den Schnittpunkten der Geraden.

Aufgabe 36. Welche Eigenschaften besitzen die Verbindungslinien zweier Punktepaare C und D bezw. E und F in Fig. 176?

Erkl. 429. Infolge der achsigen Symmetrie der Gesamtfigur 176 in Bezug auf den zu den Tangenten parallelen Durchmesser als Achse treffen sich auf dieser selben Geraden auch eine Reihe weiterer Verbindungslinien symmetrischer Punktepaare, wie $C_1 F_2$ und $D_1 E_2$ oder $C_1 K_1$

Auflösung. 1) Werden in einem Kreise zwei parallele Sehnen gezogen (s. Figur 176) und mit zwei dazu senkrechten Tangenten zum Schnitt gebracht, so bilden die Punkte $C_1 D_1 D_2 C_2$ ein Rechteck, dessen Diagonalen $C_1 D_2$ und $C_1 D_2$ einander auf der Mittelparallelen der Tangenten treffen und zu dieser als Achse ebenfalls achsig-symmetrisch sind.

und $D_1 K_2$, $C_1 B$ und $D_1 A$, $C_1 H_2$ und $D_1 G_1$, $C_1 E_2$ und $D_1 F_2$, und viele andere.

Ferner entstehen wieder zur Achse und den beiden Tangenten senkrechte, also zu den gegebenen parallele Sehnen:

$$G_1 H_2 \parallel G_2 H_1 \parallel K_1 K_2 \# J_1 J_2.$$

Ebenso sind einzelne Punkte, Strecken, Winkel und Teilfiguren beiderseits der Achse achsig-symmetrisch kongruent, so die Schnittpunkte und Schnittwinkel der Geraden CD und EF, die Strecken $J_1 E_1 = J_2 F_2$, $K_2 E_2 = K_1 F_2$ und deren Winkel mit Tangenten und Sehnen, die Bogenstücke $E_1 G_1 = F_1 H_2$ und $E_2 G_2 = F_2 H_1$, sowie die von den vier Punkten $C_1 G_1 E_1 J_1$ und $D_1 H_2 F_1 J_2$ oder den vier Punkten $C_2 E_2 S_2 K_2$ und $D_2 F_2 H_1 K_1$ gebildeten Figuren.

Daher liegt der Schnittpunkt auf dem zu den Tangenten parallelen Durchmesser, und auch die Schnittpunkte G, H mit dem Kreise sind achsig-symmetrische Punkte zu diesen.

2) Die Punkte $E_1 F_1 F_2 E_2$ bilden ebenfalls ein achsig-symmetrisches Viereck und zwar mit zwei parallelen Gegenseiten. Daher treffen auch die Diagonalen dieses Vierecks einander auf der Achse, also auf dem zu den Tangenten parallelen Durchmesser und schneiden auch die Tangenten in achsig-symmetrischen Punkten J, K.

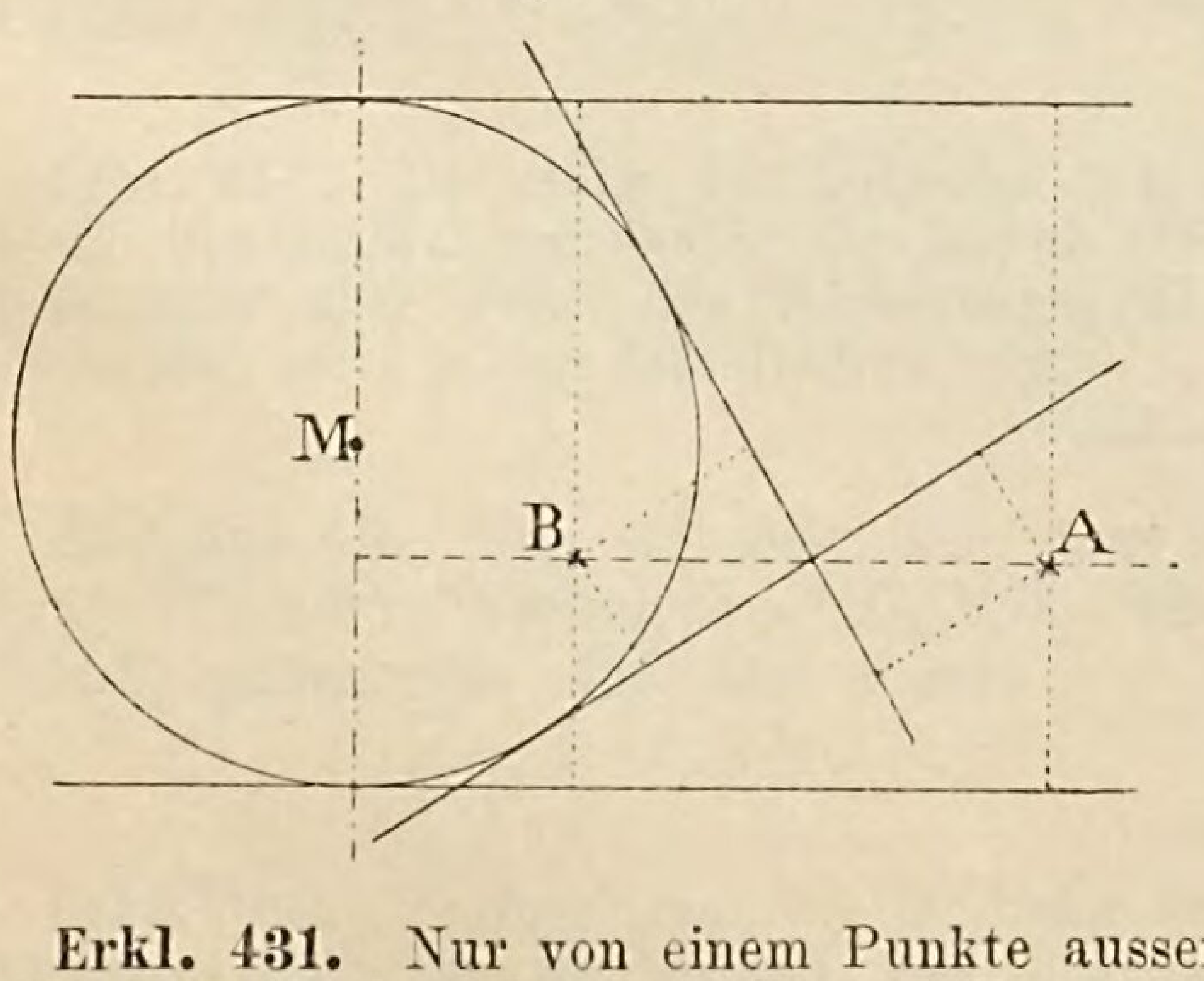
Aufgabe 37. Man soll an einen gegebenen Kreis eine Tangente ziehen, welche von zwei gegebenen Punkten A und B gleichen Abstand hat.

Erkl. 430. Geht die Tangente zwischen AB hindurch, und werden gleiche Abstände vorausgesetzt, so haben die Dreiecke aus Strecke AB, der Tangente, und den Abständen gleiche Winkel (als Scheitel- bezw. Wechselwinkel) und eine gleiche Seite (die Abstände), folglich sind sie kongruent und ihr Scheitelpunkt auf AB halbiert AB.

Wird umgekehrt dieser Punkt auf AB als Mittelpunkt angenommen, so haben dieselben Dreiecke wieder drei gleiche Winkel und die gleiche Hypotenuse, folglich sind auch umgekehrt die Gegenkatheten, nämlich die Abstände gleichgross.

Derselbe Beweis ist auch zu führen mittels der zentrischen Symmetrie zum Schnittpunkt der Tangenten mit AB.

Figur 177.



Erkl. 431. Nur von einem Punkte ausserhalb eines Kreises lassen sich zwei Tangenten an denselben ziehen. Während daher parallele Tangenten zur gegebenen Strecke AB stets ohne Ausnahme zu zweien vorhanden sind, werden die beiden anderen unmöglich, wenn der

Auflösung.

I. Analysis. Angenommen, die verlangte Tangente sei gefunden, dann müssen die beiden von A und B auf dieselbe gefällten Senkrechten gleiche Länge haben. a) Liegen dann die Punkte A und B auf gleicher Seite der Tangente, so muss das aus den Punkten A und B und den Fusspunkten der Senkrechten gebildete Viereck ein Rechteck sein, also die Tangente parallel zur Linie AB. b) Liegen aber die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten der Tangente, so muss die Tangente durch den Mittelpunkt der Strecke AB gehen.

II. Ausführung. a) Man fälle (siehe Figur 177) von M auf AB die Senkrechte und errichte auf dieser in den Kreisschnittpunkten die senkrechten Tangenten. Oder man konstruiere b) nach Aufgabe 30 oder 31 die Tangenten an den Kreis von dem Mittelpunkte der Verbindungsstrecke AB.

III. Beweis. Die beiden ersten Tangenten haben gleichen Abstand von A und B, weil sie parallel AB sind, die beiden andern, weil sie durch den Mittelpunkt von A und B gehen (vergl. Erkl. 430).

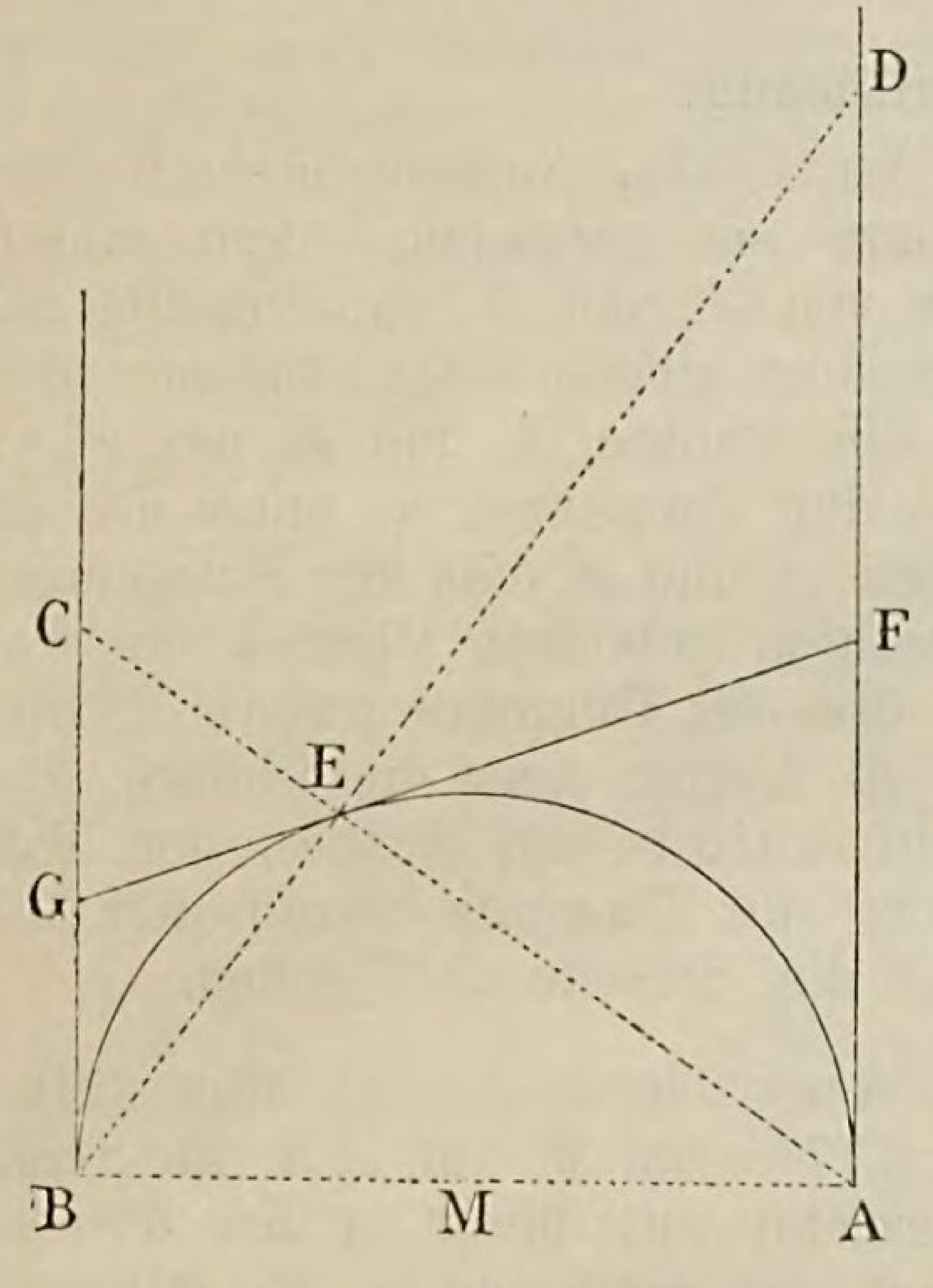
IV. Determination. So lange der Mittelpunkt von A und B ausserhalb des Kreises liegt, erhält man allgemein stets vier Lösungen, liegt dieser Mittelpunkt auf dem Kreise, so entstehen drei Lösungen, liegt er innerhalb des Kreises, so bleiben doch immer die zwei Lösungen nach der Konstruktion (α). Wenn die Punkte A und B selbst auf einer Tangente des Kreises liegen, so fällt von den genannten Lösungen stets noch eine fort.

Mittelpunkt der Strecke AB in den Kreis hineinrückt. Liegt er auf dem Kreise, so entsteht als einzige zwischen A und B hindurchgehende Tangente die in diesem Punkte an den Kreis errichtete Tangente.

Sind A und B selbst Punkte derselben Tangente an den Kreis, so fällt die eine Tangente aus dem Mittelpunkt von AB mit der einen Tangente parallel AB, d. h. durch A und B selbst zusammen.

Aufgabe 38. Man ziehe in einem Kreispunkte die Tangente und die Verbindungslinien nach den Berührungspunkten zweier parallelen Tangenten und untersuche die auf diesen parallelen Tangenten entstehenden Strecken.

Figur 178.



Auflösung. Zieht man in Figur 178 von den Endpunkten des Durchmessers AB die Verbindungslinien nach dem Kreispunkte E und die parallelen Tangenten BC und AD sowie in E die Tangente FG, so entsteht über AB als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck AEB, und folglich sind als Nebenwinkel auch die Winkel BEC und AED Rechte, die Dreiecke BEC und AED sind ebenfalls rechtwinklige Dreiecke. Nun sind aber nach Satz 14 die Tangentenabschnitte von den Punkten E und F auch je einander gleich, nämlich $GB = GE$ und $FA = FE$. Folglich muss GE bezw. FE je als Mittellinie des rechtwinkligen Dreiecks gleich den beiden Hypotenusenhälften sein (s. Satz 60 des III. Teiles und Erkl. 432). Daher schneidet eine beliebige Tangente je zwei parallele Tangenten in den Mittelpunkten der Abschnitte (BC und AD), welche durch die Verbindungslinien der drei Berührungspunkte gebildet werden.

Erkl. 432. Dass in Figur 192 wegen der rechten Winkel $BEC = AED = 90^0$ und wegen der Gleichheit $GB = GE$ und $FE = FA$ auch die Gleichheit dieser Strecken mit GC bezw. FD bestehen muss, lässt sich verschieden beweisen:

Entweder setzt man die Winkelbeziehungen an: Im gleichschenkligen Dreieck BGE ist $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, also ist $\sphericalangle CGE$ als Aussenwinkel gleich $2 \cdot \sphericalangle GEB$, aber $\sphericalangle CEG$ ist auch gleich $90^0 - \sphericalangle GEB$, folglich:

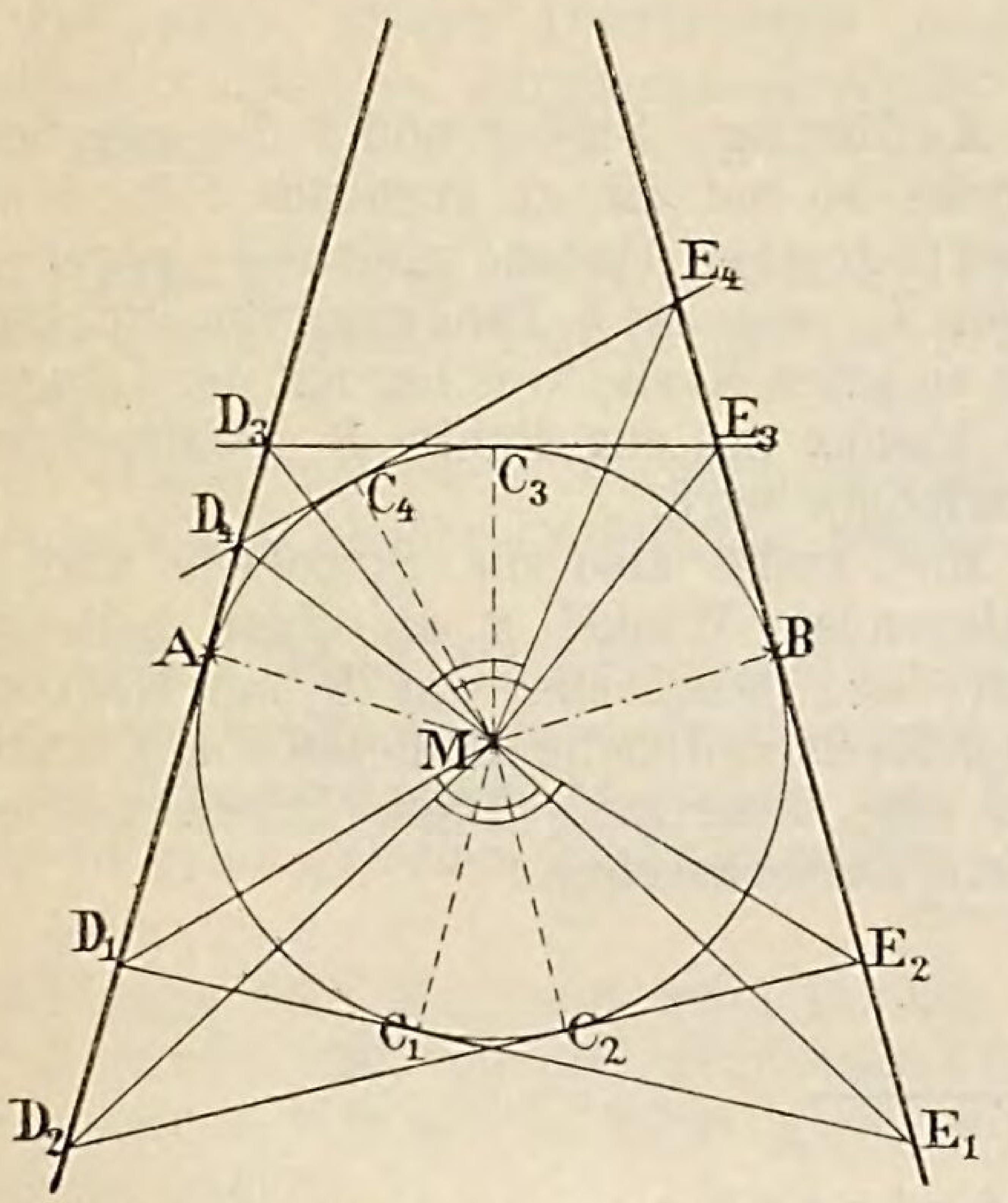
$$\begin{aligned} \sphericalangle GCE &= 180^0 - (CGE + CEG) \\ &= 180^0 - (2 \cdot \sphericalangle GEB + 90^0 - GEB) \\ &= 90^0 - GEB, \end{aligned}$$

also $= CEG$. Folglich ist auch Dreieck CGE gleichschenklig, und $CG = GE = GB$.

Oder man beachtet, dass nach Satz 60 des dritten Teiles der Scheitel E des rechtwinkligen Dreiecks AED nur von einem Punkte der Hypotenuse denselben Abstand haben kann wie vom Endpunkte A, dass also, wenn $EF = FA$ ist, wegen des Halbkreises auch $EF = FD$ sein muss.

Aufgabe 39. Man ziehe an einen Kreis (siehe Figur 179) zwei beliebige Tangenten in A und B, lasse eine dritte Tangente DCE am Kreise gleiten und beobachte den Winkel DME bei dieser Bewegung.

Figur 179.



Auflösung. Der Winkel der Verbindungslinien DM und EM besteht aus den zwei Teilen $DMC + EMC$. Davon ist der erstere gleich $\frac{\sphericalangle AMC}{2}$, der letztere gleich $\frac{\sphericalangle BMC}{2}$, also der ganze Winkel:

$$DME = \frac{1}{2}(\sphericalangle AMC + BMC) = \frac{1}{2}\sphericalangle AMB.$$

Und dieser Wert bleibt sich gleich, wo auch der Berührungspunkt C liegen mag zwischen A und B. Nun hat der Winkel AMB zwei verschiedene Grössen, je nachdem der hohle oder der überstumpfe Winkel AMB eintritt; davon ist ersterer nach Satz 13 supplementär zum Winkel der Tangenten, der letztere um 180^0 grösser als derselbe Tangentenwinkel. Daher bilden die Verbindungslinien nach den Punkten D und E stets denselben Winkel, welche Lage auch die dritte Tangente zwischen den zwei festen annehmen möge. Oder das Dreieck DME behält bei jeglicher Lage der Tangente DE stets gleichen Winkel an der Spitze und gleiche Höhe.

Erkl. 433. Wenn der Winkel DME stets der gleiche bleibt, so sagt man auch, die Strecke CD werde von M aus „unter dem Winkel EMD gesehen" oder die Strecke „erscheine" unter dem Winkel DME; daher erhält man die Aussage: Alle Tangentenstrecken zwischen zwei festen Tangenten eines Kreises erscheinen vom Mittelpunkte aus gleichgross, nämlich wie die Hälfte des Bogens zwischen den Berührungspunkten der festen Tangenten. Denn der Bogen AB erscheint unter dem Winkel AMB, und DME ist gleich $\frac{AMB}{2}$.

Erkl. 434. Die Höhe des Dreiecks DME ist die Senkrechte von der Spitze M auf DE. Diese muss aber durch den Berührungspunkt gehen, also stets gleich dem Radius sein.

Aufgabe 40. Man soll beweisen, dass in Figur 179 die Winkelpaare D_1MD_2 und E_1ME_2 gleichgross sind, und ebenso:

$$D_4MD_5 = E_4ME_5.$$

Auflösung Werden zwei feste Tangenten AD und BE von zwei andern geschnitten, so erscheinen die auf den festen Tangenten gebildeten Abschnitte vom Mittelpunkte aus unter gleichen Winkeln; denn da nach voriger Aufgabe $\sphericalangle D_1ME_1 = D_2ME_2$ ist, so muss der grosse Winkel D_1ME_2 vermindert um

Erkl. 435. Verfolgt man die Drehung der Tangente D_1E_1 bis sie parallel AD wird, so fällt Punkt D ins Unendliche und erscheint dann wieder auf der entgegengesetzten Seite jenseits des Schnittpunktes der beiden Geraden; bei weiterer Drehung, bis E_2 nach B selbst rückt, fällt er mit diesem Schnittpunkt zusammen.

und die Linie MD ist dabei wirkliche Halbierungslinie des Winkels AMB. Dann erst gelangt die Tangente durch die Lagen 3 und 4 in die Lage AD selbst, wird sodann einmal parallel mit BE und fällt zuletzt wieder mit $D_1 E_1$ zusammen.

jeden einzelnen dieser kleinen gleichgrosse Reste geben, nämlich:

$$D_1 ME_2 - D_1 ME_1 = D_1 ME_2 - D_2 ME_2,$$

also:

$$D_1 MD_2 = E_1 ME_2.$$

Aufgabe 41. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind eine Seite, ein anliegender Winkel und die zu diesem Winkel gehörige Höhe.

Erkl. 436. Anstatt die nebenstehende Aufgabe zurückzuführen auf die Auflösung der Aufgaben 30 bis 32, kann sie auch gelöst werden nach den Aufgaben des Abschnitts B 3 der Aufgabensammlung am Schlusse des III. Teiles. Denn die Seite c bildet mit h_b und b ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

Erkl. 437. Die verschiedenen Lösungsfälle für spitzen, rechten, stumpfen Winkel γ unterscheiden sich durch die Lage des Berührungspunktes der Tangente unter, auf, oder über dem Schnittpunkte von b mit dem Winkelschenkel von β.

Auflösung. Sind c und β die gegebenen Stücke, so hat die zu suchende Seite b vom Punkte B einen Abstand gleich der gegebenen Höhe h_b, also ist b Tangente vom Punkte A aus an einen Kreis, welcher mit der Länge h_b als Radius um den Punkt B als Mittelpunkt gezeichnet wird.

Man trage also die Strecke c und den anliegenden Winkel β an einer beliebigen Linie ab, beschreibe um B mit Radius h_b einen Kreis und ziehe an diesen vom Punkte A aus eine Tangente. Diese ist die gesuchte dritte Dreiecksseite.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 42. Man soll mit dem gegebenen Radius r einen Kreis zeichnen, welcher eine gegebene Gerade im gegebenen Punkte B berührt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 28.

Aufgabe 42a. Man kenne von einem Kreise den Mittelpunkt und eine Tangente, und es soll der Berührungspunkt auf der Tangente gesucht werden.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 43. Von einem Kreise sei der Mittelpunkt und eine Tangente g bekannt. Man soll beliebig viele weitere Tangenten an denselben ziehen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 30 und 31.

Aufgabe 44. Ein Fass soll in einen Winkel eines Zimmers gestellt werden. Wieviel Wandraum von der Ecke aus muss frei bleiben?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 32.

Aufgabe 45. Ein Fass rollt in den Winkelraum zwischen Boden und Dachbalken eines Speichers. Wie weit kann es in den Winkel hineinkommen?

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 46. Man beweise, dass die Verbindungslinie zweier Punkte auf parallelen Tangenten:

a) welche von den Berührungspunkten in entgegengesetzter Richtung gleichweit entfernt sind, oder:

b) welche durch die Verbindungslinien der Endpunkte zweier Durchmesser ausgeschnitten werden — durch den Kreismittelpunkt gehen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 33 und 34.

Aufgabe 47. Man beweise, dass die Verbindungslinien zweier Punkte auf parallelen Tangenten:

a) welche von den Berührungspunkten gleichgerichtet gleiche Entfernung haben — oder:

b) welche durch die Durchmesser zweier ebensolchen Punkte ausgeschnitten werden — auf der Tangente senkrecht stehen, und den Kreis in symmetrischen Punkten treffen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 35 und 36.

Aufgabe 48. Man soll zwei Punkte A und B suchen, die von drei gegebenen Tangenten eines Kreises je zwei gleichlange Abstände haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 37. Man vergleiche besonders Figur 177.

Aufgabe 49. Man ziehe an einen Kreis zwei parallele Tangenten in A und B und eine drittte in E, verlängere die auf den Parallelen gebildeten Tangentenabschnitte um sich selbst und beweise, dass die Verbindungsstrecken AC und BD (s. Figur 178) durch den Berührungspunkt E gehen müssen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 38.

Aufgabe 50. Man lasse ein Dreieck sich so verändern, dass eine Ecke M und deren Winkel sowie zugehörige Höhe gleich bleibt, während eine andere Ecke auf einer Geraden gleitet. Welche Bahn durchläuft dabei die dritte Ecke?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 39 und 40.

Aufgabe 51. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite c und zwei beliebige Höhen gegeben sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 41; und zwar ist zu unterscheiden, ob die zur Seite gehörige Höhe gegeben ist, oder nicht.

Anmerkung 4. Weitere zu diesem Abschnitt gehörigen Konstruktionsaufgaben findet man in dieser Encyklädie in:

Müller, Konstruktionsaufgaben I: Nr. 1741 bis 1745, 1750 bis 1754, 1790, 1802, 1882 bis 1890, m. a. m.

Cranz, Apollonisches Problem: Nr. 4, 37, 38, 45 bis 50, 52, 53, 55, 57.

4) Aufgaben über Peripheriewinkel eines Kreises.

(Zu Abschnitt A, 3 a.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 52. Wie gross sind die Peripheriewinkel (auch Sehnentangentenwinkel) über dem 3., 4., 5., 6., $\cdots n$ten Teile eines Kreisumfanges als Standbogen?

Erkl. 438. Da der Peripheriewinkel über $\frac{360}{n}$ Bogengraden die Anzahl $\frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$ Winkelgrade hat, so könnte man aussagen, der Standbogen eines Peripheriewinkels sei der ebensovielte Teil des Vollkreises, als der Winkel vom gestreckten Winkel; oder der Peripheriewinkel verhält sich zum gestreckten Winkel, wie sein Standbogen zum Vollkreis.

Auflösung. Da der 3., 4., u. s. w. Teil des Kreisumfanges $\frac{360}{3} = 120$, $\frac{360}{4} = 90$, $\frac{360}{5} = 72$, $\frac{360}{6} = 60$, $\cdots \frac{360}{n}$ Bogengrade hat, so hat ein über diesem Bogen stehender Peripheriewinkel jeweils halbsoviele Winkelgrade, nämlich $\frac{360}{6} = 60$, $\frac{360}{8} = 45$, $\frac{360}{10} = 36$, $\frac{360}{12} = 30$, allgemein $\frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$ Winkelgrade.

Aufgabe 53. Wie gross sind die Bogenstücke, welche durch Peripheriewinkel von 120^0, 90^0, 60^0, 45^0, $\cdots n^0$ ausgeschnitten werden?

Erkl. 439. Man kann auf Grund der Aufgaben 52 und 53 die Verdoppelung oder Halbierung einer Winkelgrösse dadurch ausführen, dass man zu dem Winkel als Peripheriewinkel den Mittelpunktswinkel zeichnet und umgekehrt.

Auflösung. Die Standbogen haben jeweils doppelt so viele Bogengrade, als die Peripheriewinkel Winkelgrade, also in nebenstehenden Fällen 240^0, 180^0, 120^0, 90^0, $\cdots 2n$ Bogengrade.

Aufgabe 54. Man soll mittels des Satzes 16c die Aufgabe 29 lösen.

Erkl. 440. Während die Auflösung der Aufgabe 29 nur für solche Punkte P möglich war, welche nicht am Endpunkte des Bogens lagen, so ist die nebenstehende Auflösung für diesen Fall ebenso gut ausführbar. — Man kann sogar den Peripheriewinkel unterhalb der beliebigen Sehne benützen, statt über der Sehne g, und trägt dann nicht den Winkel selbst, sondern sein Supplement am Punkte P an.

Auflösung. Man ziehe in dem gegebenen Punkte P eine beliebige Sehne, zeichne einen der über dieser Sehne stehenden Peripheriewinkel und trage denselben im Punkte P an der Sehne als Schenkel an. Dann muss der andere Schenkel Tangente sein im Punkte P.

Denn die Tangente in P muss denselben Winkel mit der Sehne bilden, wie der angetragene Peripheriewinkel; eine zweite Linie unter gleichem Winkel mit der Sehne besteht nicht, also ist der Winkelschenkel die Tangente.

Aufgabe 55. Es sollen vor einem Gemälde Stühle so aufgestellt werden, dass jeder Beschauer die Gesamtbreite des Bildes unter gleichem Winkel sieht.

Erkl. 441. An Stelle des Bildes kann man sich auch ein Gebäude denken, oder ganz besonders die Rampe einer Theaterbühne. Dann

Auflösung. Ist der gegebene Winkel Peripheriewinkel eines Kreises, in welchem die Bildbreite eine Sehne bildet, so wird von jedem dieser Kreispunkte das Bild unter demselben Winkel gesehen. Man konstruiere

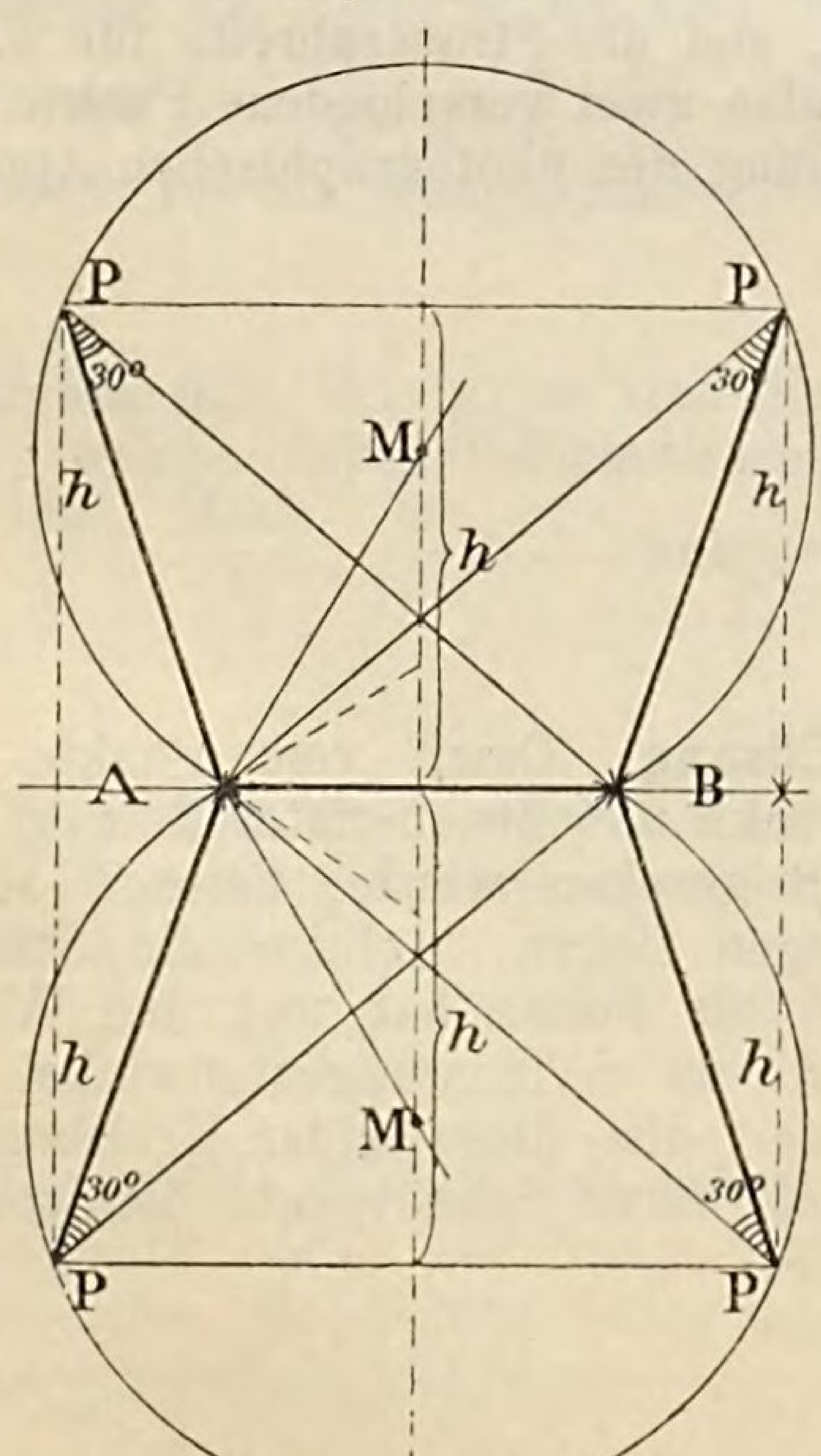
findet man, dass die Logenreihen des Theaters (im antiken Amphitheater sämtliche Sitzreihen) in Kreisbogen angeordnet sein müssen. Wenn der Gesichtswinkel kleiner als 90° sein soll, so darf dieser Kreisbogen kein Halbkreis werden, sondern muss mehr als 180 Bogengrade besitzen. Daher erklärt es sich, dass die Logenreihen in unmittelbarer Nähe der Rampe (beim „Proszenium“) sogar nach auswärts laufen. Die Inhaber jener Plätze sehen also zwar nicht den gesamten I n n e n r a u m der Bühne, wohl aber erscheint auch ihnen die Breite der Rampe unter demselben Gesichtswinkel, wie allen übrigen Zuschauern.

also diesen Kreis, und stelle die Stühle in einem Kreisbogen so auf, dass für den Kreisbogen die Bildbreite zur Sehne wird, und der gewünschte Gesichtswinkel zum Peripheriewinkel oder zum Sehnentangentenwinkel.

Aufgabe 56. Es soll ein Punkt gesucht werden, welcher von einer gegebenen Strecke AB den gegebenen Abstand h hat, und von welchem aus diese Strecke unter einem Gesichtswinkel von $\alpha = 30^0$ erscheint.

Erkl. 442. Nach Satz 70a und 70b im III. Teile dieses Lehrbuches haben alle Punkte der einen von zwei Parallelen von der andern einen Abstand, welcher gleich ist dem Abstande der beiden Parallelen; bezw. der Abstand zweier Parallelen wird umgekehrt angegeben durch den stets gleichgrossen senkrechten Abstand zwischen einem Punkte der einen Parallelen und der andern Geraden.

Figur 180.



Erkl. 443. Die Konstruktion der Parallelen sowie des Winkels von 30° im Punkte A und der Senkrechten auf AE und der Mittelsenkrechten auf AB geschieht nach den Aufgaben 170

Auflösung. I. A n a l y s i s. Angenommen Punkt P sei der gesuchte Punkt, so muss derselbe:

1) Um den Abstand h von der Strecke AB zu haben: auf einer Parallelen zur Strecke AB im Abstande h liegen.

2) Um die Strecke AB unter Winkel α zu sehen, muss der Punkt P ferner auf einem Kreisbogen liegen, welcher die Strecke AB als Sehne hat, und den Winkel α als Peripheriewinkel über dieser Sehne oder als Sehnentangentenwinkel an dieser Sehne.

II. A u s f ü h r u n g. Man zeichne beiderseits AB die Parallele im Abstande h, trage an der Strecke AB in einem Endpunkte A den Winkel α beiderseits an und errichte auf dem andern Schenkel AE als Tangente in A die Senkrechte und auf AB die Mittelsenkrechte. Um die Schnittpunkte M beider Linien zeichne man die Kreisbogen mit Radius $MA = MB$, so haben die Schnittpunkte P dieser Kreisbogen mit den Parallelen die verlangte Eigenschaft.

III. B e w e i s. Da Punkt P auf der Parallelen zu AB im Abstande h liegt, so ist der Abstand gleich h. Da ferner der Punkt P auf dem Kreise liegt, welcher AE zur Tangente und in A den Winkel $EAB = \alpha = 30^0$ zum Sehnentangentenwinkel hat, so muss auch der Winkel $APB = EAB = 30^0$ sein.

IV. D e t e r m i n a t i o n. Da die ganze Figur der Aufgabe zur Strecke AB als Achse symmetrisch ist, so erhält man jedenfalls eine gerade Anzahl von Lösungen, nämlich v i e r L ö s u n g e n, wenn die Parallelen jeden Kreisbogen zweimal schneiden, z w e i L ö s u n g e n, wenn die Parallelen die Kreisbogen berühren, k e i n e L ö s u n g, wenn die Höhe h so gross ist, dass die Parallelen die Kreise gar nicht mehr treffen.

und folgenden des III. Teiles. — Zur Zeichnung der Parallelen im Abstande h wird man am besten die Mittelsenkrechte selbst benutzen, um auf ihr die Länge h abzutragen. — Eine weitere Vereinfachung der Ausführung ist darin zu finden, dass die Linien AM mit AB Winkel bilden müssen $= MAE - MAB = 90^0 - 30^0 = 60^0$. Da der Winkel von 60^0 einfacher zu konstruieren ist, als jener von 30^0, so kann man also auch unmittelbar die Strecken AM unter 60^0 an AB antragen.

Erkl. 444. Die Grenze für die Länge h, bei welcher Berührung stattfindet, ist die Strecke der Mittelsenkrechten vom Mittelpunkt der Strecke AB bis zum oberen Schnittpunkte mit dem Kreise. Man kann also sagen, dass jene Grenze die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks sei, das als andere Kathete die Hälfte der Strecke AB hat und als Gegenwinkel der letzteren einen Winkel von 15^0; denn der ganze Winkel $ACB = 30^0$, also der Winkel $MCA = 15^0$. Ist h grösser, so erhält man keine Lösung, ist h kleiner, vier Lösungen.

Aufgabe 57. Ein an einer Strasse stehendes Gebäude (die Fassade eines Neubaues) soll vom gegenüberliegenden Gehwege dieser Strasse aus photographiert werden, so dass die ganze Front unter einem Winkel von 60^0 gesehen wird.

Erkl. 445. Wenn die Strassenbreite die Grenze für h in Erkl. 444 übertrifft, so muss der Photograph den gegenüberliegenden Gehweg verlassen und einen solchen Punkt der Fahrstrasse selbst als Aufstellungsort wählen, welcher auf dem zu konstruierenden Hilfskreise liegt.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe bildet die genaue Wiederholung der vorhergehenden Aufgabe, indem 60^0 statt 30^0 eintritt, und die Strassenbreite für h. Man erhält also zwei verschiedene Punkte für die Aufstellung des photographischen Apparates.

Aufgabe 58. Es seien zwei aneinanderstossende Strecken a und b gegeben und zwei Winkel α und β. Man soll einen Punkt P suchen, von welchem aus die Strecken a und b unter den Winkeln α und β gesehen werden.

Erkl. 446. Die vorstehende Aufgabe ist nach ihrem Entdecker benannt mit dem Namen „Pothenot'sche Aufgabe". Ihre Lösung bildet eine zweimalige Anwendung der Auflösung der Aufgabe 56, wobei nicht der Schnittpunkt der Parallelen (mit dem Kreise), sondern derjenige zweier Kreise der gesuchte ist.

Auflösung. Damit vom Punkte P aus die Strecke a bezw. b unter dem Winkel α bezw. β gesehen werde, muss P auf dem Kreisbogen liegen, welcher die Strecke a bezw. b als Sehne hat und den Winkel α bezw. β als Sehnentangentenwinkel. Man konstruiert also diese beiden Kreisbogen und erhält als deren Schnittpunkt den gesuchten Punkt P.

Aufgabe 59. Ein Eckhaus soll so photographiert werden, dass die beiden ungleichlangen Fronten unter gleichen Winkeln von gegebener Grösse α gesehen werden.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe bildet die genaue Wiederholung der vorhergehenden Aufgabe, indem der Winkel der Strecken a und b ein Rechter ist, und $\alpha = \beta$.

Aufgabe 60. Ueber eine gegebene Strecke AB soll ein Winkel α derart gestellt werden, dass die Halbierungslinie desselben durch einen gegebenen Punkt C der Strecke geht.

Erkl. 447. Dass die drei Kreise durch denselben Punkt gehen müssen, folgt daraus, dass vom Schnittpunkt der beiden ersten aus die Linien nach A und B den $\sphericalangle \alpha$, nach A und C den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ bilden, also die Linien nach B und C ebenfalls den Winkel $\frac{\alpha}{2}$. —

Wird C Mittelpunkt von AB, so wird das Dreieck ABS gleichschenklig.

Auflösung. Der Scheitel S des Winkels muss liegen:

1) auf einem Kreise ABS mit Sehne AB und Peripheriewinkel α,

2) auf einem Kreise ACS mit Sehne AC und Peripheriewinkel $\frac{\alpha}{2}$,

3) auf einem Kreise CSB mit Sehne BC und Peripheriewinkel $\frac{\alpha}{2}$.

Der gemeinsame Schnittpunkt dieser drei Kreise ist der gesuchte Punkt S.

Aufgabe 61. Es soll ein Dreieck konstruiert werden, von welchem die Grundseite AB der Lage nach gegeben ist, und ausserdem die Gegenwinkel γ und die zugehörige Höhe h.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist die genaue Wiederholung der Aufgabe 56, wobei die Strecke AB die Grundseite, der Winkel APB der $\sphericalangle \gamma$ ist.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 62. Wie gross sind die Peripheriewinkel über $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \cdots \frac{m}{n}$ Teilen des Vollkreises als Standbogen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 52 und Satz 16.

Aufgabe 63. Wie gross sind die Bogenstücke, welche durch Peripheriewinkel von $\frac{R}{10}, \frac{180^0}{7}, \frac{360^0}{11}, \frac{2}{3}R \cdots$ ausgeschnitten werden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 53.

Aufgabe 64. Man soll durch Hilfe eines Kreises ohne Winkelhalbierung einen Winkel von 30^0 herstellen.

Andeutung. Man benutze Satz 16, dass der Peripheriewinkel die Hälfte des Mittelpunktswinkels auf gleichem Bogen ist.

Aufgabe 65. Man soll auf einfache Weise das Doppelte eines gegebenen Peripheriewinkels oder die Hälfte eines gegebenen Mittelpunktswinkels zeichnen.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 66. Es soll auf einem gegebenen Kreise ein Punkt gesucht werden, von welchem eine gegebene Strecke unter einem rechten Winkel gesehen wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 56.

Aufgabe 67. Es soll ein Winkel von gegebener Grösse α so über eine gegebene Strecke a gestellt werden, dass sein Scheitel möglichst nahe oder möglichst ferne einem gegebenen Punkte oder einer gegebenen Geraden sei.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 50 und 3 (vergl. Figur 167).

Aufgabe 68. Man soll unter allen durch einen gegebenen Punkt A gehenden Kreisen einen solchen heraussuchen, welcher eine gegebene Gerade g im gegebenen Punkte B berührt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe bildet die Grundlage aller vorhergehenden und nachfolgenden Aufgaben über den Peripheriewinkelkreis.

Aufgabe 69. Man soll beweisen, dass die Halbierungslinie eines Peripheriewinkels den Standbogen halbiert, und dass umgekehrt die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkt des Standbogens den Peripheriewinkel halbiert.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf Satz 16e.

Aufgabe 70. Wo muss der Scheitel eines Winkels liegen, wenn dessen Halbierungslinie einen durch den Winkel laufenden Kreisbogen halbiert?

Andeutung. Man vergleiche die vorhergehende Aufgabe.

Aufgabe 71. Es soll ein Punkt gesucht werden, von welchem aus zwei beliebig gelegene Strecken a und b unter Winkeln von gegebener Grösse α und β gesehen werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 58.

Aufgabe 72. Von welchem Punkt eines Platzes sieht man zwei an dessen Rand stehende Gebäude unter einem gegebenen Winkel von je α Grad?

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 73. Ein gegebener Winkel soll über eine gegebene Strecke so gestellt werwerden, dass eine beliebige gegebene Teilungslinie des Winkels die Strecke halbiert.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 60.

Aufgabe 74. Es sollen Dreiecke konstruiert werden, von welchen ein Winkel gegeben ist, seine Gegenseite nach Lage und Grösse, und eine weitere Seite, Winkel, Mittellinie u. s. w.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 61.

Anmerkung 5. Weitere zu diesem Abschnitte gehörige Konstruktionsaufgaben sind die Aufgaben 578 bis 588 u. f. in Müllers Lehrbuch der Konstruktionsaufgaben I.

5) Aufgaben über die Winkel von Sehnen, Sekanten und Tangenten eines Kreises.

(Zu Abschnitt A, 3 b.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 75. Man soll die Aufgabe 14 auf Grund des Satzes 17 wiederholen.

Erkl. 448. Man vergleiche zu der nebenstehenden Auflösung die Buchstabenbezeichnung in Figur 170. Je zwei der gegenüberliegenden Bogenstücke sind supplementär.

Auflösung. Sind AB und CD in Figur 170 zwei senkrechte Sehnen, so ist nach Satz 17:

$$\sphericalangle ASD = BSC = ASC = BSD = 90^0$$
$$= \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD}).$$

Folglich ist wieder, wie bei Aufgabe 14 gefunden wurde:

$$AD + BC = AC + BD = 180^0.$$

Aufgabe 76. Zwei beliebige Geraden werden von einem Kreise geschnitten. Welche Beziehungen treten auf zwischen den Winkeln der Geraden und den ausgeschnittenen Kreisbogen?

Erkl. 449. Jeder Nebenwinkel eines Peripheriewinkels ist ein Sehnenwinkel, dessen ausgeschnittene Bogen am einen Ende zusammenstossen, oder dessen Scheitel eben auf die Peripherie des Kreises gerückt ist. Von den vier Kreisbogen, welche in den beiden andern Lagen ausgeschnitten werden, wird einer gleich Null, so dass dessen Endpunkte im Scheitel des Schnittwinkels der gegebenen Geraden zusammenfallen.

Auflösung. Der Kreis kann den Scheitel des Winkels ausschliessen oder einschliessen oder selbst durch den Winkelscheitel gehen. Im letzten Falle entstehen drei Kreisbogen, deren einer gleich dem Doppelten des Winkels als eines Peripheriewinkels ist; die Summe der beiden anderen Bogen aber ist gleich jedem der Nebenwinkel des Peripheriewinkels.

In den beiden ersten Fällen aber ist jeder Winkel der beiden Geraden als Sekantenwinkel oder Sehnenwinkel gleich der halben Differenz bezw. halben Summe der ausgeschnittenen Kreisbogen.

Aufgabe 77. Man soll die Sätze 7 und 12 als besondere Fälle des Satzes 17 bestätigen.

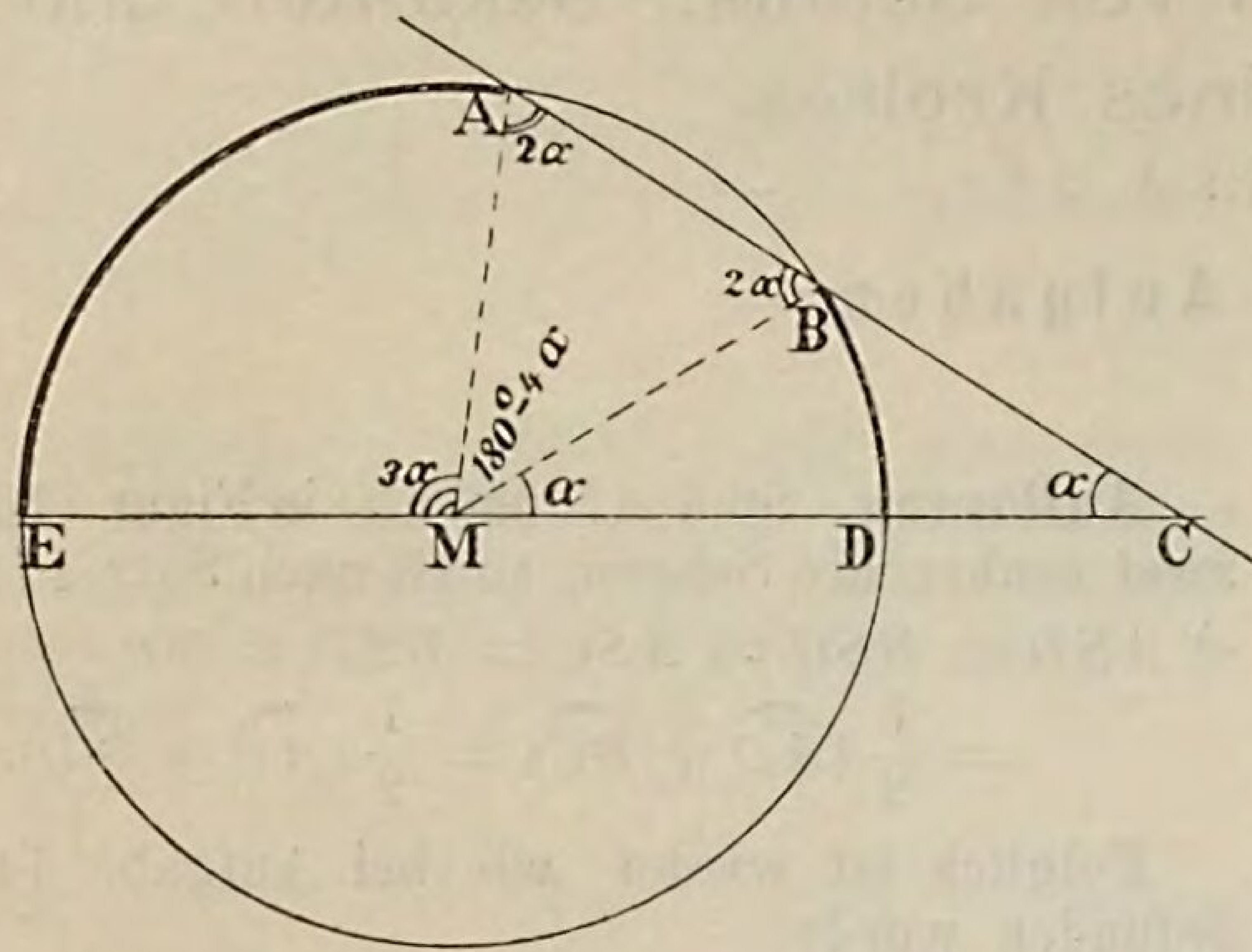
Erkl. 450. Wie aus dieser und der vorigen Aufgabe hervorgeht, ist der Satz 17 der allgemeinste der Sätze über Winkel beim Kreise. Denn er enthält als besondere Fälle sämtliche Aussagen, welche über irgendwelche Winkelbeziehungen aufgestellt wurden: Der Radius senkrecht zur Tangente, die Grösse des Tangentenwinkels, des Peripheriewinkels, die durch parallele Sehnen und Tangenten ausgeschnittenen Bogen, u. s. w.

Auflösung. Sind zwei Sehnen oder Tangenten parallel, so können sie angesehen werden als zwei Sekanten mit unendlich fernem Schnittpunkte, also mit einem Winkel gleich Null. Daher muss die halbe Differenz der zwischen denselben liegenden Bogen gleich Null sein, oder die beiden Bogen müssen gleichgross sein. Daher liegen zwischen parallelen Sekanten und Tangenten gleiche Bogen; und da letztere zusammen einen Vollkreis bilden, so bildet jeder einen Halbkreis, ihre Endpunkte einen Durchmesser.

Aufgabe 78. Was für Kreisbogen liegen zwischen einem Durchmesser und einer solchen Sehne, auf deren Verlängerung dieser Durchmesser eine Strecke gleich dem Kreisradius abschneidet?

Auflösung. Ist in Figur 181 auf der Sehne AB die Verlängerung $BC = MB = r$, so ist das Dreieck MBC gleichschenklig, also $\sphericalangle BMC = BCM = \alpha$. Ferner ist der

Figur 181.



Winkel ABM als Aussenwinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks gleich:

$$\sphericalangle BMC + BCM = 2\alpha,$$

also im gleichschenkligen Dreieck MAB auch $\sphericalangle BAM = 2\alpha$, folglich der Winkel an der Spitze:

$$\sphericalangle AMB = 180 - (MAB + MBA) = 180 - 4\alpha,$$

und derselbe mit dem benachbarten Winkel BAC zusammen gleich:

$$180 - 4\alpha + \alpha = 180 - 3\alpha.$$

Daher ist der Winkel:

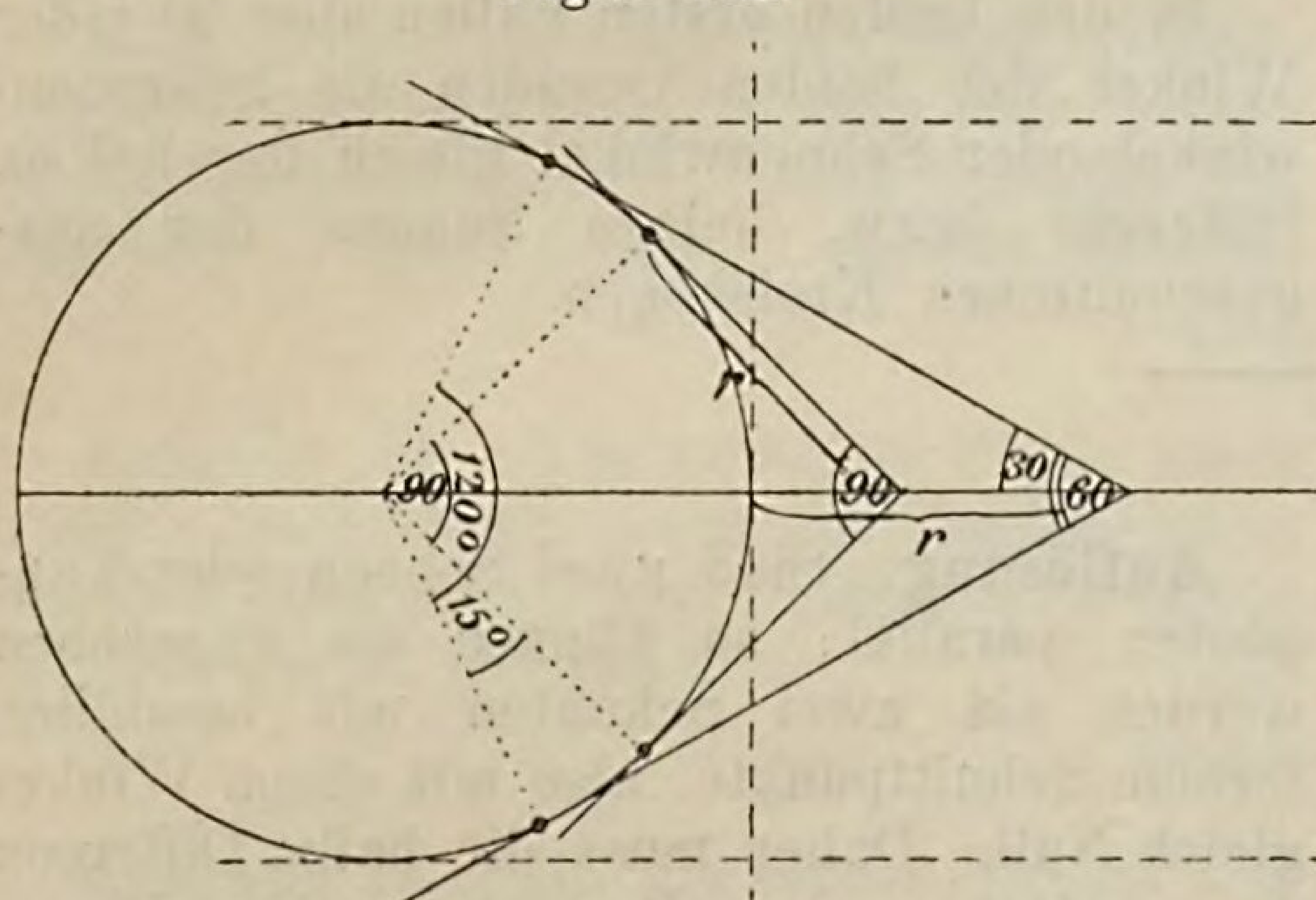
$$AME = 180^0 - \sphericalangle AMD$$
$$= 180 - (180 - 3\alpha) = 3\alpha.$$

Folglich ist der Bogen $\widehat{AE}$ das Dreifache des Bogens $\widehat{BD}$, da der Mittelpunktswinkel $AME = 3 \cdot \sphericalangle BMD$ ist.

Erkl. 451. Die nebenstehende Auflösung ist dazu verwendbar, zu einem gegebenen Winkel $\alpha = MCB$ das Dreifache zu zeichnen, nämlich den Winkel AME, nicht aber umgekehrt. Denn wenn $\sphericalangle AME = 3\alpha$ gegeben ist, so lässt sich nicht durch elementare Konstruktion die Lage derjenigen Sehne finden, bezw. derjenige Punkt C, wofür $CB = r$ wird.

Aufgabe 79. Welche Grössen durchläuft der Tangentenwinkel bei Entfernung des Scheitels vom Kreise?

Figur 182.



Erkl. 452. Bei gleichbleibendem Zentralabstand des Winkelscheitels wird der Tangentenwinkel desto grösser, je grösser der Radius des Kreises ist, und umgekehrt. Denn dieser Radius ist Gegenkathete in dem rechtwinkligen Dreieck, welches die Hälfte des Tangentenwinkels enthält. Bei gleichbleibender Hypotenuse wird aber diese Winkelhälfte desto grösser, je grösser die Gegenkathete.

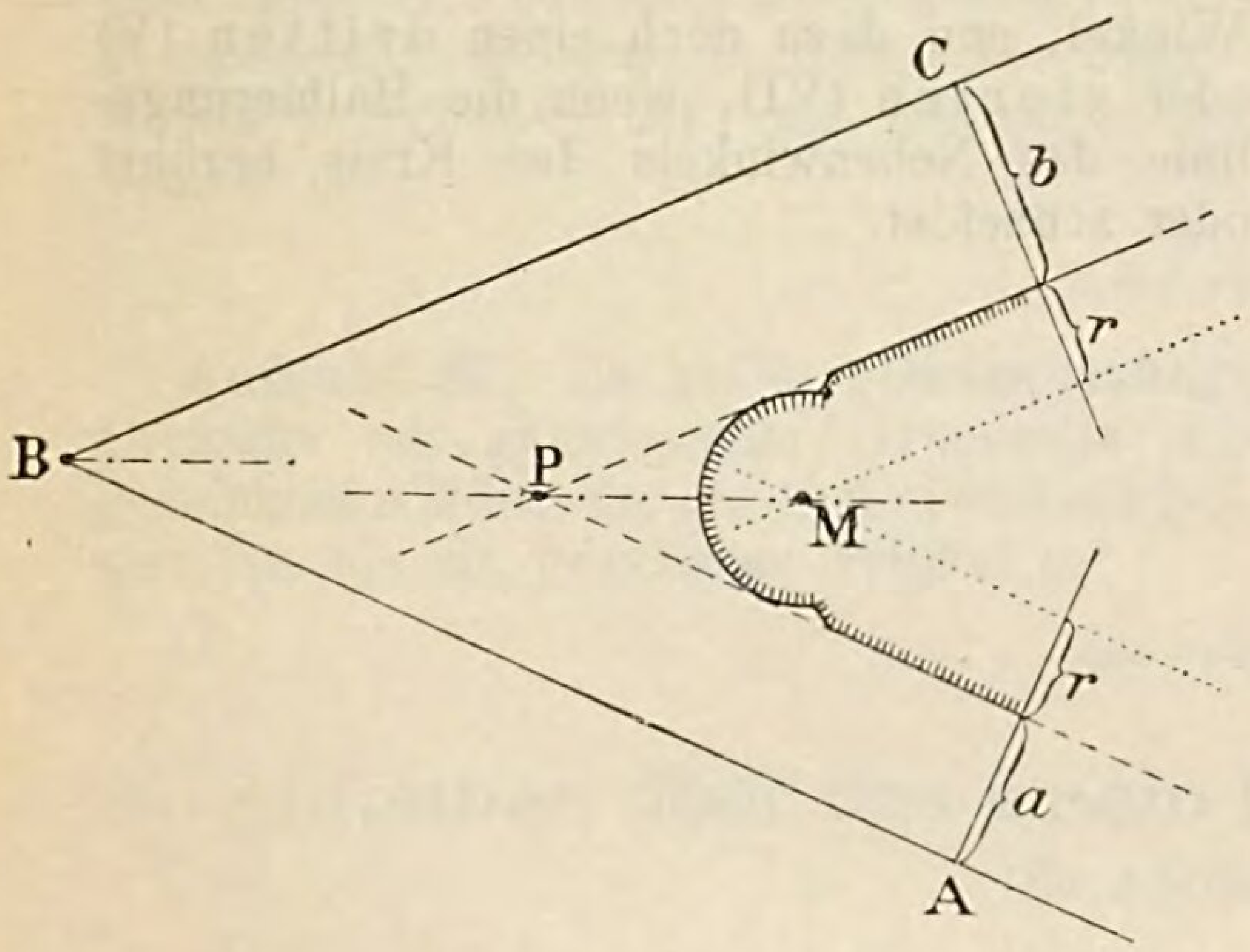
Erkl. 453. Nach Antwort der Frage 108 des III. Teiles hat ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse doppelt so gross ist, als eine Kathete, ausser dem rechten Winkel noch einen von 60^0 und — gegenüber der genannten Kathete — einen von 30^0.

Auflösung. Die Grösse des Tangentenwinkels ist abhängig von der Grösse des Radius und derjenigen des Zentralabstandes seines Winkelscheitels. Vom Zentralabstand r bis unendlich fällt der Tangentenwinkel von 180^0 bis Null (Winkel der parallelen Tangenten).

Der Tangentenwinkel hat 90^0, wenn das Deltoid der Tangenten mit den Berührungsradien zum Quadrat wird, wenn also die Tangentenlänge gleich dem Radius wird, die Berührungsradien senkrecht stehen. — Ist der Zentralabstand des Winkelschenkels gleich $2r$, so bildet derselbe mit Tangente und Radius ein rechtwinkliges Dreieck nach Frage 108 des III. Teiles. Folglich ist dann die Winkelhälfte gleich 30^0, der Tangentenwinkel selbst ein Winkel von $60^0 = \frac{2}{3}$ R der Mittelpunktswinkel $120^0 = \frac{4}{3}$ R.

Aufgabe 80. Es soll ein Eckhaus gebaut werden, dessen Fluchtlinie in der einen Strasse $a\left(3\frac{1}{2}\right)$ Meter, in der andern b (5) Meter, hinter der Strassenkante zurückstehen muss. Wohin käme die Ecke des Hauses, und wohin der Mittelpunkt eines kreisförmigen Erkers vom Radius r (2) Meter, durch welchen die Ecke abgerundet werden soll.

Figur 183.



Auflösung. Angenommen ABC in Fig. 183 seien die Strassenkanten, P der verlangte Eckpunkt, M der gesuchte Mittelpunkt des Kreises, dann ist P der Schnittpunkt der beiden Fluchtlinien, und diese selbst sind parallel zur Strassenkante in Abstand a bezw. b Meter von AB und BC. Ferner müssen die von M auf die beiden Fluchtlinien gefällten Senkrechten die gleiche Länge $= r$ haben, also liegt M in Abständen $a + r$ bezw. $b + r$ von BC.

Man errichte daher auf AB und BC senkrechte Strecken von der Länge a und $a + r$ bezw. b und $b + r$, ziehe durch deren Endpunkte die Parallelen zu AB und BC, und erhält so P als Schnittpunkt der ersteren, M als Schnittpunkt der letzteren.

Da jeder Punkt einer Geraden denselben Abstand von der Parallelen hat, so hat P von den Strassenkanten AB und BC die Abstände a und b; und M von den Fluchtlinien den beiderseits gleichen Abstand r; folglich wird ein Kreis um M mit Radius r die beiden Fluchtlinien berühren.

Erkl. 454. Je spitzer der Winkel der Strassenkanten ABC ist, desto weiter muss die Ecke des Hauses vom Winkelschenkel entfernt liegen.

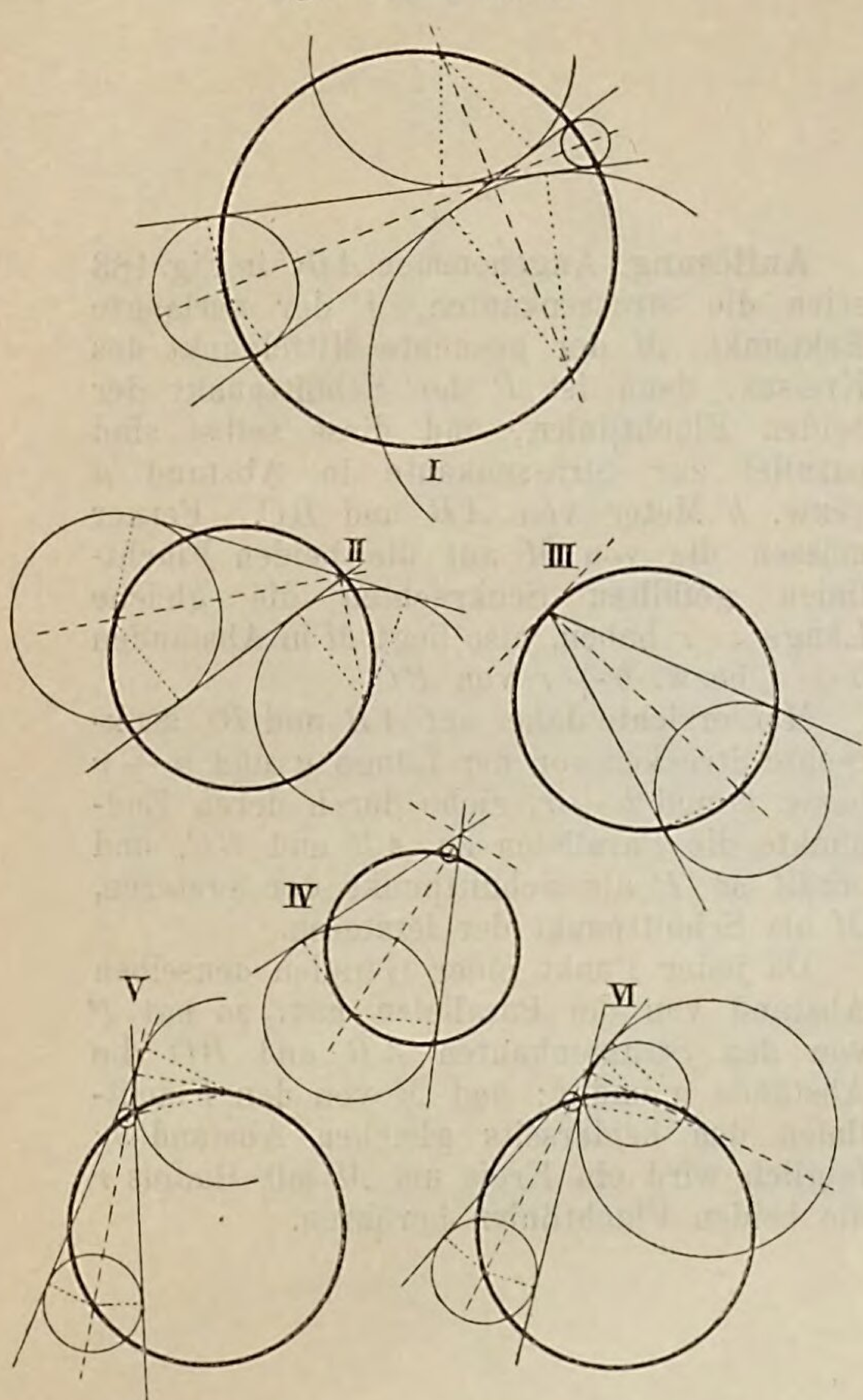
Sind die Fluchtlinien des Hauses konstruiert, so kann der Punkt M auch auf andere Weise gefunden werden. Da nämlich die beiden Fluchtlinien einen Tangentenwinkel für den Kreis um M bilden, so liegt M auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels. Halbiert man also den Winkel der Fluchtlinien, so braucht man nur noch die eine der beiden Parallelen im Abstande r zu zeichnen, und erhält als deren Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden den Punkt M.

Dagegen ist zu beachten, dass die Halbierungslinie des Winkels ABC nicht durch die Punkte P und M geht. Sie ist parallel zur Halbierungslinie bei P, und fällt nur dann mit ihr zusammen, wenn die Abstände a und b gleichgross werden.

Aufgabe 81. Es sei gegeben ein Kreis und zwei beliebige Sekanten desselben. Man soll einen Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt auf dem gegebenen Kreise liegt, und welcher die beiden gegebenen Sekanten desselben berührt.

Auflösung. Damit der gesuchte Kreis die beiden gegebenen Sekanten berührt, muss sein Mittelpunkt auf einer der Halbierungslinien des Winkels der beiden Sekanten liegen; folglich ist er der Schnittpunkt des gegebenen Kreises mit einer dieser Winkelhalbierenden (siehe Figur 184).

Figur 184 I bis VI.



Man erhält immer vier Lösungen, wenn der Schnittpunkt der Sekanten innerhalb des gegebenen Kreises liegt (I). Rückt der Sekantenschnittpunkt auf die Peripherie (II), so fallen zwei (und wenn die eine Winkelhalbierende Durchmesser wird [III], sogar drei) Schnittpunkte in diesen Peripheriewinkelscheitel zusammen, und diese zwei (bezw. drei) Kreise werden unendlich klein mit Radius Null. Liegt der Schnittpunkt der Sekanten ausserhalb des Kreises, so erhält man jedenfalls zwei (IV) Kreise in einem Winkel, und dazu noch einen dritten (V) oder vierten (VI), wenn die Halbierungslinie des Nebenwinkels den Kreis berührt oder schneidet.

Erkl. 455. Die vorliegende Aufgabe, deren Auflösung an sich einfach ist, liefert ein besonders bemerkenswertes Beispiel für die Determination einer geometrischen Aufgabe bei den verschiedenen Fällen der gegebenen Stücke. — Man hat sich vor dem Irrtum zu hüten, als ob die Schnittpunkte der Sekanten mit dem gegebenen Kreise Berührungspunkte der gesuchten Kreise würden. Dies trifft nur im Falle der Figur 184 III allgemein zu wegen des rechten Winkels über dem Durchmesser.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 82. Zu einem gegebenen Kreisbogen AC (siehe Figur 170) soll ein supplementärer Bogen vom gegebenen Punkte B aus abgetragen werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 75.

Aufgabe 83. Man soll das Dreifache eines gegebenen Winkels α zeichnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 78.

Aufgabe 84. Man soll zwei senkrechte Tangenten an einen Kreis zeichnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 79.

Aufgabe 85. Man soll zu einer vorhandenen Tangente eines Kreises eine zweite zeichnen, welche jene unter einem Winkel von 60^0 schneidet.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 86. Es sollen über gegebener Grundseite AB Dreiecke mit gegebener Höhe h gezeichnet werden, in denen der Gegenwinkel γ grösser ist, als ein gegebener Winkel φ.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 56 und den Sätzen 17a und b.

Aufgabe 87. Es sollen gleichschenklige Dreiecke mit gemeinsamer Grundseite AB gezeichnet werden, deren Scheitelwinkel kleiner ist, als ein gegebener Winkel φ.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

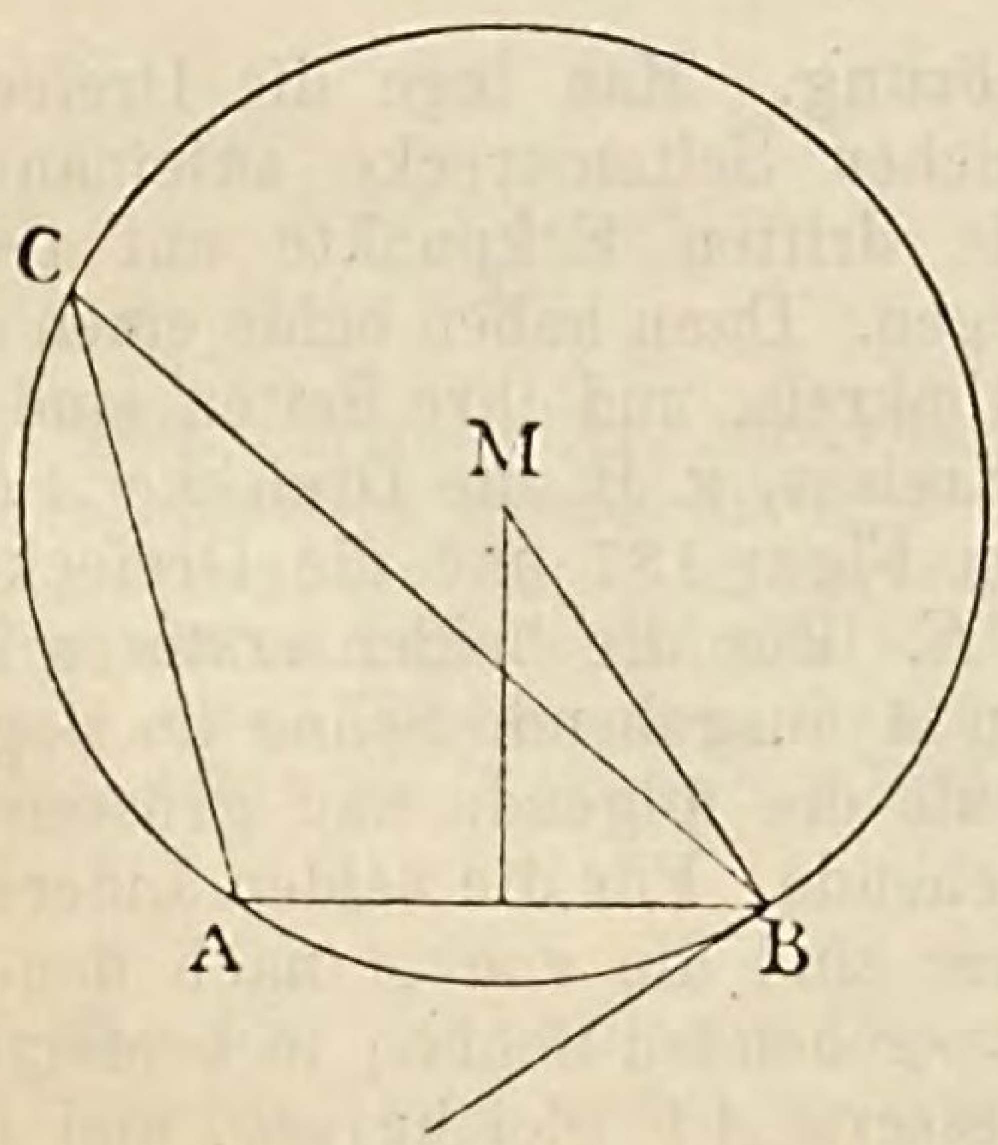
6) Aufgaben über das einem Kreise eingeschriebene Dreieck.

(Zu Abschnitt A, 4 a.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 88. Man soll den Umkreis eines Dreiecks konstruieren, ohne mehr als eine Mittelsenkrechte zu zeichnen.

Figur 185.



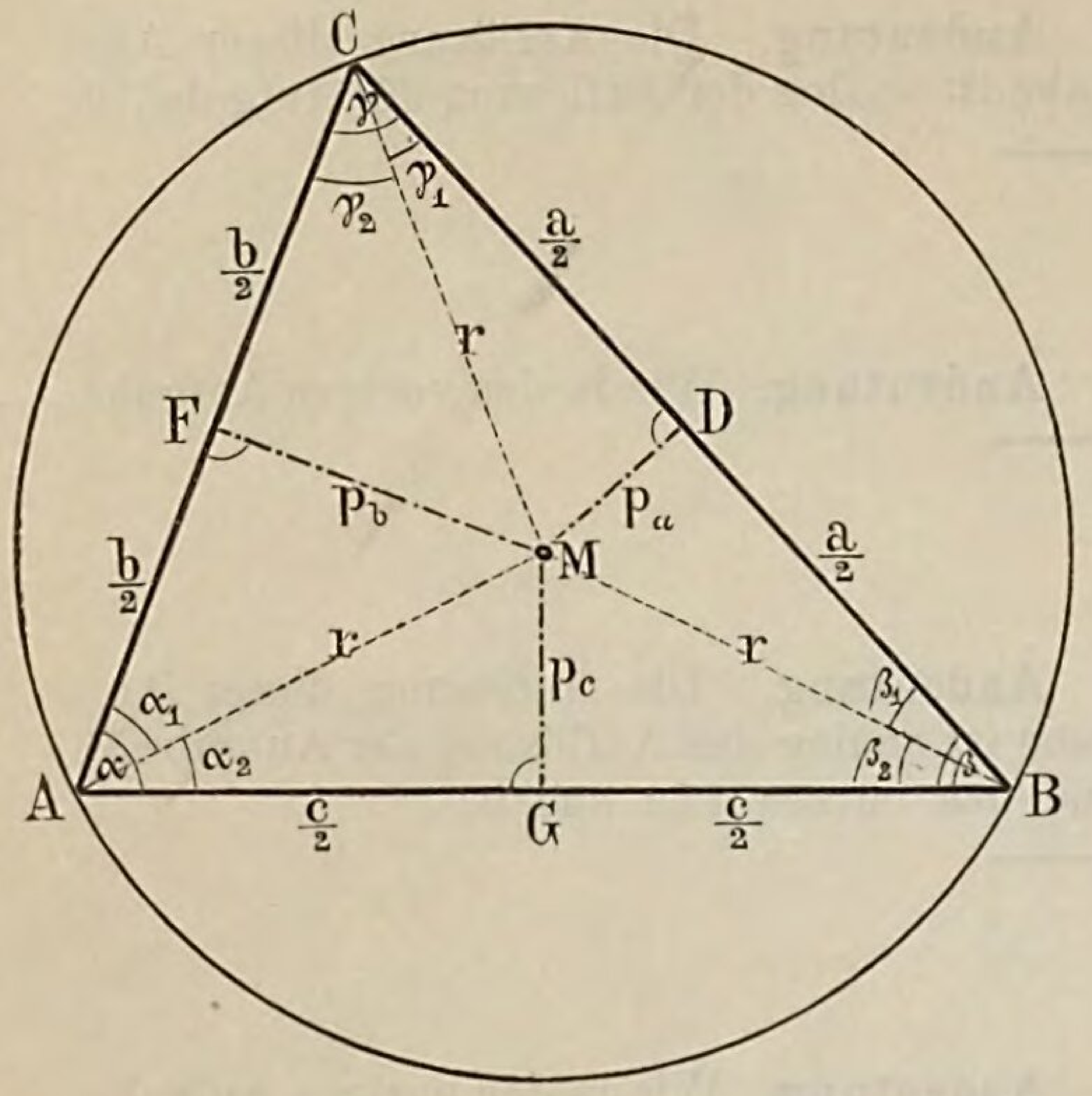
Auflösung. Da der Radius MB des Umkreises (siehe Figur 185) senkrecht steht auf der Tangente in B, und letztere mit AB einen Sehnentangentenwinkel bildet von der Grösse $= \sphericalangle ACB$, so trage man im Eckpunkte B den Winkel ACB nach aussen an, errichte auf dem Schenkel die Senkrechte, und erhält so Punkt M als Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Mittelsenkrechten.

Erkl. 456. Diese Auflösung wird besonders dann Anwendung finden, wenn der dritte Eckpunkt C des Dreiecks unzugänglich ist, denn der Winkel γ kann aus α und β konstruiert werden.

Aufgabe 89. Man soll die in Erkl. 116 enthaltenen Aussagen über die Lage des Zentrums der Ecken beweisen.

Auflösung. Ist die Reihenfolge der Dreiecksseiten in Figur 186: $a > c > b$, so haben

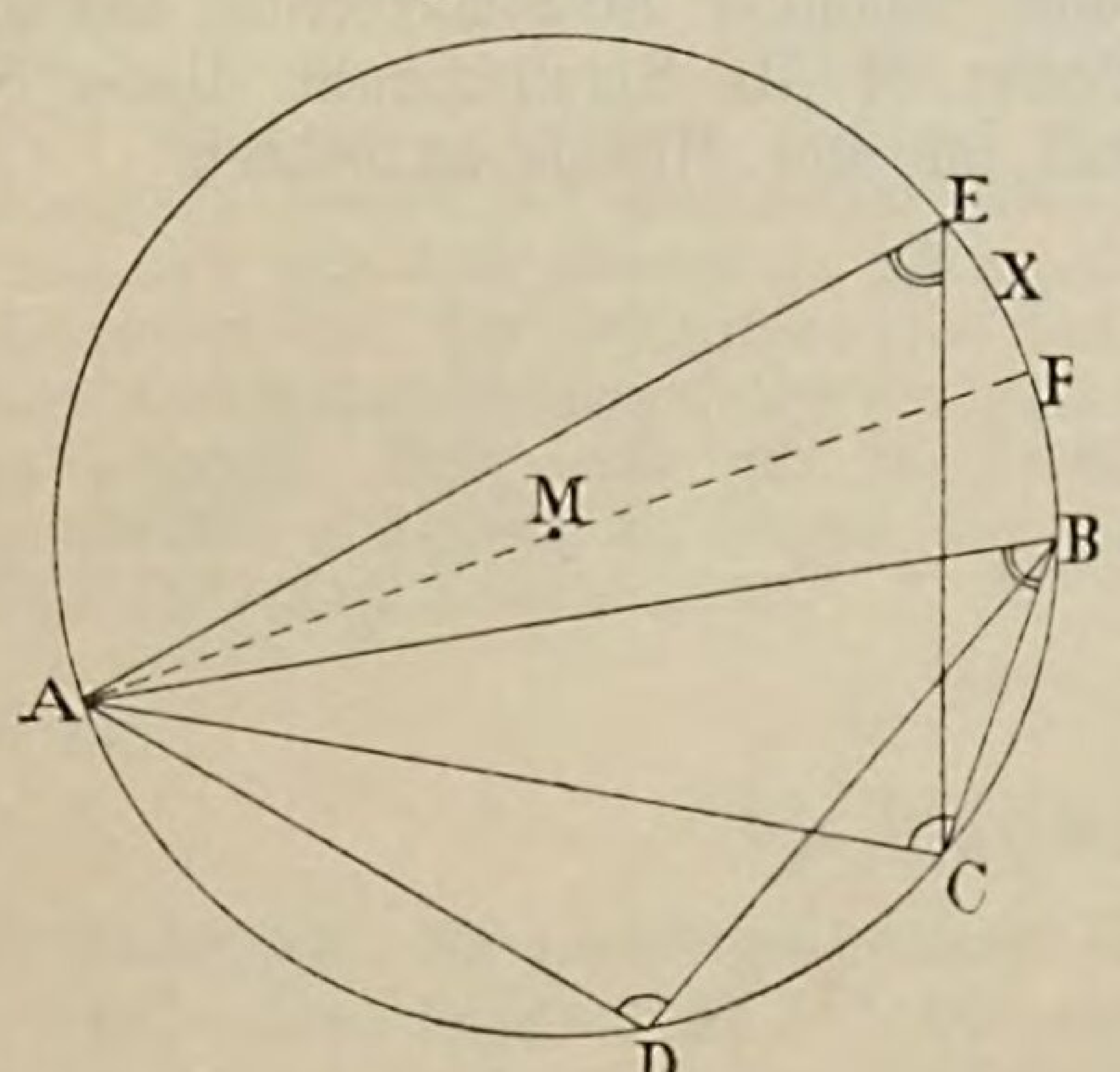
Figur 186.



Erkl. 457. Dieselbe Beweisfolge lässt sich nicht nur an der Ecke C, sondern an jeder Ecke des Dreiecks durchführen mittels der an derselben entstehenden rechtwinkligen Dreiecke. Dieselbe gilt auch ebenso für das stumpfwinklige Dreieck und für die besonderen Dreiecke, indem beim gleichschenkligen Dreieck die gleichen Seiten auch gleiche Mittelsenkrechten und Teilwinkel ergeben, und die Winkelhalbierende mit dem Radius zusammenfällt.

Aufgabe 90. Man soll zwei Dreiecke vergleichen, welche eine Seite und deren Gegenwinkel, also den Umkreis gleich haben.

Figur 187.



Erkl. 458. Ganz ohne die Beschränkung auf stumpfwinklige Dreiecke gilt die bemerkenswerte Thatsache, dass wenn zwei Dreiecke eine Seite und deren Gegenwinkel gleich haben, der Umkreis beider Dreiecke denselben Radius hat. Denn wenn man die Dreiecke in neben-

die rechtwinkligen Dreiecke an der Ecke C, nämlich MCD und MCF die Hypotenuse $MC = r$ gemeinsam, aber das Dreieck MCD hat die Kathete $CD = \frac{a}{2}$ grösser als die Kathete $CF = \frac{b}{2}$ im Dreieck MCF. Folglich ist nach Aufgabe 134 des III. Teiles in demjenigen Dreieck die andere Kathete und deren Gegenwinkel der kleinere, wo die vorige Kathete die grösste ist.

Daher ist wegen $a > b$, auch $MD < MF$ und $\sphericalangle \gamma_1 < \gamma_2$, d. h. die kürzere Dreiecksseite hat die längere Mittelsenkrechte, und die Winkelhalbierende des Dreieckswinkels γ verläuft in demjenigen Teilwinkel γ_2, welcher der kleineren Dreiecksseite anliegt.

Auflösung. Man lege die Dreiecke mit der gleichen Seitenstrecke aufeinander, so dass die dritten Eckpunkte auf derselben Seite liegen. Dann haben beide einen gemeinsamen Umkreis, und ihre Seiten sind Sehnen dieses Kreises, z. B. die Dreiecke ABC und ABD in Figur 187 und die Dreiecke ACB und ACE. Für die beiden ersteren ist dann jede von A ausgehende Sehne im Bogen AB kleiner als die folgende und grösser als die vorhergehende. Für die beiden anderen Dreiecke aber sind die von A nach dem Bogen EFB ausgehenden Sehnen je beiderseits des Durchmessers AF gleichgross, und man erhält keine sichere Beziehung zwischen einer Sehne mit allen folgenden oder vorhergehenden. Daher kann man folgende Aussage machen:

Satz. Wenn zwei Dreiecke einen stumpfen Winkel und dessen Gegenseite bezüglich gleich haben, so hat dasjenige Dreieck eine grössere zweite Seite oder einen grösseren zweiten

stehender Weise aufeinander legt, so werden die beiden Gegenwinkel Peripheriewinkel in einem und demselben Kreise.

Erkl. 459. Der nebenstehende Satz bildet die Ergänzung zu den Sätzen der Aufgaben 198 bis 200 im III. Teile über die sogenannte Inkongruenz der Dreiecke.

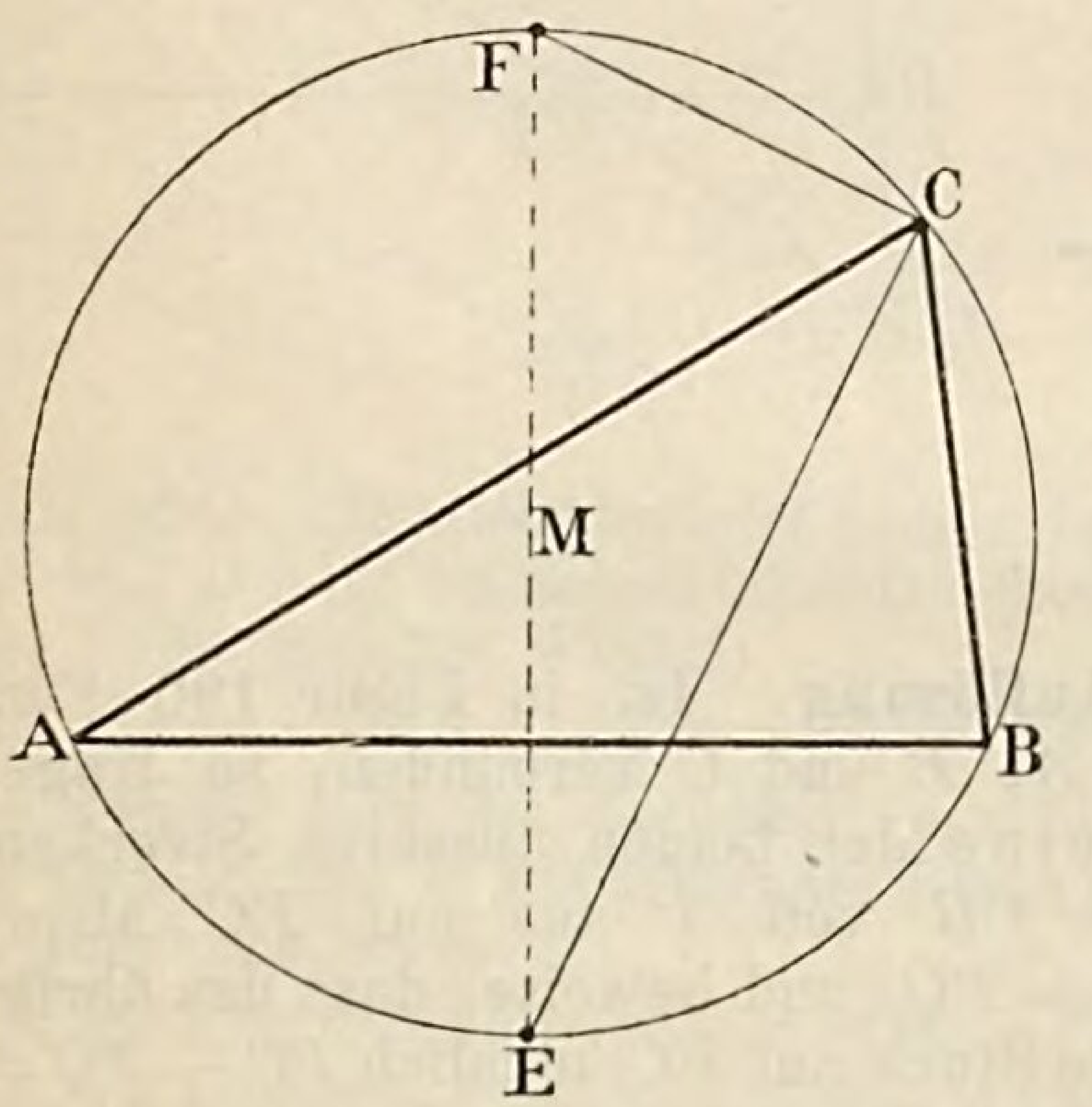
Es ist also in Figur 187 in den Dreiecken ABC und ABD, wo $\sphericalangle C = \sphericalangle D > 90^0$: Seite $AC > AD$, und $\sphericalangle ABC > ABD$, weil Seite $BC < BD$ oder $\sphericalangle BAC < BAD$.

Dagegen ist in den Dreiecken ACB und ACE, wo $\sphericalangle ABC = \sphericalangle E < 90^0$: Seite $AB = AE$, weil $FB = FE$, obgleich $\sphericalangle ACB > ACE$ und Seite $CB < CE$. Und für einen Punkt X zwischen E und F wäre sogar $AX > AB$, obwohl $\sphericalangle ACX < ACB$ ist.

Winkel, in welchem die dritte Seite oder Winkelgrösse die kleinere ist, oder in welchem der Gegenwinkel oder die Gegenseite dieser zweiten Seite oder Winkels grösser ist — und umgekehrt.

Aufgabe 91. In welchem Punkte wird der Umkreis eines Dreiecks durch eine Winkelhalbierende desselben geschnitten?

Figur 188.



Erkl. 460. Wird diese Aufgabe an allen drei Dreieckspunkten durchgeführt, so entstehen drei Durchmesser, welche die in Figur 52 und 53 angegebenen Winkel miteinander bilden. Weitere Erörterung dieser Beziehungen findet man im Abschnitt C über die Punkte des Dreiecks.

Auflösung. Ist CE in Figur 188 die Winkelhalbierende an der Ecke C, so ist $\sphericalangle ACE = BCE$, also da beides Peripheriewinkel sind, auch der Standbogen $AE = EB$, und folglich ist E der Mittelpunkt des Bogens AEB. Halbiert man auch den Aussenwinkel bei C, so wird ECF ein Rechter, EF Durchmesser, also F Mittelpunkt des Bogens AFB, und zugleich EF Mittelsenkrechte von AB. Daher erhält man die Aussage:

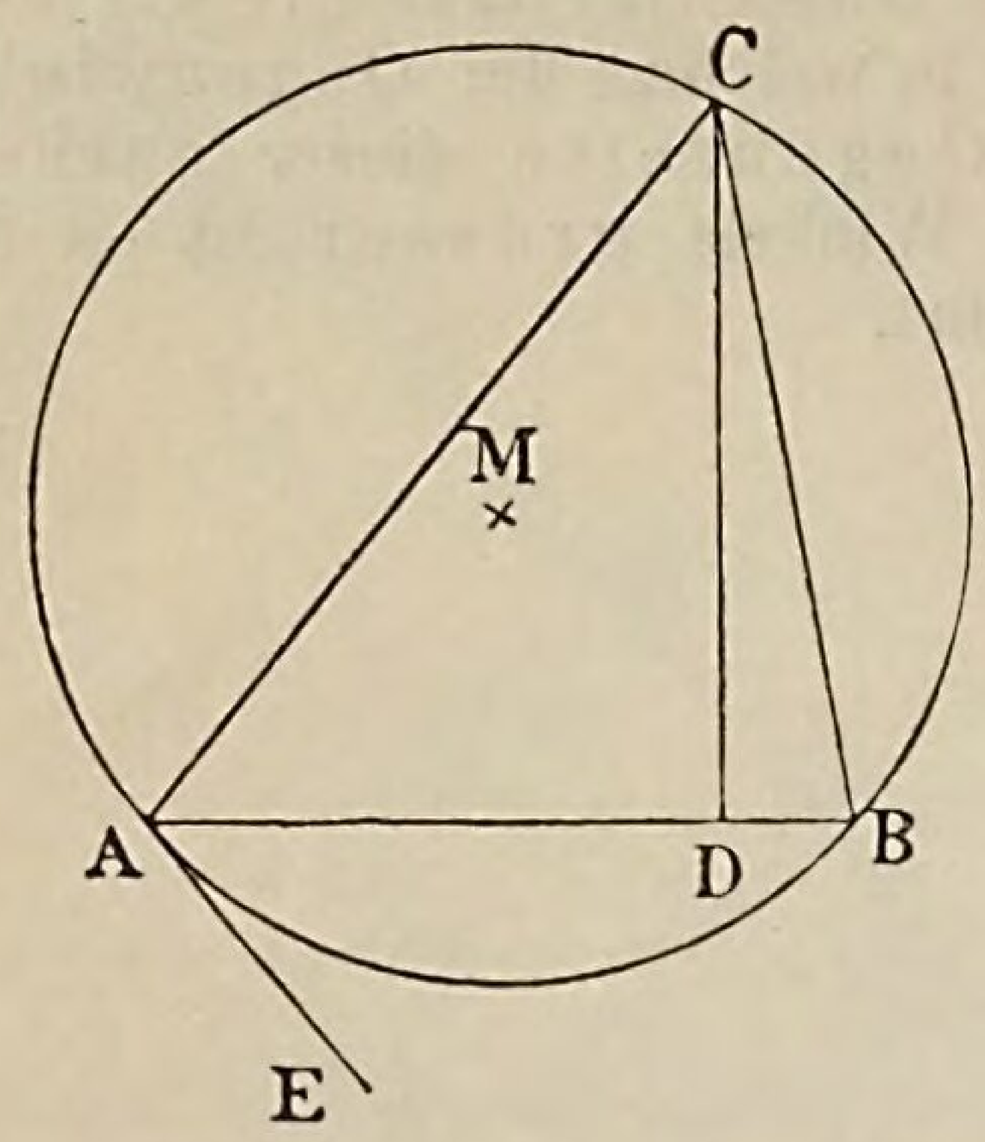
Satz. In jedem Dreieck trifft sich die Halbierungslinie eines Innen- oder Aussenwinkels mit der Mittelsenkrechten der Gegenseite im Mittelpunkt des zugehörigen Standbogens des Umkreises.

Aufgabe 92. Es soll ein Dreieck konstruiert werden, von welchem gegeben ist der Radius r des Umkreises, ein Winkel γ, und dessen zugehörige Höhe h_c.

Erkl. 461. Das Antragen des Winkels γ als Sehnentangentenwinkel ist in allen den Fällen vorteilhaft, wo in einem gezeichnet vorliegenden Kreise — besonders etwa von einem gegebenen Punkte desselben aus — eine Sehne gezogen werden soll, welche einen Peripheriewinkel von gegebener Grösse über sich hat.

Auflösung. Wo immer der gegebene Winkel in den gegebenen Kreis eingetragen wird, entsteht ein Dreieck mit gleichgrossen Gegenseiten dieses Winkels, da zu ihm stets derselbe Standbogen, also auch dieselbe Sehne gehört; aber die anderen Seiten, die Schenkel des Winkels, werden nicht die passende Grösse erhalten. Man kann aber diese Gegenseite nicht nur durch Abtragen des Peri-

Figur 189.



pheriewinkels selbst erhalten, sondern auch durch den Sehnentangentenwinkel.

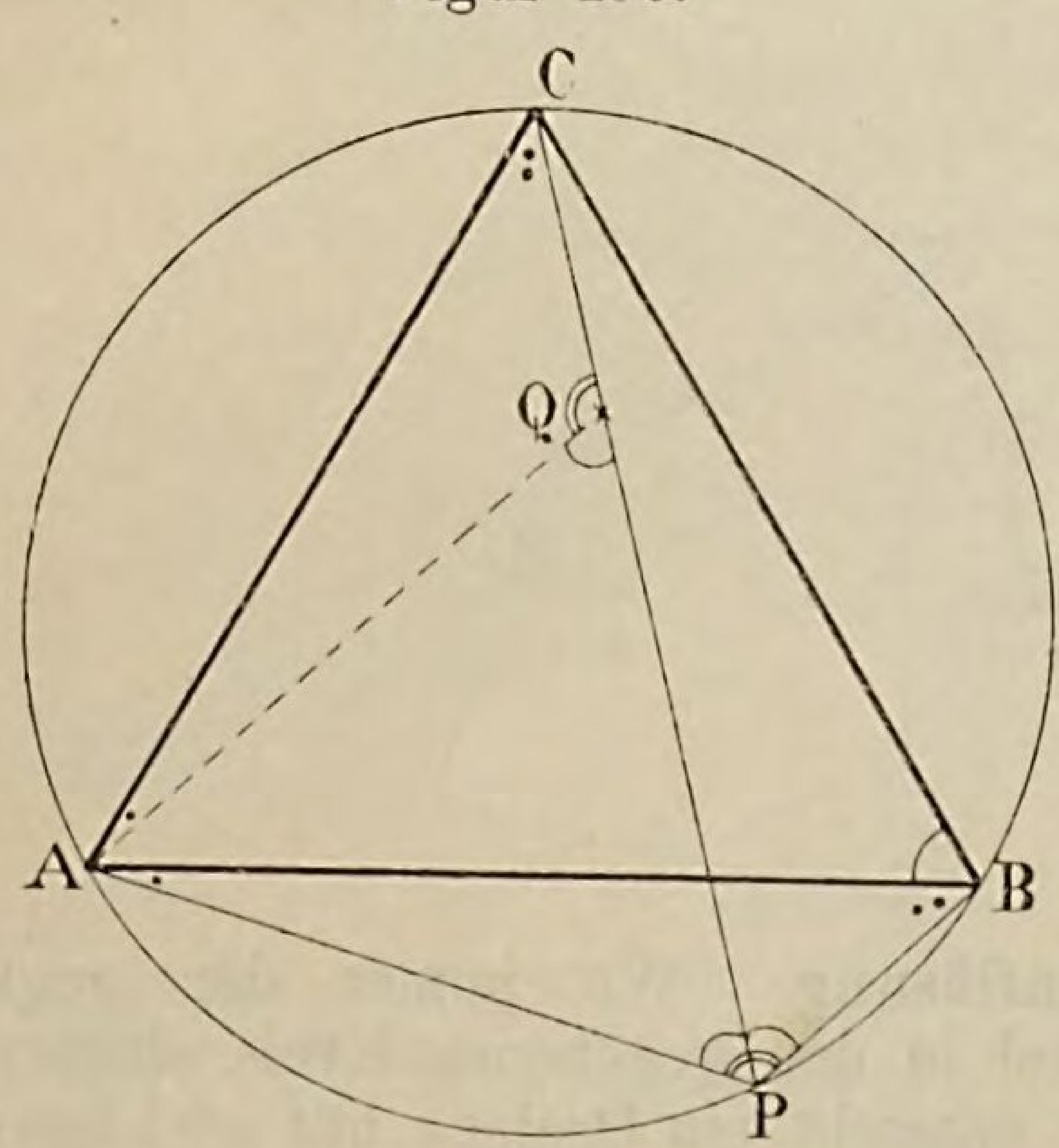
Man trage also (s. Figur 189) in einem beliebigen Punkte des mit gegebenem Radius r beschriebenen Kreises eine Tangente und daran den gegebenen Winkel an, so wird dessen Schenkel zur Grundseite des Dreiecks. Um die richtige Höhe zu erhalten, trägt man diese auf einer beliebigen Senkrechten ab und zieht die Parallele zu AB, bis diese in Punkt C den Kreis schneidet.

Das so entstehende Dreieck hat dann den Radius r des Umkreises, die Höhe h, und den Winkel $\gamma = ACB = BAE$.

Erkl. 462. Die nebenstehende Aufgabe wird nach Zeichnung der Sehne AB in genau gleicher Weise ausgeführt, wie die Aufgaben 56 und folgende. Dieselbe könnte auch die andere Fassung erhalten: Auf einem gegebenen Kreise einen Punkt C zu suchen, von welchem aus eine Sehne im Abstand h unter einem Winkel von gegebener Grösse γ gesehen wird. — In derselben Aufgabe 56 sind auch die Beschränkungen angegeben, welchen h unterliegt, damit überhaupt ein Dreieck möglich ist.

Aufgabe 93. Man verbinde einen beliebigen Punkt auf dem Umkreise eines gleichseitigen Dreiecks mit den Dreieckspunkten und beweise, dass die mittlere Verbindungsstrecke gleich der Summe der beiden äusseren ist.

Figur 190.



Auflösung. Ist in Figur 190 Punkt P mit A, B und C verbunden, so trage man die eine der beiden äusseren Strecken PA oder PB von P aus auf PC ab, etwa $PA = PQ$, und beweise, dass das übrig bleibende Stück auf PC, nämlich $PC - PQ = AQ$ gleich PB sein muss.

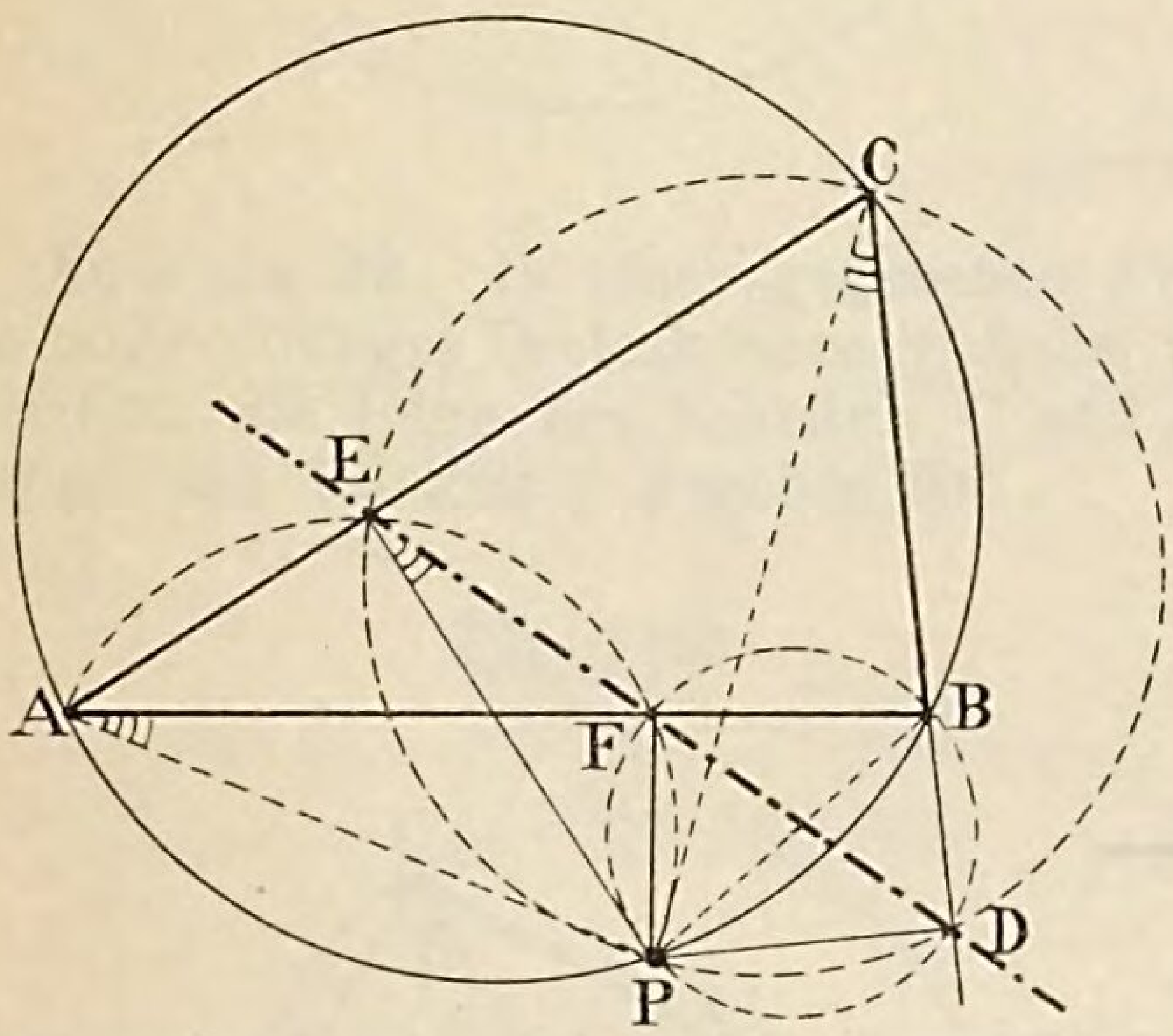
Es hat nämlich das gleichschenklige Dreieck APQ an der Spitze P einen Winkel, der als Peripheriewinkel über dem Bogen AC gleich $\sphericalangle ABC = 60^0$ ist, folglich sind auch dessen Winkel bei A und Q gleich 60^0, also Winkel $AQC = 120^0 = \sphericalangle APB$, da letzterer auf dem Bogen ACB steht. Ferner sind auch als Peripheriewinkel über dem Bogen AP einander gleich die $\sphericalangle ACP = ABP$; und folglich sind die Dreiecke ACQ und ABP kongruent auf Grund der Uebereinstimmung in den Seiten $AC = AB$ und der entsprechenden drei Winkel. Demnach ist $CQ = BP$, also $PC = PQ + QC = PA + PB$.

Erkl. 463. Statt $PA = PQ$ abzutragen, hätte man auch $PB = PQ_1$ oder $PA = CQ_2$ oder $PB = CQ_3$ abtragen können. Dann wäre wieder der Winkel PQ_1B gleich 60^0 geworden, und das Dreieck $CQ_1B \cong BPA$ geworden. Und in den anderen Fällen wäre zuerst die Kongruenz

der Dreiecke $APB \cong CQ_2B \cong AQ_3C$ aus der Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels gefolgt, dann die Gleichseitigkeit des Dreiecks mit Spitze P, und daraus die Gleichheit des Abschnitts bei P auf der nicht abgetragenen äussern Verbindungsstrecke.

Aufgabe 94. Man fälle von einem beliebigen Punkte des Umkreises eines Dreiecks die Senkrechten auf die drei Seiten und beweise, dass deren Fusspunkte auf einer geraden Linie liegen.

Figur 191.



Erkl. 464. Die Gleichheit der Linien von E nach F und D folgt im nebenstehenden Beweise aus der Reihe gleicher Winkel:

$PEF = PAF = PAB = PCB = PCD = PED.$

Ebenso könnte man die Gleichheit der Linien von D nach F und E aus folgender Reihe gleicher Winkel schliessen:

$PDF = PBF = PBA = PCA = PCE = PDE.$

Und um die Gleichheit der Linien von F nach D und E zu erschliessen, bedürfte es folgender Winkelreihe:

$$\sphericalangle PFD = \sphericalangle PBD = 180^0 - PBC = PAC = PAE = 180^0 - PFE:$$

folglich sind PFD und PFE Nebenwinkel, also DFE eine Gerade.

Erkl. 465. Konstruiert man die Kreise über den drei Verbindungsstrecken PA, PB, PC als Durchmessern, so schneiden sich je zwei derselben in zweien der drei Punkte D, E, F, also besitzen diese sämtlichen drei Kreise nur vier Schnittpunkte, nämlich P und die drei in gerader Linie liegenden Punkte D, E, F. (Vergl. Antwort der Frage 138 und Figur 130.)

Auflösung. Dass die drei Punkte DEF in Figur 191 auf einer geraden Linie liegen, beweist man dadurch, dass man die Gleichheit der Winkel nachweist, welche eine der drei Senkrechten, z. B. PE, bildet mit der Verbindungslinie EF und mit der Verbindungslinie ED. Dazu verwendet man die Kreise, auf welchen die Scheitel rechtwinkliger Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse liegen müssen. So liegen die Punkte E und F als Scheitel der rechten Winkel AEP und AFP auf dem Kreise über Durchmesser PA, die Punkte E und D als Scheitel der rechten Winkel CEP und CDP auf dem Kreise über Durchmesser PC. Im ersteren Kreise sind als Peripheriewinkel über dem gemeinsamen Bogen PF die:

$$\sphericalangle PEF = PAF = PAB,$$

im letzteren als Peripheriewinkel über dem gemeinsamen Bogen PD die:

$$\sphericalangle PED = PCD = PCB.$$

Nun sind aber im Umkreis des Dreiecks ABC als Peripheriewinkel über dem gemeinsamen Bogen PB die $\sphericalangle PAB = PCB$, folglich ist $PEF = PAB = PCB = PED$. Und wenn $\sphericalangle PEF = PED$ ist, so muss Linie EF mit Linie ED zusammenfallen, also liegen die drei Punkte D, E, F auf derselben Geraden.

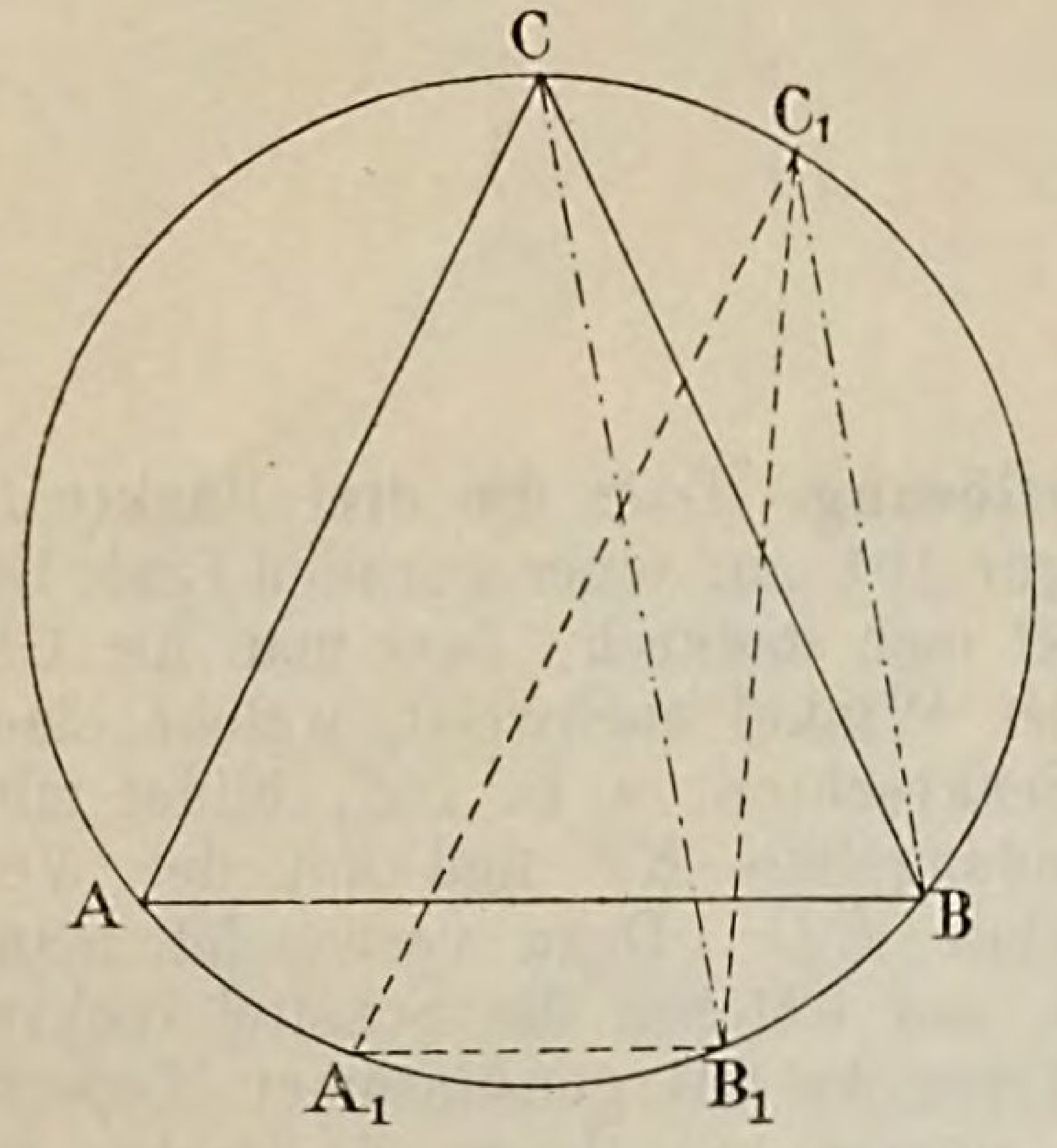
Aufgabe 95. Man ziehe zu zwei Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC von einem Punkte des Umkreises die Parallelen:

$$A_1B_1 \parallel AB \text{ und } A_1C_1 \parallel AC$$

Auflösung. Nach den Sätzen 7 über die Gleichheit der Bogen zwischen parallelen

und beweise, dass dann auch $B_1 C \parallel B C_1$ sein muss.

Figur 192.



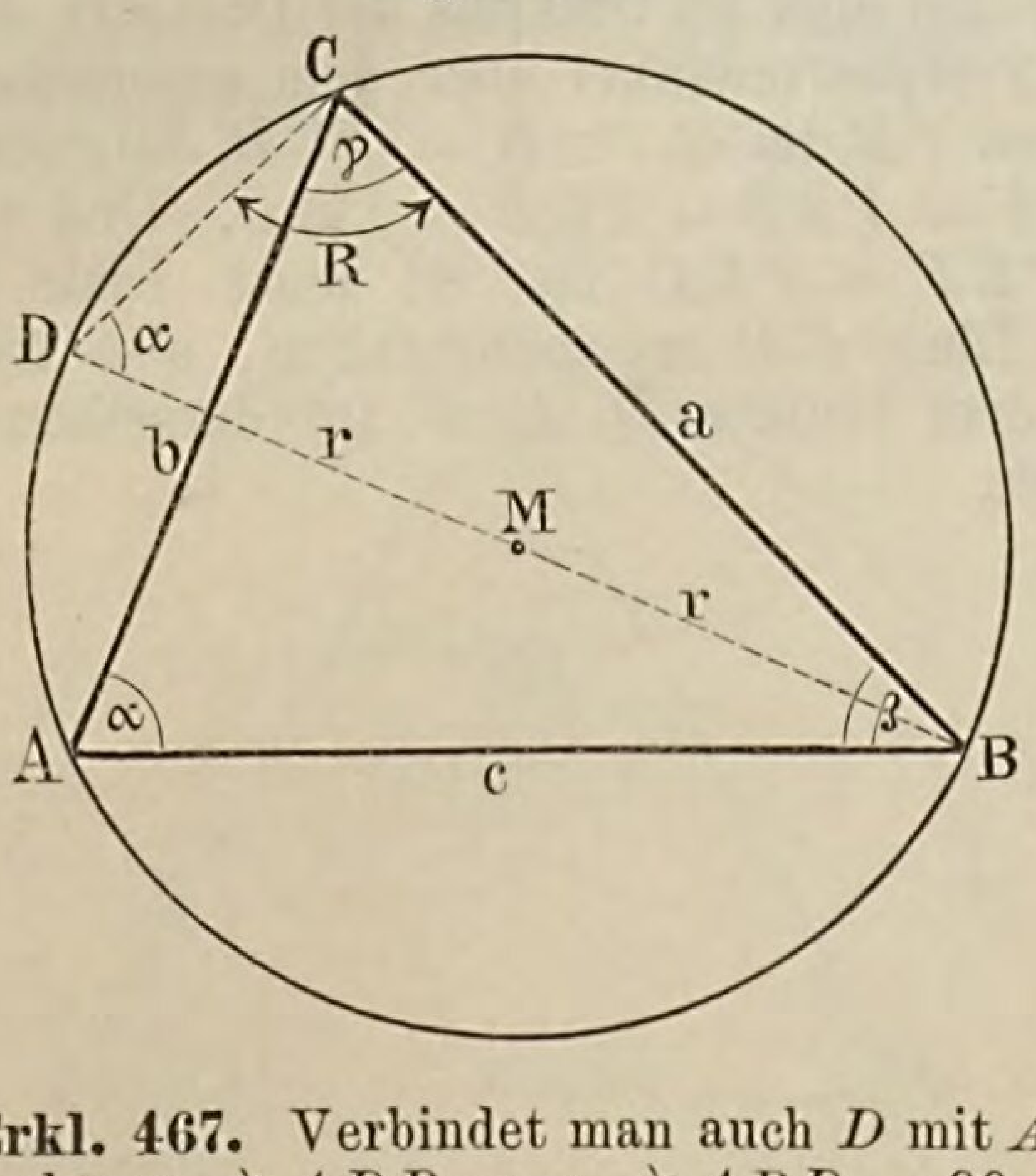
Sehnen sind wegen $AB \parallel A_1 B_1$ die Bogen $\widehat{AA_1} = \widehat{BB_1}$ und ebenso wegen $AC \parallel A_1 C_1$ die Bogen $\widehat{AA_1} = \widehat{CC_1}$.

Folglich sind auch die Bogen $\widehat{AA_1} = \widehat{CC_1}$, und demnach nach denselben Sätzen umgekehrt die Sehnen $CB_1 \parallel C_1 B$.

Erkl. 466. Man beachte, dass die dritten Seiten der Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$, nämlich BC und $B_1 C_1$, einander in einem Punkte des auf den Sehnen $BC_1 \parallel B_1 C$ senkrechten Durchmessers schneiden. — Die Erörterungen der vorstehenden Aufgabe lassen sich erweitern zu allgemeinen Ergebnissen über Sehnenvielcke.

Aufgabe 96. Man soll den Satz 20b auf andere Art beweisen, als in Antwort der Frage 53 geschehen.

Figur 193.



Auflösung. Man ziehe durch einen Eckpunkt des Dreiecks, z. B. B, den Durchmesser des Umkreises, und betrachte die Winkel des Dreiecks BDC. Darin ist der Winkel BCD als Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein Rechter, $\sphericalangle BDC$ als Peripheriewinkel über dem Bogen BC gleich dem auf gleichem Standbogen stehenden Dreieckswinkel α, folglich bleibt für den Winkel CBD als dritten Winkel der Wert $90 - \alpha$.

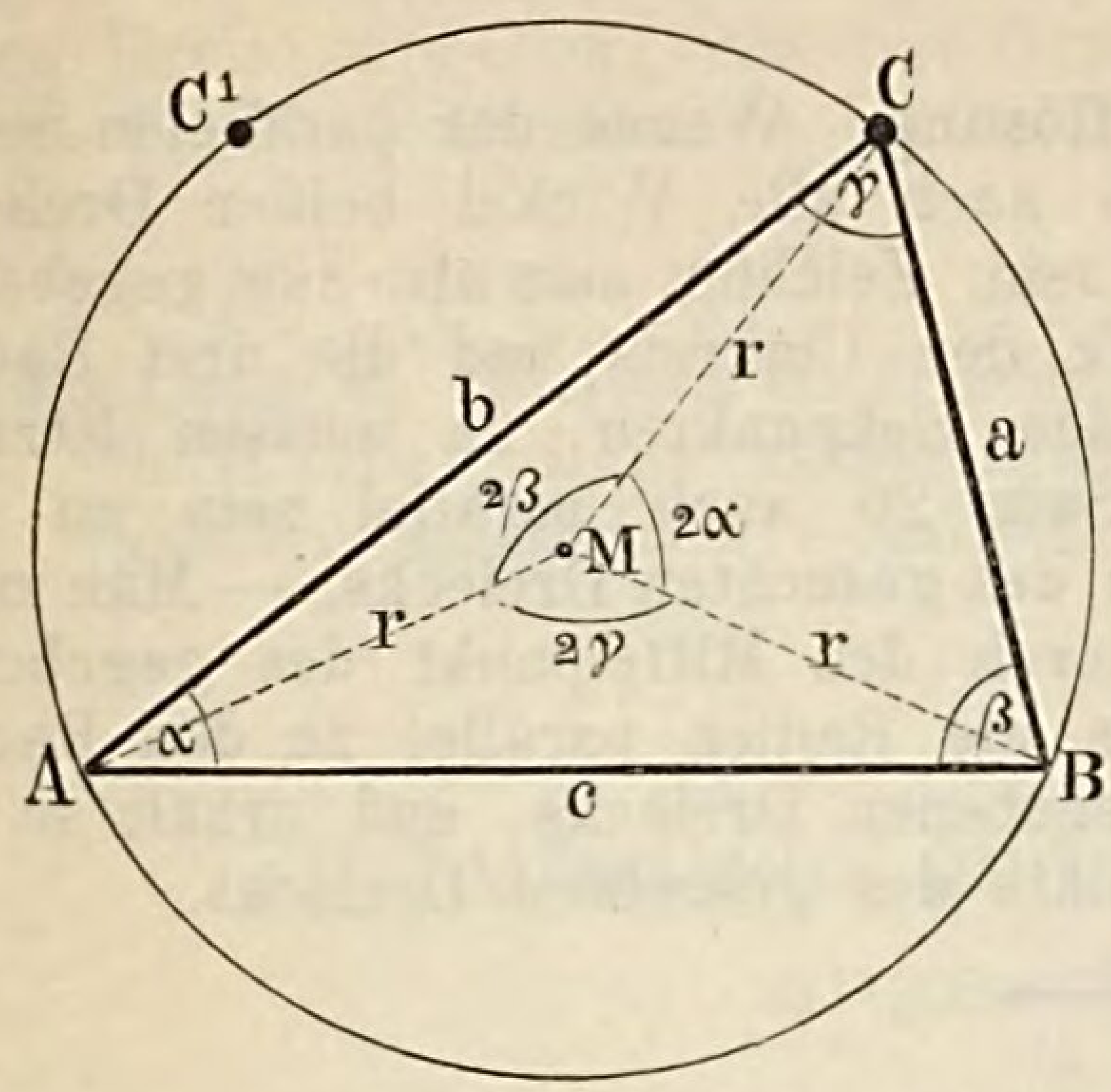
Erkl. 467. Verbindet man auch D mit A, so wird ebenso $\sphericalangle ADB = \gamma$, $\sphericalangle ABD = 90 - \gamma$.

Aufgabe 97. Man soll die Winkel α und γ eines Dreiecks berechnen, in welchem $\beta = 80^0$ ist, und der Scheitel von γ in einem der Punkte liegt, welche den Kreisbogen des Umkreises über deren Gegenseite AB in drei gleiche Teile teilen.

Auflösung. Ist ABC in Figur 194 das Dreieck, in welchem:

$$\widehat{BC} = \widehat{CC_1} = \widehat{C_1 A} = \frac{\widehat{ACC_1 B}}{3},$$

Figur 194.



so sind nach Satz 20a die Mittelpunktswinkel:

$$AMB = 2\gamma,\ BMC = 2\alpha,\ CMA = 2\beta.$$

Dann muss wegen $\widehat{AC} = 2 \cdot \widehat{CB}$ auch:

$$\sphericalangle AMC = 2 \cdot \sphericalangle CMB$$

sein, also $2\beta = 2 \cdot 2\alpha$, oder $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Ferner ist:

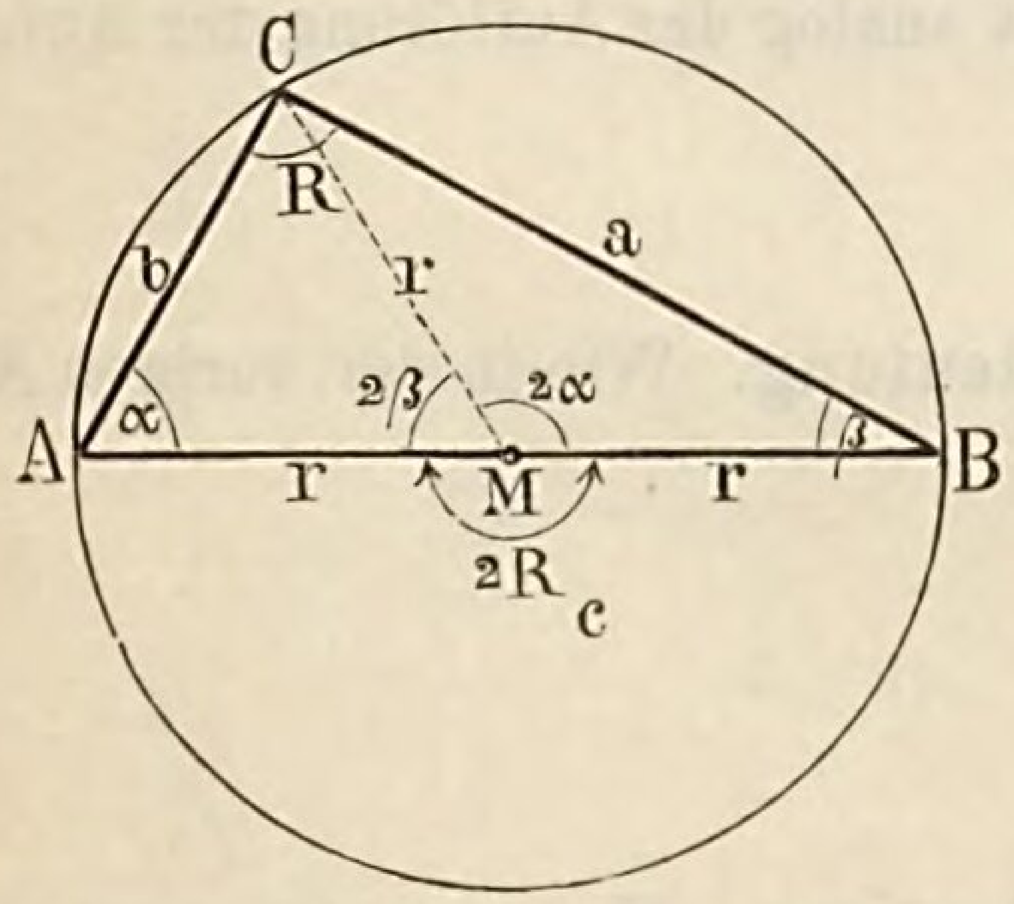
$AMB = 2\gamma = 360^0 - (2\alpha + 2\beta) = 360 - 3\beta$,

also $\gamma = 180 - \frac{3}{2}\beta$. Demnach sind in Zahlenwerten:

$$\beta = 80^0,\ \alpha = 40^0,\ \gamma = 180^0 - 120^0 = 60^0.$$

Aufgabe 98. In einen gegebenen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck einzuzeichnen, von welchem die Lage des Scheitels C und die Grösse des Winkels β gegeben ist.

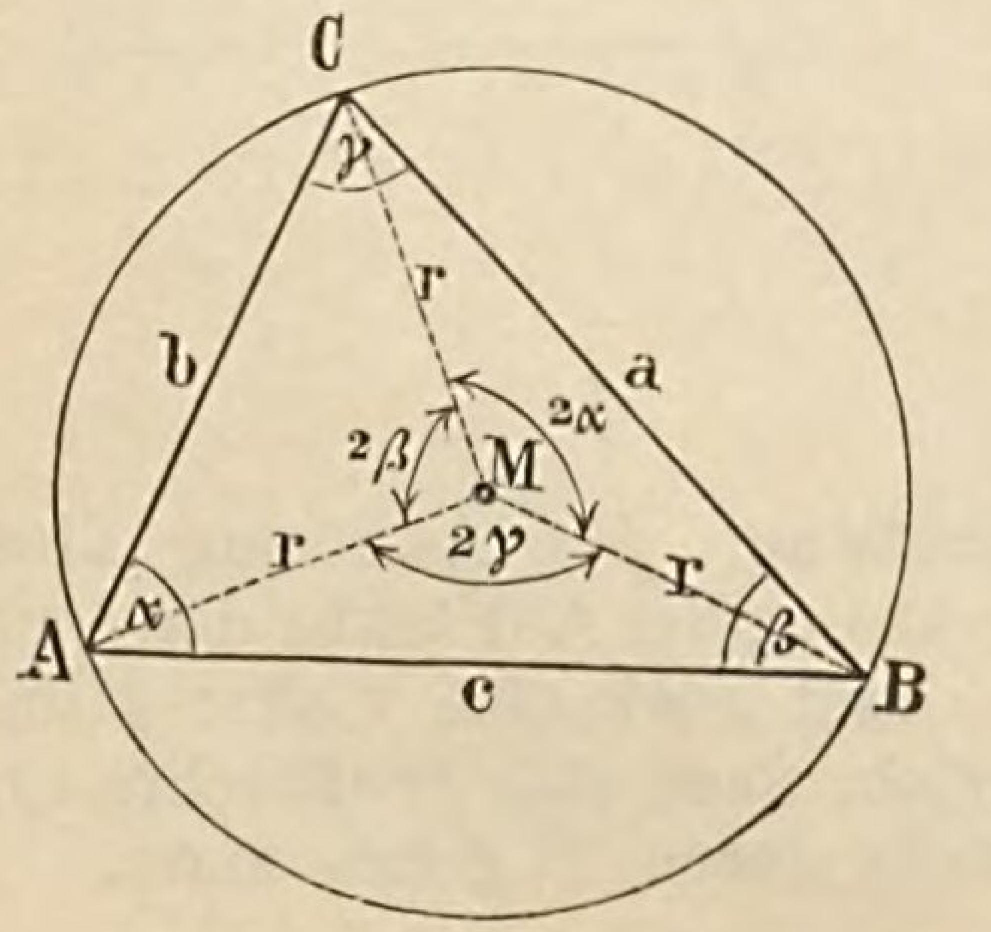
Figur 195.



Auflösung. Ist ABC in Figur 195 das verlangte Dreieck, so weiss man, dass der Radius vom gegebenen Punkte C mit der Hypotenuse den Winkel $CMA = 2 \cdot \gamma$ bildet. Daher erhält man die Lage des Durchmessers AB, indem man den Punkt C mit M verbindet und daran einen Winkel von doppelter Grösse wie β anträgt.

Aufgabe 99. Man soll ein Dreieck zeichnen, von welchem der Radius des Umkreises und die Winkel vorgeschriebene Grösse haben.

Figur 196.



Auflösung. Da nach Satz 20 die Mittelpunktswinkel gleich 2α, 2β, 2γ sind, so trage man an einen beliebigen Radius des Kreises mit Radius r, z. B. MC, beiderseits am Mittelpunkte als Scheitel das Doppelte zweier gegebenen Winkel an, und erhält so die Radien nach den beiden andern Eckpunkten. Der dritte Mittelpunktswinkel ist dann von selbst gleich:

$$360 - (2\alpha + 2\beta) = 2\,[180 - (\alpha + \beta)] = 2\gamma;$$

denn $\alpha + \beta = 180 - \gamma$.

Aufgabe 100. In einen gegebenen Kreis ein Dreieck einzuzeichnen, dessen Seiten denen eines gegebenen Dreiecks parallel sind.

Erkl. 468. Die Lage des gegebenen Dreiecks ist bei dieser Aufgabe vollständig beliebig: Es kann den gegebenen Kreis ganz umschliessen, denselben schneiden, oder von ihm ganz eingeschlossen werden. Nur wenn das Dreieck selbst dem gegebenen Kreise eingeschrieben ist, fällt das zu suchende mit dem gegebenen zusammen. Ist nur das Zentrum der Ecken gemeinsam, so fallen die Radien zusammen, nicht aber deren Endpunkte.

Auflösung. Wegen der parallelen Seiten müssen auch alle Winkel beider Dreiecke gleich sein. Zeichnet man also zum gegebenen Dreieck den Umkreis und die drei Radien nach den Eckpunkten, so müssen letztere nach Satz 20 auch parallel sein zu den Radien des gesuchten Dreiecks. — Man ziehe also durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises die Radien parallel zu den Radien des gegebenen Dreiecks, und erhält so die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 101. Man soll den Umkreis eines Dreiecks konstruieren, ohne eine Mittelsenkrechte desselben zu zeichnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 88.

Aufgabe 102. Auf welcher Seite einer Höhe eines Dreiecks liegt das Zentrum der Ecken?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 89.

Aufgabe 103. Auf welcher Seite einer Mittellinie eines Dreiecks liegt das Zentrum der Ecken?

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 104. Man soll zu einem gegebenen Dreieck zwei andere zeichnen mit gleicher Grundseite und spitzem Gegenwinkel, von denen gegenüber einem grössern anliegenden Winkel der eine eine grössere, der andere eine kleinere Gegenseite hat, als das gegebene.

Andeutung. Man verfahre nach der Auflösung der Aufgabe 90 und Figur 187.

Aufgabe 105. Man beweise, dass die Halbierungslinien aller Peripheriewinkel über derselben Sehne durch denselben Punkt gehen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 91.

Aufgabe 106. Man fälle von einem Punkte P des Umkreises eines Dreiecks zwei Senkrechte (etwa PD und PE in Figur 191), verbinde die Fusspunkte miteinander und auch den Punkt P mit dem Schnittpunkt F der dritten Seite und dieser Verbindungslinie, und beweise, dass dann $PF \perp AB$ ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 94; dieselbe lässt noch eine weitere Umkehrung zu, nämlich, dass eine Senkrechte auf AB in F ebenfalls durch P gehen muss.

Aufgabe 107. Man soll die verschiedenen Lagen der Eckpunkte eines Dreiecks gegen einen Kreis aufstellen, und auf Grund der Sätze 17 die Winkelsumme gleich 180° bestätigen.

Andeutung. Man beachte die Lage der Eckpunkte innerhalb und ausserhalb des Kreises.

Anmerkung 6. Weitere zu diesem Abschnitt gehörige Konstruktionsaufgaben findet man in Müller, Konstruktionsaufgaben I, F und K, f „Dreiecksaufgaben über den umgeschriebenen Kreis“: Aufgaben 528 bis 616 und 834 bis 877.

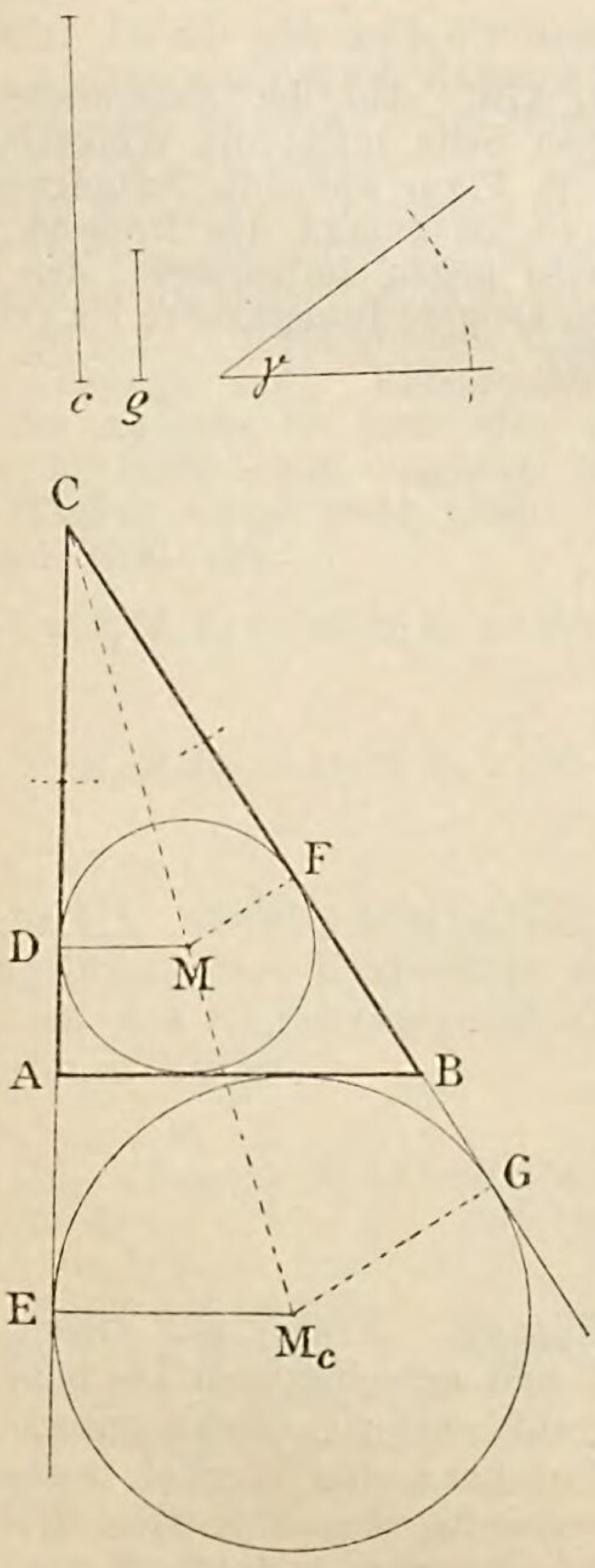
7) Aufgaben über das einem Kreise um- und angeschriebene Dreieck.

(Zu Abschnitt A, 4 b.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 108. Man soll den Inkreis und einen Ankreis eines Dreiecks konstruieren, ohne mehr als eine Winkelhalbierende zu zeichnen.

Figur 197.



Auflösung. Da die Tangentenabschnitte des In- und Ankreises nach den Sätzen 23 und 24 in ganz bestimmten Beziehungen zu den drei Seiten des Dreiecks stehen, so kann man diese Strecken berechnen, und in den Endpunkten derselben die Senkrechten errichten. Diese schneiden die eine Winkelhalbierende im gesuchten Mittelpunkte und bilden zugleich selbst den Radius des gesuchten Kreises.

So ist in Figur 197:

$$CD = t_3 = \frac{a+b-c}{2} = \frac{1}{2}(BC + CA - AB)$$

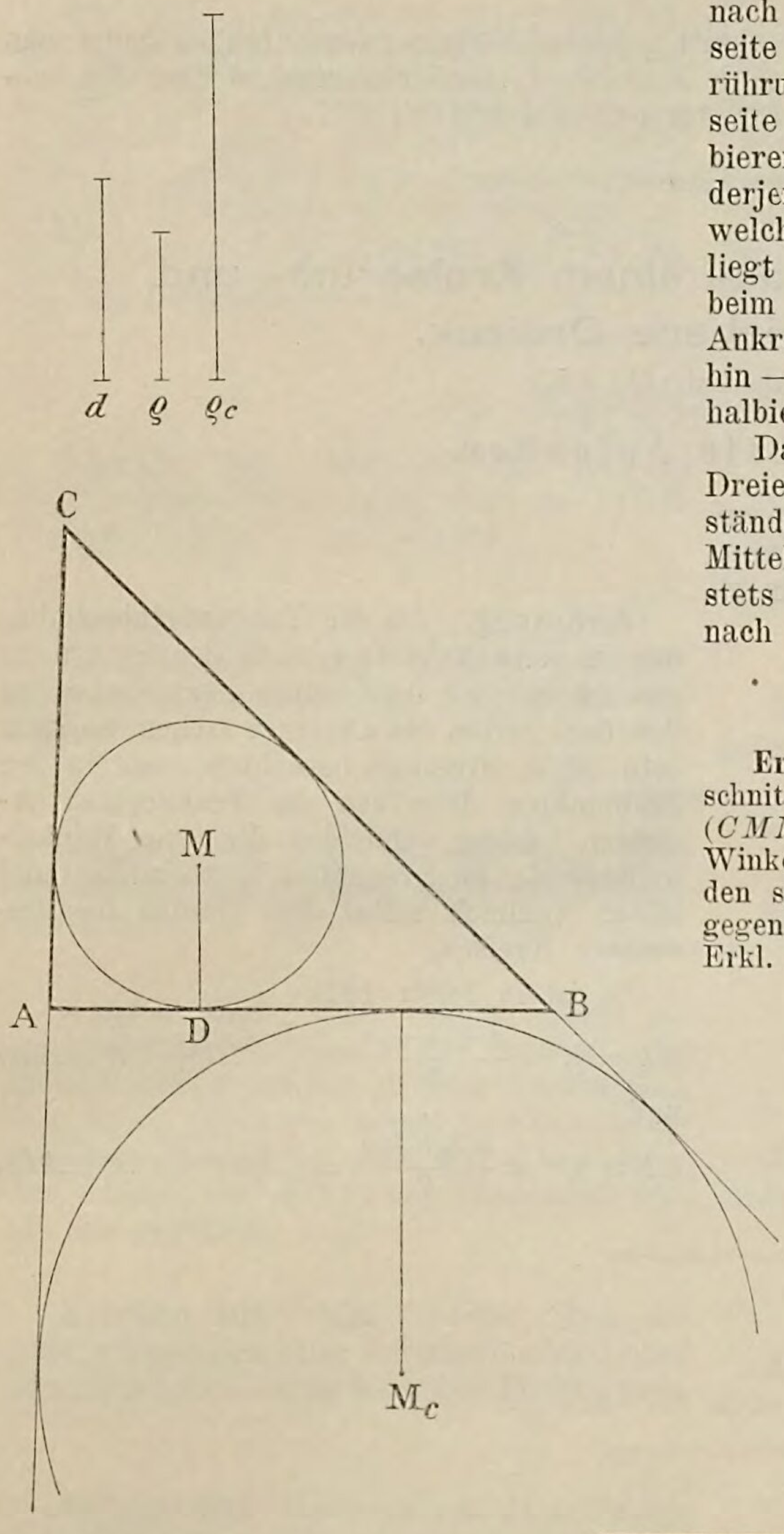
und

$$CE = t_3''' = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(BC + CA + AB).$$

Erkl. 469. Diese Auflösung wird besonders dann Anwendung finden, wenn die dritte Seite des Dreiecks nicht gezeichnet vorliegt, sondern wenn etwa nur einzeln $AB = c$ und die Summe $BC + CA = a + b$ gegeben wäre (siehe Müller, Konstruktionsaufgaben).

Aufgabe 109. Man soll die in Erkl. 157 enthaltenen Aussagen über die Lage der Zentren der Seiten beweisen.

Figur 198.



Auflösung. Die Winkelhalbierende eines Winkels bildet auf dessen Gegenseite im Innern des Dreiecks einen spitzen Winkel nach der Seite des grösseren, einen stumpfen nach der Seite des kleineren dieser Gegenseite anliegenden Dreieckswinkels. Die Berührungsradien sind Senkrechte auf die Gegenseite von einem Punkte dieser Winkelhalbierenden, treffen diese Dreiecksseite also auf derjenigen Seite ihres Schnittpunktes, nach welcher der spitze Winkel liegt. Folglich liegt der Fusspunkt der Berührungsradien beim Umkreis gegen den grössern, beim Ankreis gegen den kleinern Dreieckswinkel hin — gerechnet vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden aus.

Da aber beide Berührungspunkte von den Dreieckspunkten symmetrisch gleiche Abstände haben, so haben sie ebensolche vom Mittelpunkt der Dreiecksseite, liegen also stets auch beiderseits des Seitenmittelpunktes nach der genannten Richtung hin.

Erkl. 470. Auf der Aussenseite der geschnittenen Seite bildet die Winkelhalbierende (CMM_c in Figur 198) die entgegengesetzten Winkel als im Innern des Dreiecks, nämlich den spitzen gegen die grössere, den stumpfen gegen die kleinere Dreiecksseite hin (vergl. auch Erkl. 146).

Aufgabe 110. Man soll zwei Dreiecke vergleichen, welche einen Winkel gleich haben und demselben Kreise umgeschrieben oder angeschrieben sind.

Auflösung. Kreise mit einem gleichen Winkel und gemeinsamem In- oder Ankreis können auf zweierlei Weise untersucht werden: Man kann den Winkel festhalten und die Gegenseite desselben am Kreise verschieben, oder man kann die Gegenseite festhalten und den Winkel verschieben. — Wegen

der Gleichheit des Tangentenwinkels γ bleibt dabei die Strecke MC stets dieselbe, und auch die Abschnitte auf den von C ausgehenden Tangenten. Letztere sind aber beim umgeschriebenen Dreieck:

$$t_3 = \frac{a+b-c}{2},$$

beim angeschriebenen Dreieck:

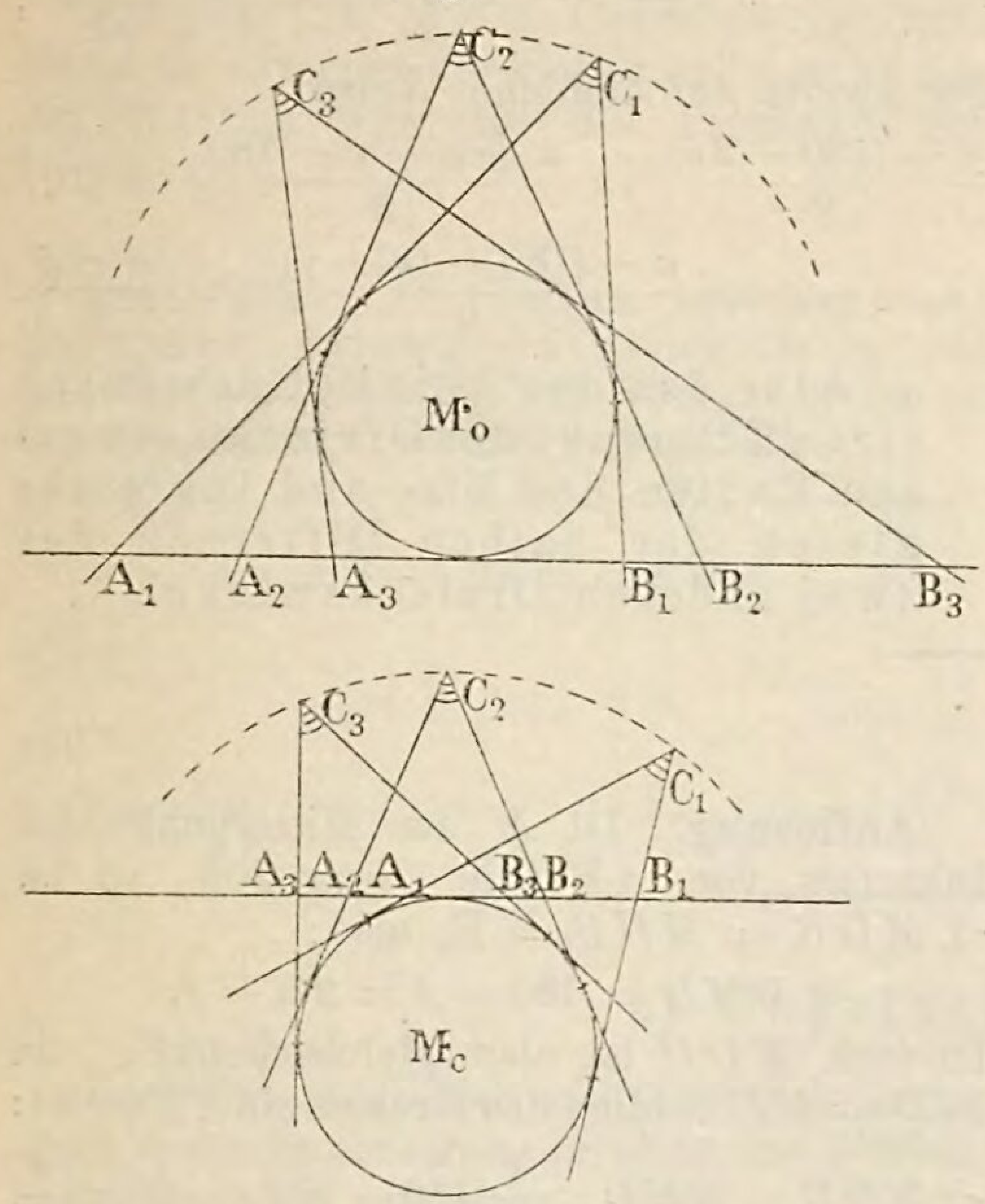
$$t_3''' = \frac{a+b+c}{2}.$$

Folglich kann man aussagen:

Satz. Dreiecke mit einem gleichen Winkel und gemeinsamem Inkreis haben dieselbe Differenz zwischen der Summe der einschliessenden Seiten und der Gegenseite des Winkels.

Satz. Dreiecke mit einem gleichen Winkel und gemeinsamem zugehörigen Ankreis desselben haben dieselbe Seitensumme oder gleichen Umfang.

Figur 199.



Erkl. 471. Da mit $\sphericalangle \gamma$ auch die Strecke CM die gleiche bleiben muss (nach Antwort 32), so muss in Figur 199 der Punkt C auf einem Kreis um den Punkt M sich bewegen.

Während Figur 199 die Bewegung des gleichbleibenden Winkels gegenüber der festliegenden Gegenseite darstellt, bietet Figur 179 denjenigen Fall, dass gegenüber festliegendem Winkel die Gegenseite bewegt wird. Entsprechend dem Ergebnis der Aufgabe 39 kann also auch in Figur 199 für beide Fälle ausgesagt werden, dass die Winkel AMB stets gleich bleiben, nämlich nach Erkl. 148:

$$A_1 M_0 B_1 = A_2 M_0 B_2 = A_3 M_0 B_3 = 90 + \frac{\gamma}{2}$$

und

$$A_1 M_c B_1 = A_2 M_c B_2 = A_3 M_c B_3 = 90 - \frac{\gamma}{2}.$$

Aufgabe 111. Welche Winkel bilden die Verbindungslinien eines Eckpunktes mit den Mittelpunkten des eingeschriebenen und des angeschriebenen Kreises?

Auflösung. Die Verbindungslinie eines Eckpunktes, z. B. C, mit dem Mittelpunkt des Umkreises bildet nach Satz 20b mit den Seiten a und b bezüglich die Winkel $90 - \alpha$ und $90 - \beta$, die Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt des Inkreises dagegen mit beiden Linien den Winkel $\frac{\gamma}{2}$. Ist also $a > b$, so wird auch $\alpha > \beta$, und der Winkel der beiden zu untersuchenden Linien entweder gleich $(90 - \beta) - \frac{\gamma}{2}$ oder $\frac{\gamma}{2} - (90 - \alpha)$. Der erstere dieser Werte liefert:

Erkl. 472. Derselbe Wert, welcher nebenstehend gefunden wurde, gilt auch für den Winkel der durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehenden Radien des Umkreises und des dieser Ecke zugehörigen Ankreises, da ja dessen Radius ebenfalls mit der Winkelhalbierenden zusammenfällt. Für die beiden anderen Ankreise dagegen erhält man, wie leicht zu zeigen ist, die Summe aus der Winkelhälfte am Eckpunkte und dem Dreieckswinkel an der anliegenden Seite. Dies lässt sich nachweisen entweder, wie neben-

stehend, durch Addition; oder durch Betrachtung des Komplementwinkels; oder durch unmittelbare Anwendung der Winkelangaben des Satzes 22 und 20b.

$$\frac{180-2\beta-\gamma}{2}=\frac{180-(\beta+\gamma)-\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

der zweite auf ähnliche Weise:

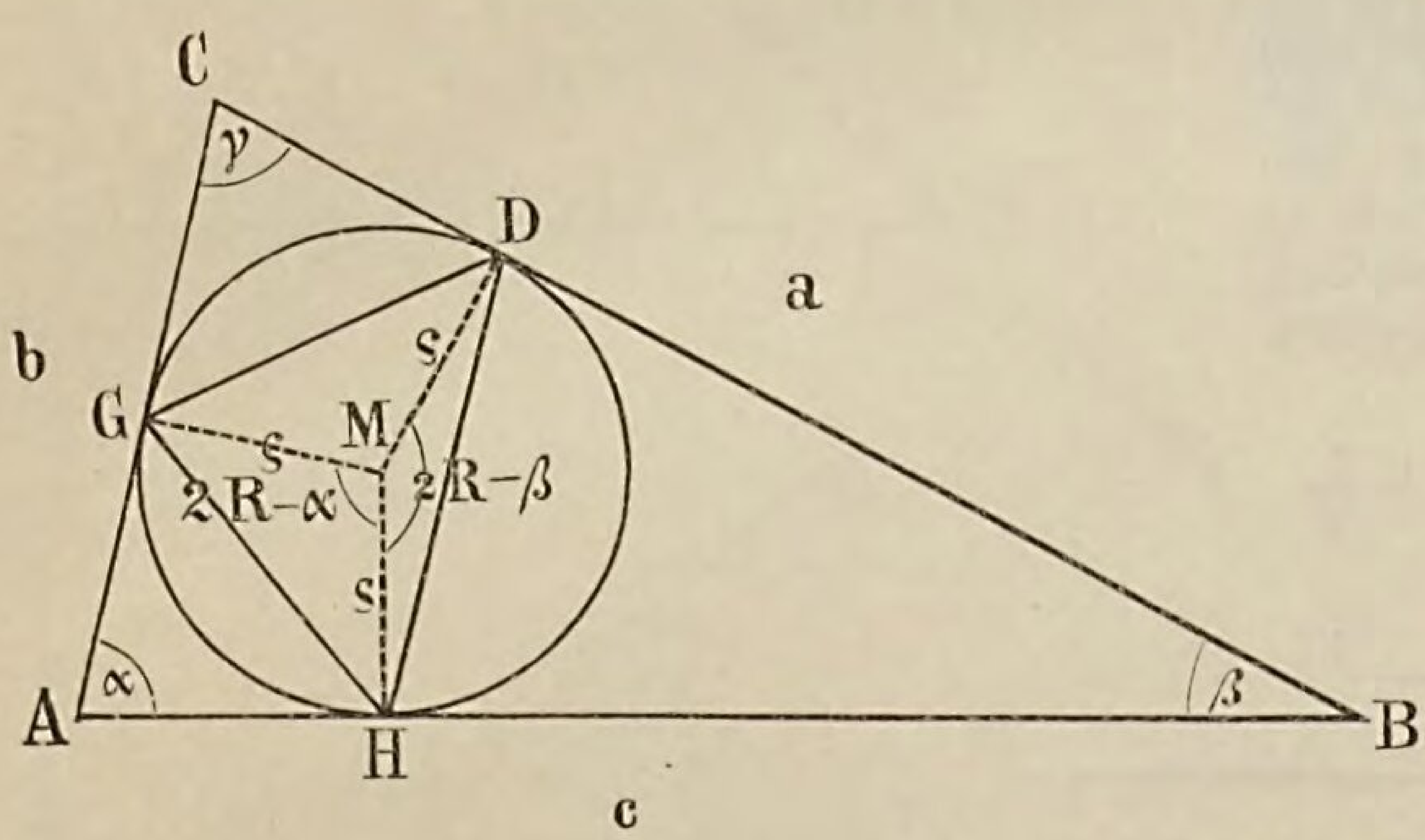
$$\frac{\gamma-(180-2\alpha)}{2}=\frac{\alpha+\alpha+\gamma-180}{2}$$
$$=\frac{\alpha-[180-(\alpha+\gamma)]}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Also ist der Winkel der durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehenden Radien des Um- und Inkreises gleich der halben Differenz der zwei anderen Dreieckswinkel.

Aufgabe 112. Welche Winkelgrössen hat das Dreieck der Berührungspunkte des Inkreises eines Dreiecks?

Erkl. 473. Aus der nebenstehenden Auflösung ergeben sich zahlreiche weitere Winkelangaben über die anderen durch denselben Eckpunkt in der Figur 200 gehenden Linien. — Aehnliche Ueberlegungen ergeben sich für die Ankreise, oder rückwärts für die Winkel des Dreiecks ABC selbst aus den Winkeln des Dreiecks DGH.

Figur 200.



Auflösung. Ist M der Mittelpunkt des Inkreises von ABC in Figur 200, so ist $\sphericalangle MDB = MHB = \mathrm{R}$, also:

$$\sphericalangle DMH = 180-\beta = 2\mathrm{R}-\beta.$$

Dreieck MDH ist aber gleichschenklig, da $MD = MH$ Radien des Kreises sind, also ist:

$$\sphericalangle MDH = MHD = \frac{1}{2}[180-(2\mathrm{R}-\beta)] = \frac{\beta}{2}.$$

Ebenso ist $\sphericalangle MDG = MGD = \frac{\gamma}{2}$, folglich:

$$\sphericalangle HDG = \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90-\frac{\alpha}{2}.$$

Also ist jeder Winkel des Dreiecks der Berührungspunkte des Inkreises gleich der halben Summe der anliegenden Winkel, oder gleich dem Komplement des halben Gegenwinkels.

Aufgabe 113. Man soll durch einen gegebenen Punkt P innerhalb eines gegebenen Winkels eine Gerade legen, so dass dieselbe mit den Winkelschenkeln ein Dreieck von gegebenem Umfange bildet.

Erkl. 474. Wie aus der nebenstehenden Ueberlegung hervorgeht, erhält man zweierlei Gerade durch P, welche der Anforderung der Aufgabe genügen, wenn zwei Tangenten von P an den Kreis möglich sind. Man erhält eine Lösung, wenn P auf dem Kreise selbst liegt, keine Lösung, wenn P innerhalb des Kreises liegt.

Auflösung. Der Umfang u des Dreiecks tritt auf als das Doppelte der Berührungsstrecken vom Scheitelpunkt S an den Ankreis der Gegenseite. Trägt man also die Hälfte von u auf den Winkelschenkeln von S aus ab, so kann man den Ankreis konstruieren und an denselben die gesuchte Seite ziehen als Tangente von P aus.

Aufgabe 114. Welche Grössenbeziehungen bestehen zwischen den Seiten und den Radien der In- und Ankreise des rechtwinkligen Dreiecks.

Auflösung. Da im rechtwinkligen Dreieck (siehe Figur 63) die Deltoide mit dem Winkelscheitel der Berührungsradien Quadrate werden, so erhält man, ähnlich wie in Erkl. 163 gezeigt wurde:

$$\varrho_0 = t_3 \;\; = s - c = \frac{a + b - c}{2},$$

$$\varrho_1 = t_3' \;\; = s - b = \frac{a - b + c}{2},$$

$$\varrho_2 = t_3'' = s - a = \frac{-a + b + c}{2},$$

$$\varrho_3 = t_3''' = \;\; s \;\; = \frac{a + b + c}{2}.$$

Erkl. 475. Als weitere bemerkenswerte Beziehungen zwischen den Radien der In- und Ankreise des rechtwinkligen Dreiecks treten zu nebenstehenden hinzu die beiden Fälle:

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = (s - c) + (s - b) + (s - a)$$

$$= 3s - 2s = s = \frac{a + b + c}{2},$$

also:

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = \varrho_3$$

und

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = s + s = 2s = a + b + c.$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 115. Man soll In- und Ankreise eines Dreiecks konstruieren, ohne eine Winkelhalbierende zu zeichnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 108.

Aufgabe 116. Auf welcher Seite der Höhe eines Dreiecks liegen die Zentren der Seiten?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 109.

Aufgabe 117. Welche Grösse erhalten die Radien des Um- und Inkreises und der Ankreise, wenn bei einem Dreieck die eine Ecke ins Unendliche rückt, also ein Parallelstreifen entsteht?

Andeutung. Man berücksichtige, dass ein Kreis mit Radius Null oder Unendlich zum Punkte oder zur Geraden wird.

Aufgabe 118. Man soll den Beweis führen für die in Erkl. 472 enthaltenen Winkelangaben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 111.

Aufgabe 119. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind: der Radius des Inkreises, eine Seite und ein daranliegender Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Auflösung der Aufgabe 110.

Anmerkung 7. Weitere zu diesem Abschnitt gehörige Konstruktionsaufgaben findet man in Müller, Konstruktionsaufgaben I, L, „Dreiecksaufgaben über die Berührungskreise“: Aufgaben 882 bis 1341.

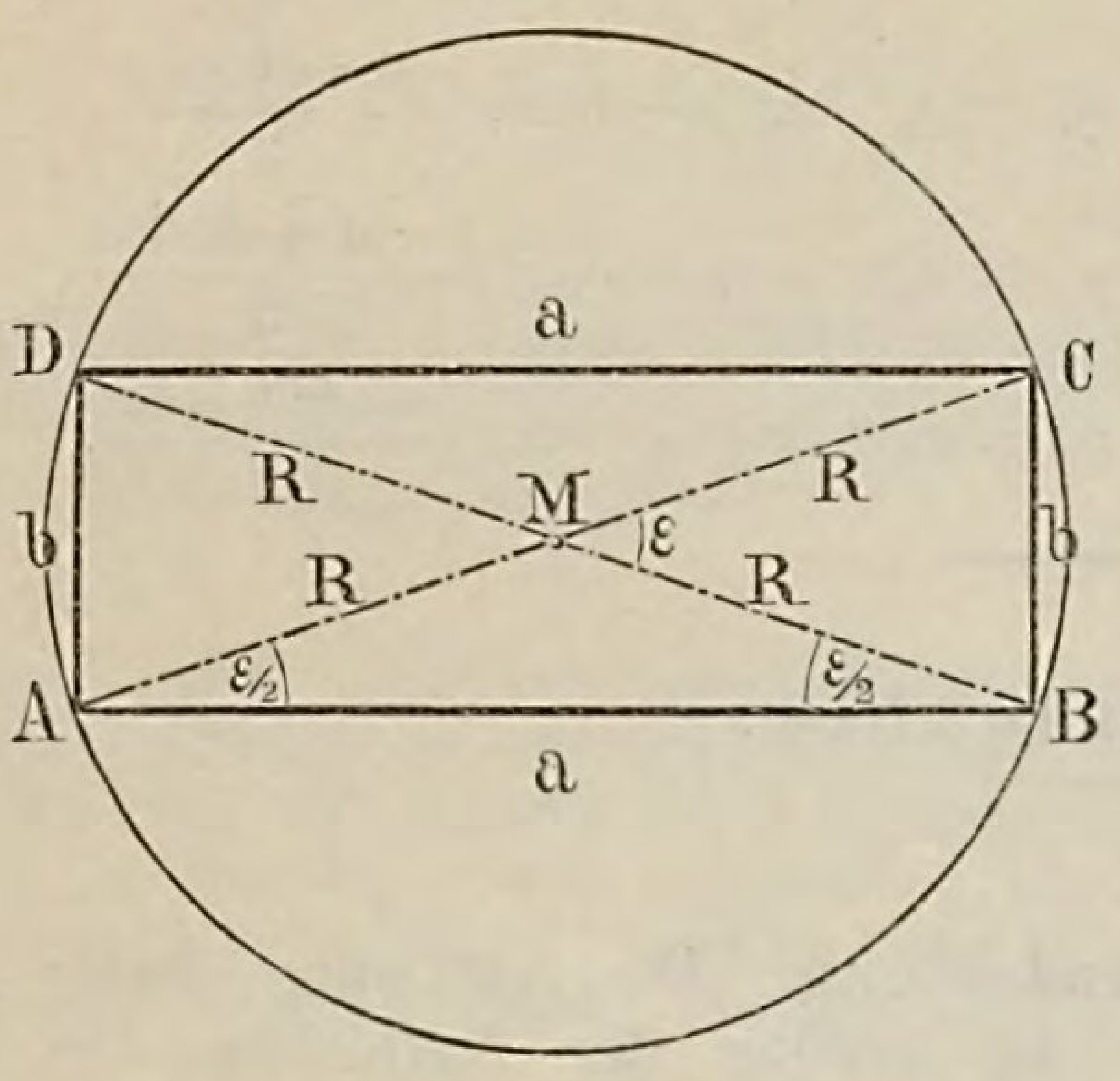
8) Aufgaben über das Sehnen-, Tangenten- und Kreisviereck.

(Zu Abschnitt A, 5 a, b, c.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 120. In einen gegebenen Kreis soll ein Rechteck eingezeichnet werden, welches eine gegebene Seitenstrecke AB habe.

Figur 201.



Auflösung. Da bei einem Sehnenrechteck die Diagonalen Durchmesser sind, so trägt man die gegebene Strecke beliebig als Seite AB in den Kreis ein (siehe Figur 201), zieht durch die Punkte A und B die Durchmesser AC und BD und erhält so die Eckpunkte C und D.

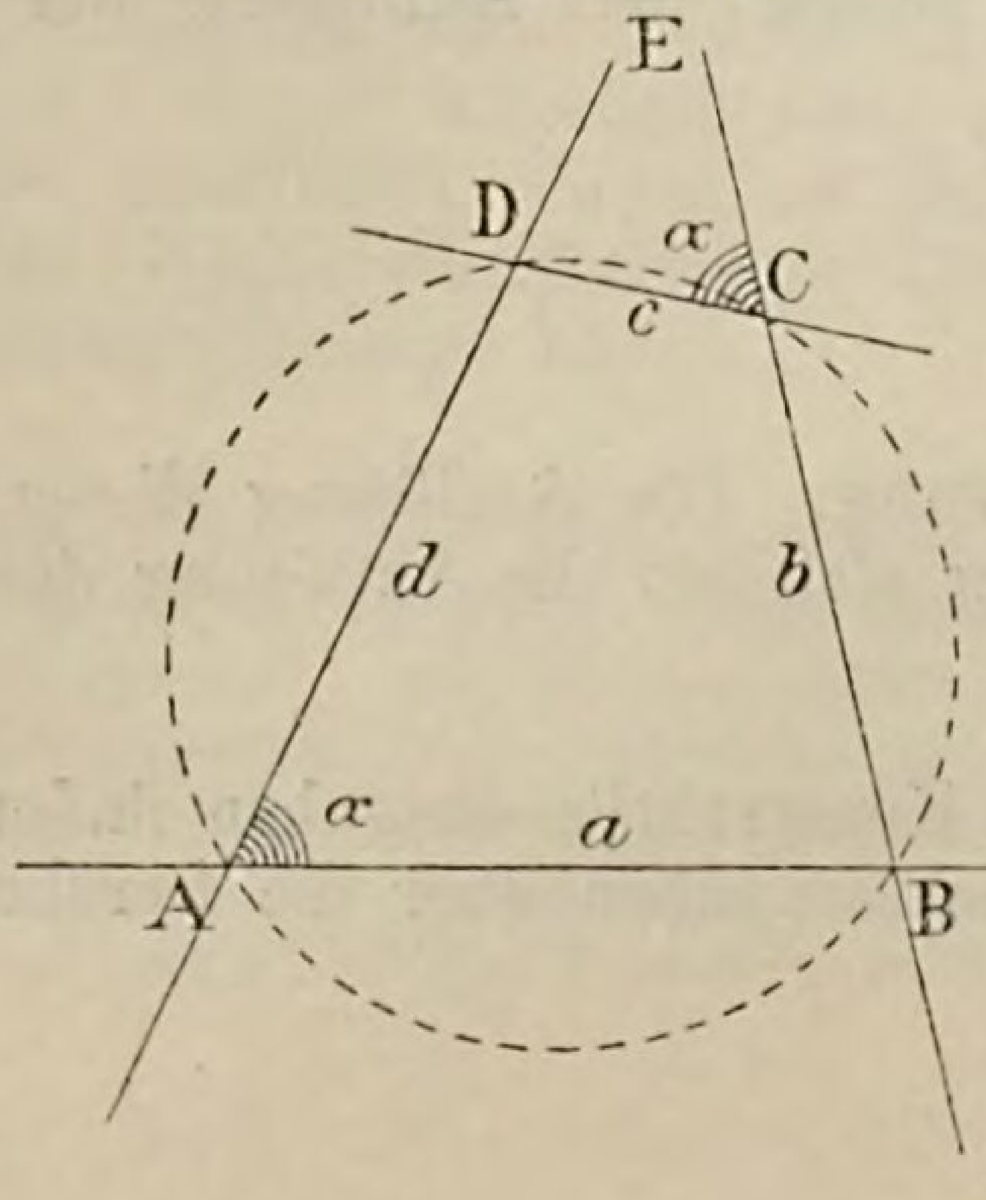
Aufgabe 121. In einen gegebenen Kreis soll ein Rechteck mit gegebenem Eckpunkt so eingezeichnet werden, dass seine Diagonalen sich unter einem gegebenen Winkel ε schneiden.

Erkl. 476. Wenn auf einer beliebigen Sehne in den Endpunkten Senkrechte errichtet werden, so bilden diese zwei parallele Sehnen, schneiden also wieder ein Bogenstück aus, welches dem Bogen über der gegebenen Sehne gleich ist und ein Sehnenviereck liefert. Dies ist ein Rechteck wegen der Symmetrie zu dem Durchmesser parallel den Senkrechten.

Auflösung. Wenn der Winkel AMD in Figur 201 gleich ε ist, so muss als Aussenwinkel $\varepsilon = MAB + MBA$ sein, also wegen des gleichschenkligen Dreiecks AMB auch $\sphericalangle MAB = \frac{\varepsilon}{2}$. Man ziehe also durch A den Durchmesser AC, trage daran $CAB = \frac{\varepsilon}{2}$ an, und vervollständige das Rechteck.

Aufgabe 122. Man soll beweisen, dass je vier Linien, deren zwei antiparallel sind zu den beiden andern, ein Sehnenviereck bilden.

Figur 202.

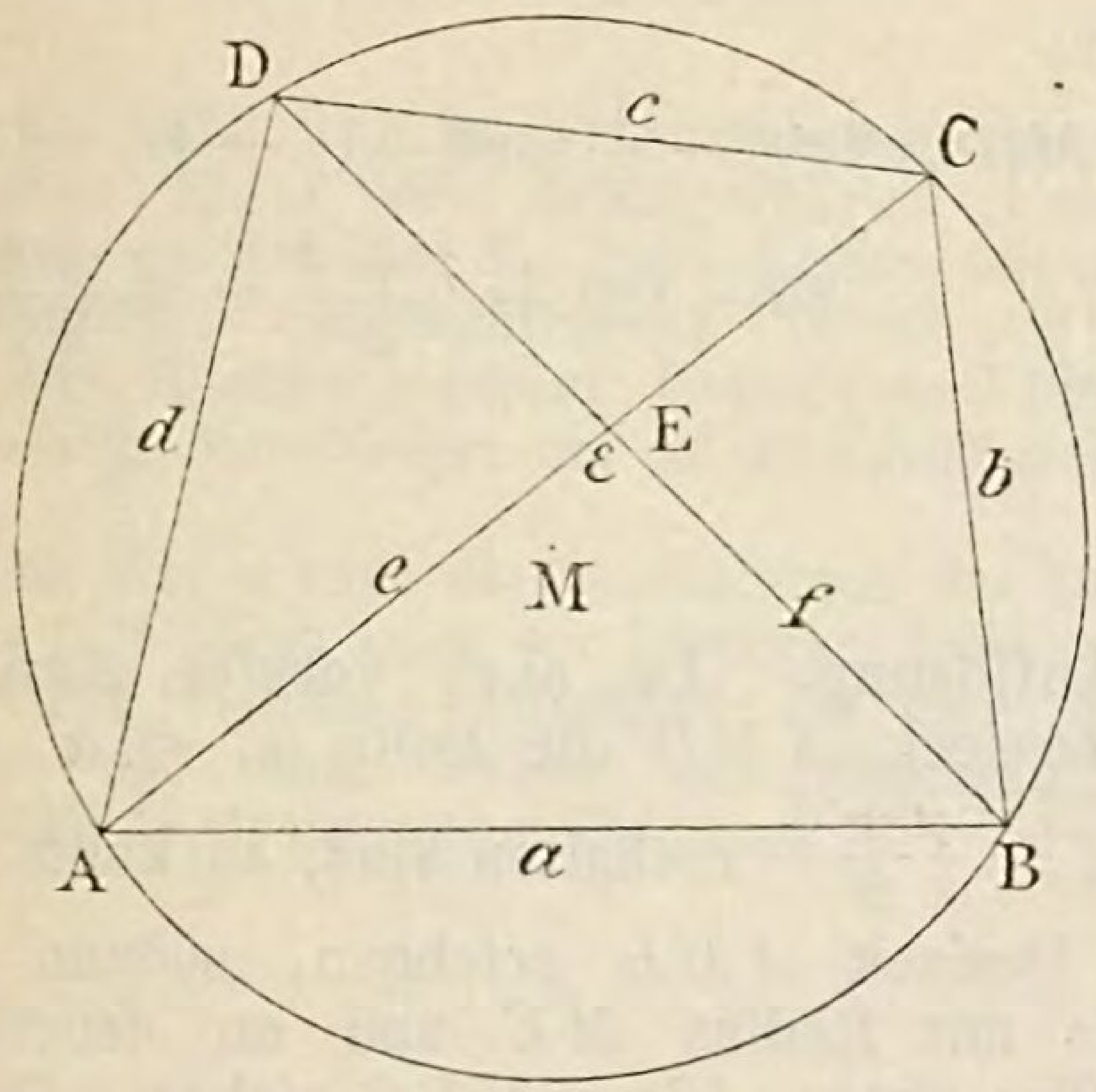


Auflösung. Die Linien a und c sind miteinander antiparallel zu den Linien b und d, wenn der Winkel zwischen b und c gleich, aber entgegengesetzt ist dem Winkel der Linien d und a (siehe Erkl. 297 des III. Teiles). Demnach ist der Winkel BCD als Nebenwinkel gleich $180 - \alpha$, also $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180$ und folglich auch $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180$. Daher hat das Viereck $ABCD$ die in Satz 25 enthaltene Eigenschaft und ist ein Sehnenviereck.

Erkl. 477. Würde Winkel $EDC = EAB$, so wäre c parallel a, ist aber Winkel $ECD = EAB$, so ist c antiparallel a zu den Linien b und d.

Aufgabe 123. Man soll in einen gegebenen Kreis ein Sehnenviereck einzeichnen, von welchem zwei Gegenseiten und eine Diagonale gegeben sind.

Figur 203.

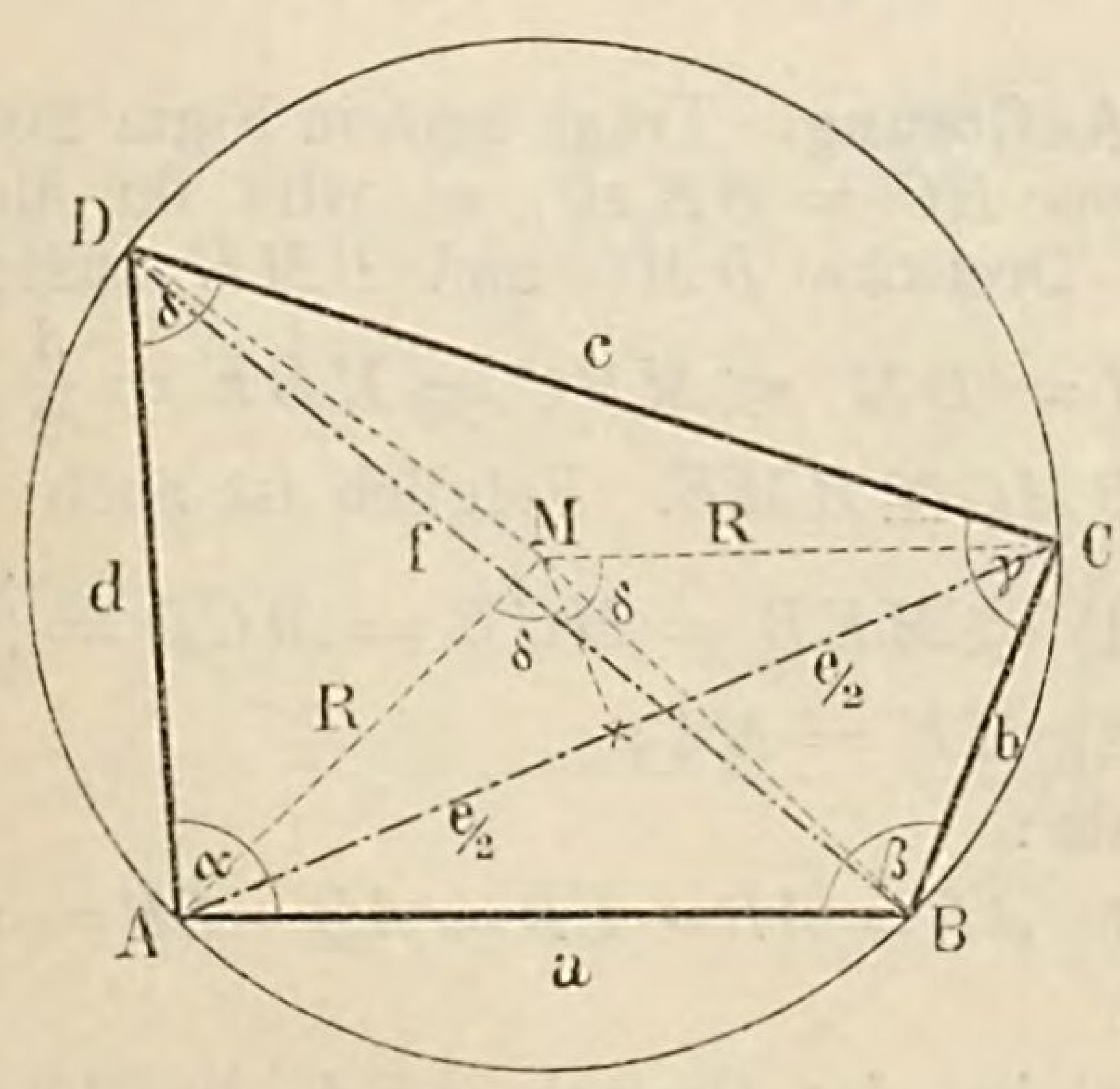


Erkl. 478. In allgemeiner Bezeichnung würde die vorliegende Aufgabe lauten: „Sehnenviereck aus r, a, c, e“ — denn ein Sehnenviereck hat vier willkürliche Bestimmungsstücke.

Auflösung. Ist die Seite a in den Kreis eingezeichnet, so kann von A oder B aus die gegebene Diagonale mittels des Zirkels eingetragen werden, und vom Endpunkte derselben in entgegengesetzter Richtung die zweite Seite c. — Man erhält zweierlei Lösungen, da man zweierlei Endpunkte für die Diagonale erhält, — und so lange alle drei gegebenen Strecken kleiner sind als der Kreisdurchmesser.

Aufgabe 124. Von einem Sehnenviereck kennt man zwei Gegenecken A und C und ausserdem die Richtungen der vom Eckpunkte A ausgehenden Linien a, d, R. Man konstruiere das Viereck.

Figur 204.



Auflösung. Da AC eine Sehne des Kreises wird, so kann man eine zweite Linie durch den Kreismittelpunkt erhalten, wenn man die Mittelsenkrechte von AC konstruiert. Diese liefert den Punkt M, also den Radius AM und der Kreis schneidet sodann die Punkte B und D auf a und d aus.

Aufgabe 125. Man beweise, dass der Winkel der Radien nach den Eckpunkten einer Seite eines Tangentenvierecks gleich der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel ist.

Auflösung. Im Dreieck ABM (siehe Figur 205) ist:

Erkl. 479. Die vorstehende Aussage ist ein einzelner Teil des zum Satz 27 durchgeführten Beweisganges. Denn der Winkel je zweier Winkelhalbierenden eines beliebigen Vierecks ist eben gleich der halben Summe der Gegenwinkel.

$$\sphericalangle MAB = \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle MBA = \frac{\beta}{2},$$

also:

$$\sphericalangle AMB = 180^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Nun ist aber:

$$\alpha + \beta = 360 - (\gamma + \delta),$$

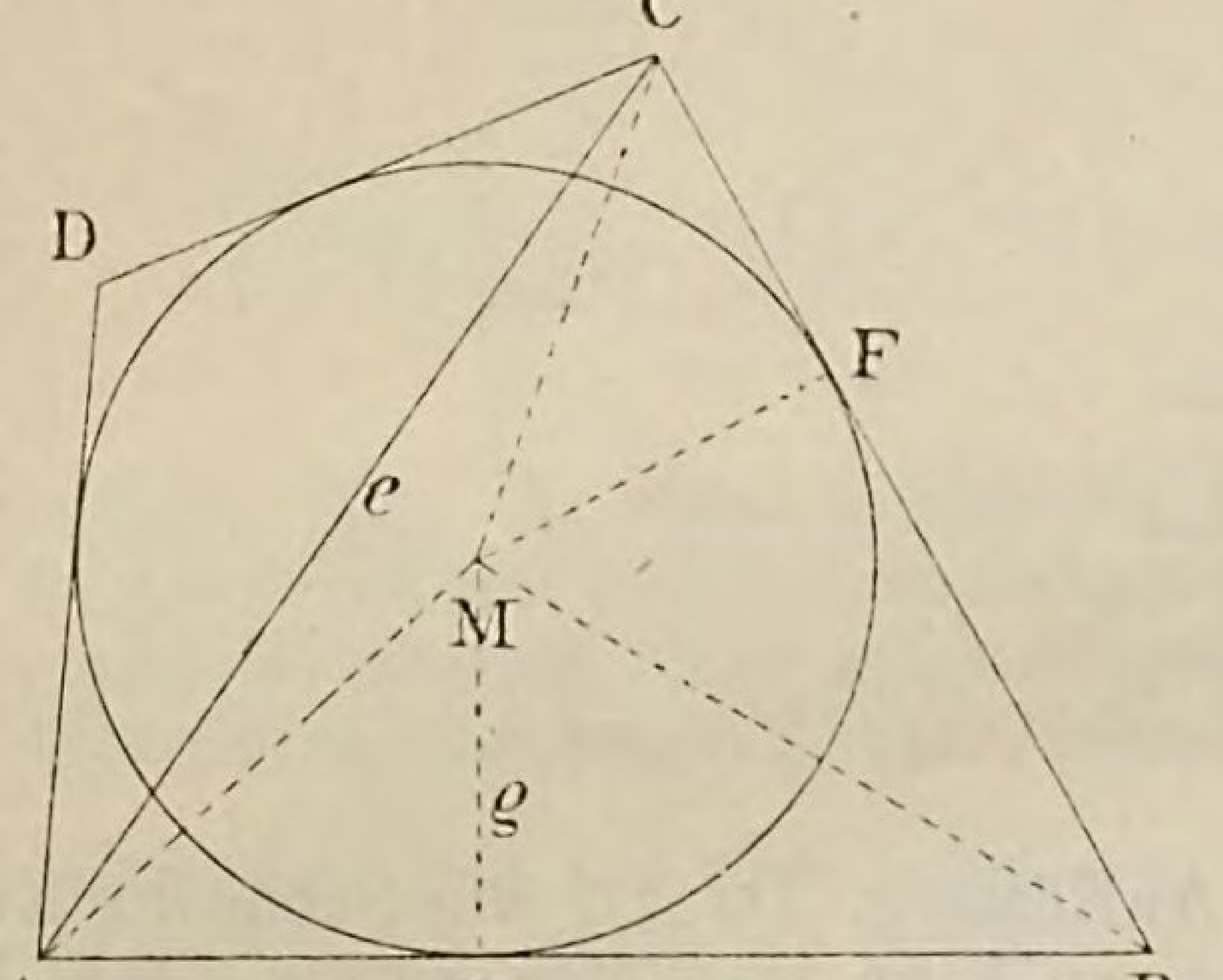
also:

$$\sphericalangle AMB = 180^0 - \frac{1}{2}[360 - (\gamma + \delta)]$$

$$= 180 - 180 + \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

Aufgabe 126. Von einem Tangentenviereck sei gegeben der $\sphericalangle \alpha$, die Winkelsumme $\gamma + \delta$, und die Strecken a und e. Man soll dasselbe konstruieren.

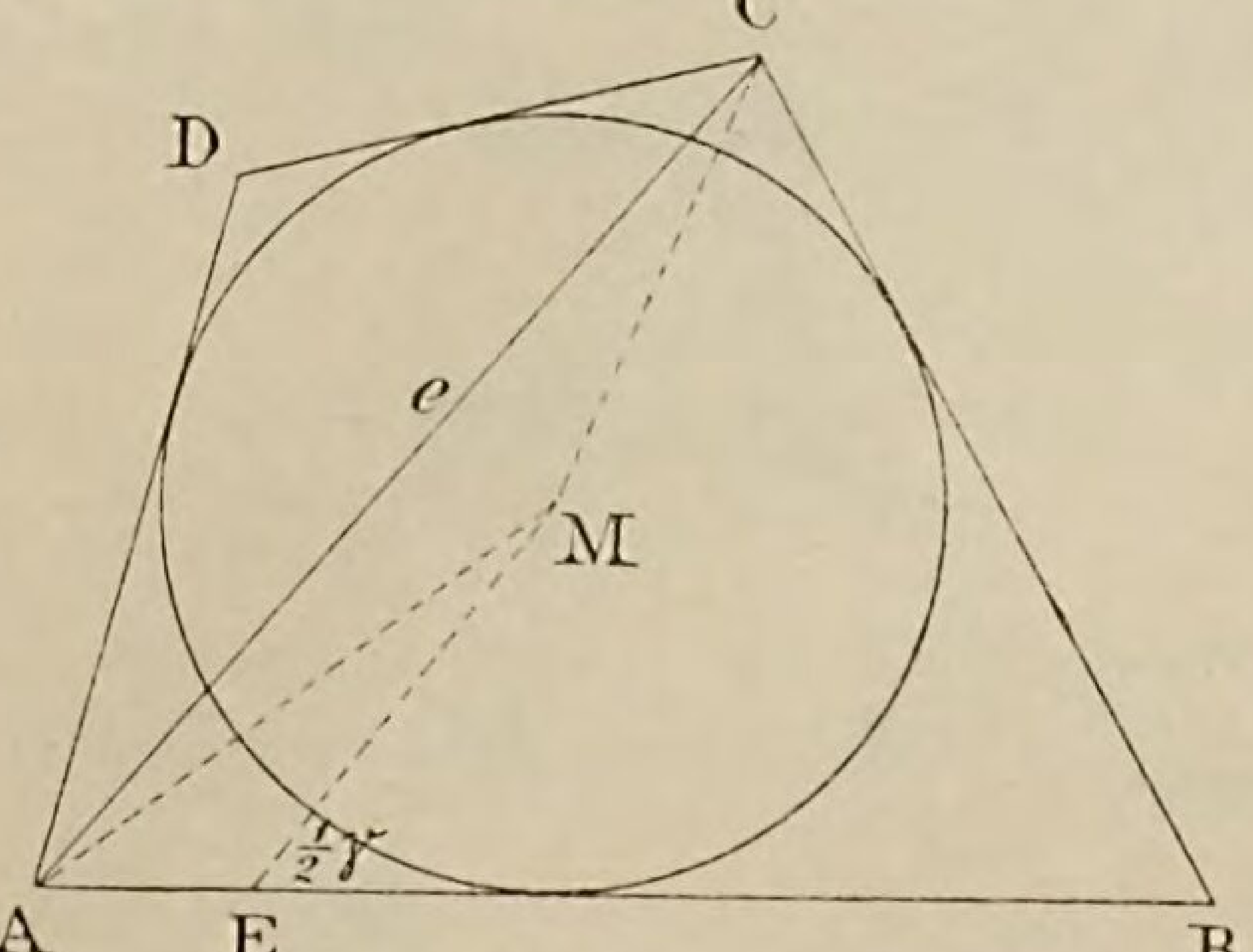
Figur 205.



Auflösung. Da nach voriger Aufgabe im Dreieck AMB die Seite a, $\sphericalangle \alpha$, und $\sphericalangle M = \frac{\gamma + \delta}{2}$ enthalten sind, so kann man das Dreieck AMB zeichnen, sodann den Kreis mit Radius ME und an denselben die Tangenten AD und BC ziehen. Durch Eintragen der Diagonale $AC = e$ erhält man Punkt C, und zieht von da aus die vierte Tangente CD.

Aufgabe 127. Was für Beziehungen liefert beim Tangentenviereck derjenige Punkt E auf der Seite a, dessen Entfernung von B gleich der Seite BC ist?

Figur 206.



Auflösung. Trägt man in Figur 206 von B aus $BC = BE$ ab, so wird für die beiden Dreiecke BMC und BME ausserdem $BM = BM$, $\sphericalangle MBC = MBE = \frac{\beta}{2}$, also $\triangle BMC \cong BME$. Folglich ist auch:

1) $\sphericalangle MEB = MCB = MCD = \frac{\gamma}{2}$,

2) $ME = MC$;

ferner:

3) $AE = AB - EB = AB - CB = a - b$;

und

4) hat das Dreieck AEM die Höhe von M auf AE gleich dem Radius ϱ.

Erkl. 480. Wegen der nebenstehenden Beziehungen des Punktes E zum Viereck $ABCD$ dient das Dreieck AEM bei vielen Aufgaben zur Analysis.

Aufgabe 128. Man wiederhole die vorige Aufgabe auch für die Seiten e und d und untersuche das Dreieck AEF in Figur 207.

Erkl. 481. Die im Nebenstehenden an der folgenden Figur 207 durchgeführten Ueberlegungen gelten für das dem Kreise um den Mittelpunkt M umgeschriebene Viereck $ABCD$ ganz ohne Rücksicht darauf, dass dieses Viereck gleichzeitig dem Kreise um M' eingeschrieben ist. —

Auch hier dienen die Beziehungen des Dreiecks AEF allein oder der Dreiecke EBC und FDC für vielfache Aufgaben als diejenigen Stücke, auf deren Grösse und gegenseitiger Lage die Analysis aufgebaut wird.

Auflösung. Da $AE = a - b$ ist und (in Figur 207) $AF = d - c$, so muss nach Satz 27 wegen $a + c = b + d$ auch $a - b = d - c$ sein, also $AE = AF$. Daher ist Dreieck AEF gleichschenklig, und die Linie AM, welche den Winkel α halbiert, wird Mittelsenkrechte von EF. Es ist:

$$\sphericalangle AEF = AFE = 90 - \frac{\alpha}{2}.$$

Da ferner wegen der gleichschenkligen Dreiecke EBC und FCD auch $\sphericalangle CFD = 90 - \frac{\beta}{2}$ und $CFD = 90 - \frac{\delta}{2}$ ist, so wird:

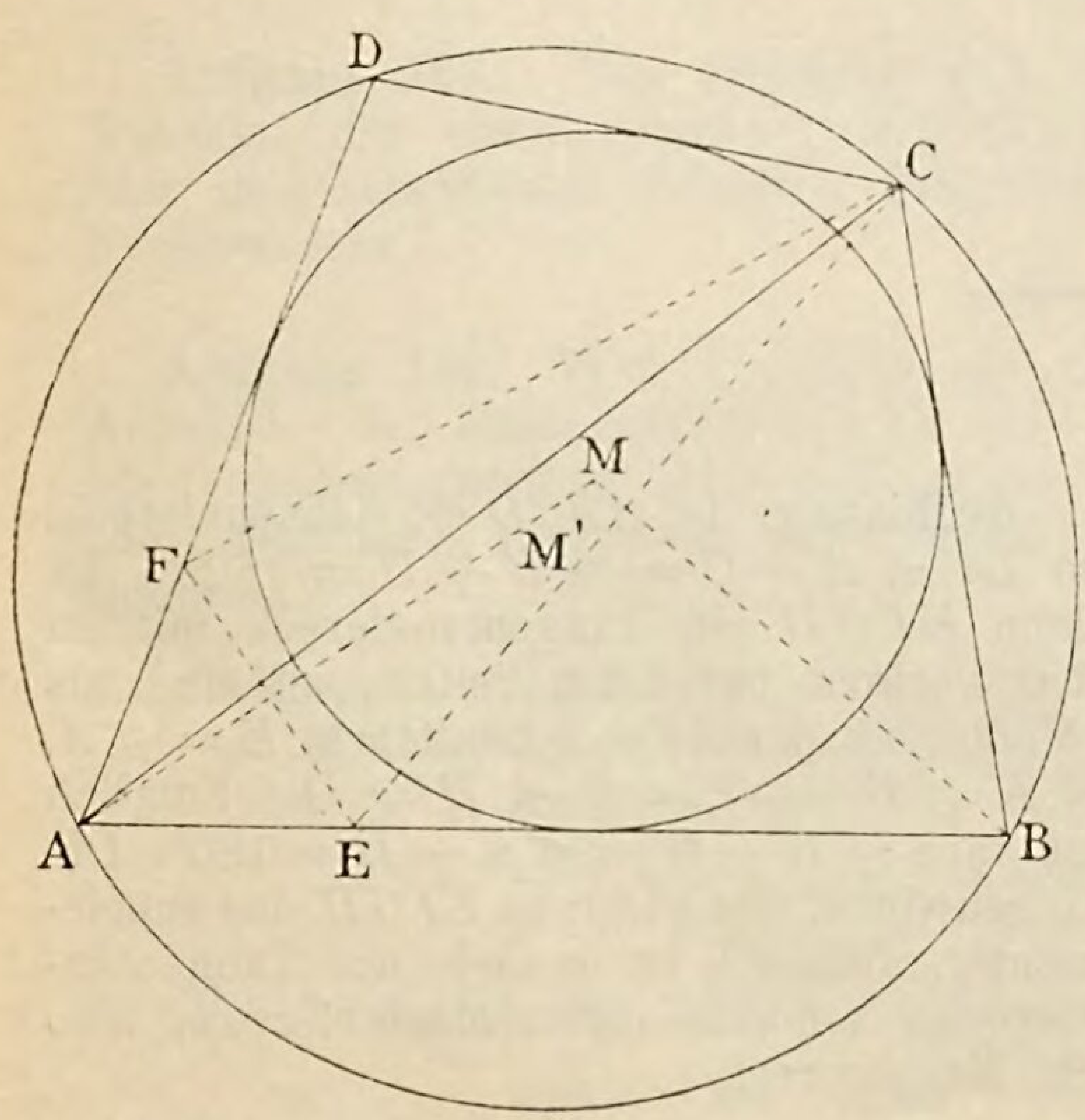
$$\sphericalangle EFC = 180^0 - AFE - CFD$$
$$= 180^0 - \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90 - \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\alpha + \delta}{2},$$

und ebenso $\sphericalangle FEC = \frac{\alpha + \beta}{2}$; also:

$$\sphericalangle AFC = 90 + \frac{\delta}{2}, \quad \sphericalangle AEC = 90 + \frac{\beta}{2}.$$

Aufgabe 129. Es soll ein Kreisviereck gezeichnet werden, von welchem die Winkel α und β und die konstante Differenz $a - b = d - c$ gegeben ist.

Figur 207.



Erkl. 482. Da im Kreisviereck:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 2\mathrm{R},$$

so ist mit α und β auch γ und δ bestimmt, und die Winkel:

$$CFD = 90 - \frac{\delta}{2} = 90 - \frac{180 - \beta}{2} = \frac{\beta}{2},$$

Auflösung. Aus den Stücken $a - b$ und α lässt sich auf Grund der vorigen Aufgaben das Dreieck AEF konstruieren. An diesem lassen sich dann als bekannte Stücke antragen die $\sphericalangle DFC = 90 - \frac{\delta}{2}$ und $BEC = 90 - \frac{\beta}{2}$ und liefern so den Punkt C, also die Sehne $AC = e$ des Kreises um M'. Von diesem Kreise kennt man aber ausser dieser Sehne auch die Peripheriewinkel bei B bezw. D. Man kann also denselben zeichnen und erhält durch ihn auf a und d die Punkte B und D ausgeschnitten.

entsprechend:

$$CEB = 90 - \frac{\beta}{2} = 90 - \frac{180 - \delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Ebenso:

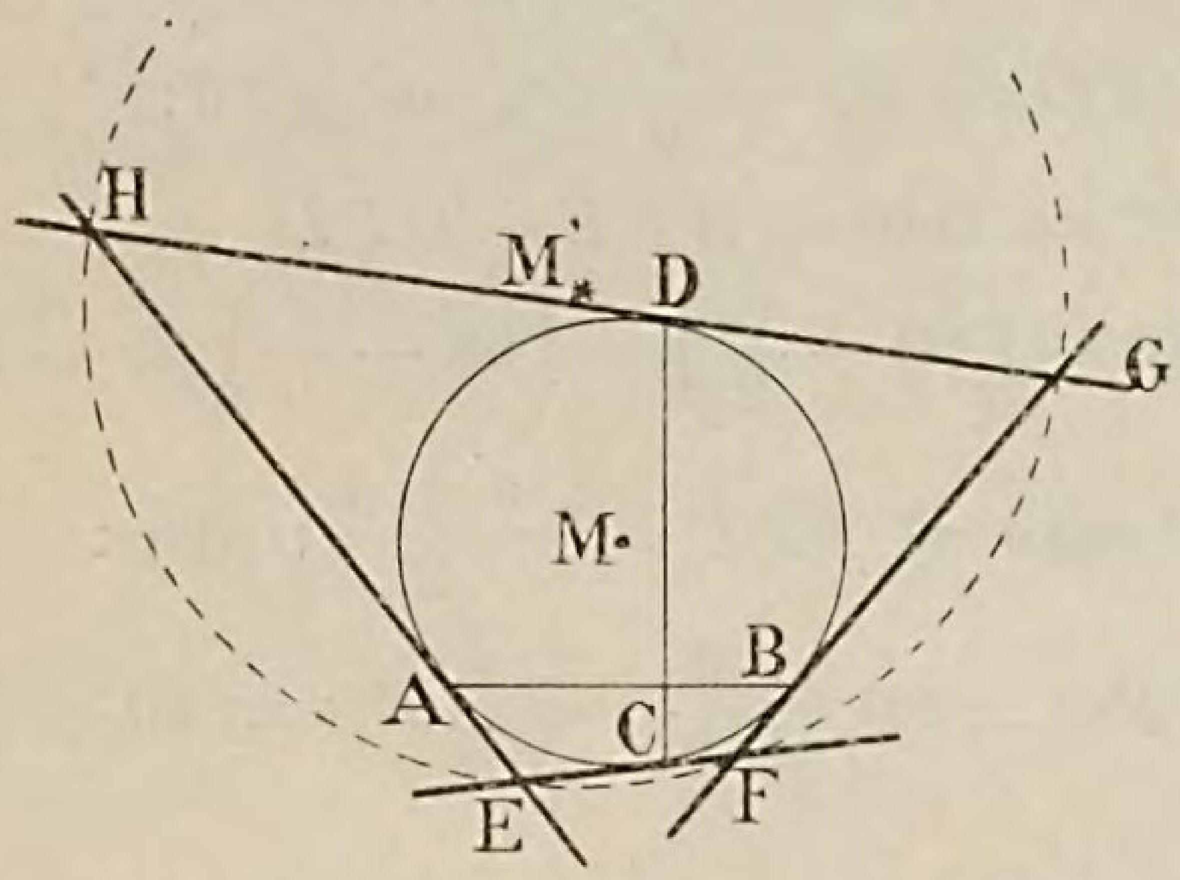
$$EFC = \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{\alpha}{2} + 90 - \frac{\beta}{2} = 90 + \frac{\alpha - \beta}{2};$$

und

$$AFC = 90 + \frac{\delta}{2} = 90 + 90 - \frac{\beta}{2} = 180^0 - \frac{\beta}{2}.$$

Aufgabe 130. Man soll beweisen, dass stets ein Kreisviereck entsteht, wenn man in den Schnittpunkten zweier senkrechten Sehnen eines Kreises die Tangenten zieht.

Figur 208.



Erkl. 483. Der gegebene Inkreis des Vierecks $EFGH$ bildet eines der drei Bestimmungsstücke desselben. Ist dann eine der Sehnen, z. B. CD festgelegt, so gibt es immer noch unendlich viele Lagen der zweiten, also unendlich vielerlei Kreisvierecke. Sind also ausser ϱ noch ein Winkel, z. B. $\sphericalangle E$ gegeben, so ist damit Bogen AC festgelegt, also wieder unendlich vielerlei Lagen des rechten Winkels der von A und C ausgehenden Sehnen möglich; durch ϱ und zwei Winkel aber wäre das Kreisviereck eindeutig bestimmt.

Auflösung. Sind $AB \perp CD$ in Figur 208 die beiden Sehnen, so sind nach Aufgabe 14 und 75 die Bogen AC und DB supplementär und ebenso AD und BC. Nach Satz 13 sind aber zu eben diesen Bogen supplementär die Tangentenwinkel E, G, F, H, nämlich: $\sphericalangle E = 180 - AMC$, $\sphericalangle G = 180^0 - BMD$ u. s. w.

Folglich ist:

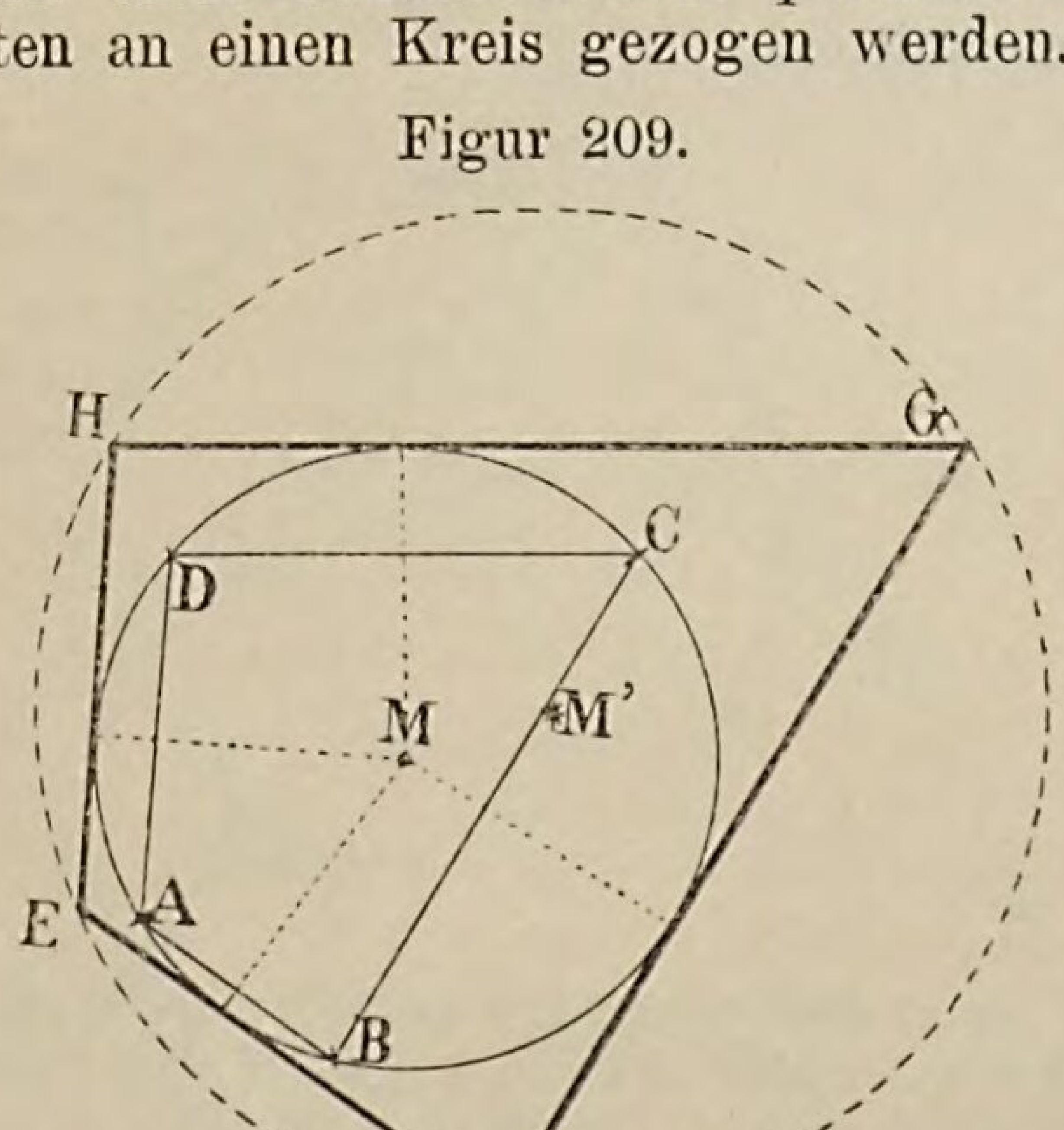
$$\sphericalangle E + \sphericalangle G = (180^0 - AMC) + (180^0 - BMD)$$
$$= 360^0 - 180^0 = 180^0,$$

und ebenso $\sphericalangle F + \sphericalangle H = 180^0$.

In dem Viereck $EFGH$ sind demnach je zwei Gegenwinkel supplementär; Tangentenviereck des Kreises um M ist dasselbe auch, also ist es ein Kreisviereck.

Aufgabe 131. Man beweise, dass stets ein Kreisviereck entsteht, wenn zu den Seiten eines Sehnenvierecks parallele Tangenten an einen Kreis gezogen werden.

Figur 209.



Auflösung. Ist $ABCD$ ein Sehnenviereck, so ist $\sphericalangle A + C = \sphericalangle B + D = 180^0$. Ist dann $EFGH$ ein Tangentenviereck mit zu den vorigen parallelen Seiten, so sind als Winkel mit parallelen Schenkeln $\sphericalangle E = \sphericalangle A$, $\sphericalangle F = B$, $\sphericalangle G = C$, $\sphericalangle H = D$. Folglich ist auch $\sphericalangle E + G = \sphericalangle F + H = 180^0$: Die Gegenwinkel des Vierecks $EFGH$ sind supplementär, demnach ist es nicht nur Tangentenviereck, sondern auch Sehnenviereck, also ein Kreisviereck.

Erkl. 484. Man erhält ein um- oder angeschriebenes Tangentenvierseit je nach der Wahl der Tangenten. Auch diese Aufgabe führt zu den Ergebnissen der Erkl. 483: Ist ϱ gegeben und zwei Winkel, so ist das Sehnenviereck $ABCD$ und damit auch das Tangentenviereck $EFGH$ eindeutig bestimmt. — Die umgekehrte Aufgabe, in einen gegebenen Kreis Kreisvierecke zu beschreiben, ist mit Hilfe der Aehnlichkeitslehre zu lösen.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 132. In einen gegebenen Kreis ein Antiparallelogramm einzuzeichnen, von dem die Winkel der Seiten und der der Diagonalen gegeben sind.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 120 und 121.

Aufgabe 133. Man konstruiere ein Sehnenviereck, von welchem drei Seiten und ein Winkel gegeben sind.

Andeutung. Man erhält den Umkreis des Vierecks als Umkreis eines der Teildreiecke.

Aufgabe 134, 135, 136. Man ergänze ein gegebenes Dreieck ABC

a) zu einem Sehnenviereck mit gegebener Seite,

b) zu einem Tangentenviereck mit gegebenem Winkel,

c) zu einem Kreisviereck.

Andeutung. Die Auflösungen dieser Aufgaben sind analog den Auflösungen der Aufgaben 123, 128, 129.

Aufgabe 137. Wie verhalten sich die Anzahlen der einem gegebenen Kreise ein- oder umgeschriebenen Sehnen-, Tangenten-, Kreisvierecke?

Andeutung. Man vergleiche die Angaben in Erkl. 483.

Aufgabe 138. Wie verhalten sich die Anzahlen, der einem gegebenen Kreise ein- oder umgeschriebenen Antiparallelogramme oder Deltoide, Rechtecke oder Rhomben, Quadrate?

Andeutung. Wie zu voriger Aufgabe.

Anmerkung 8. Weitere zu diesem Abschnitt gehörige Konstruktionsaufgaben findet man in Müller, Konstruktionsaufgaben I, O, „Aufgaben über Sehnen und Tangentenvierecke“: Aufgaben 1497 bis 1607.

9) Aufgaben über allgemeine Sehnen- und Tangentenvielecke und regelmässige Polygone.

(Zu Abschnitt A 6 a, b.)

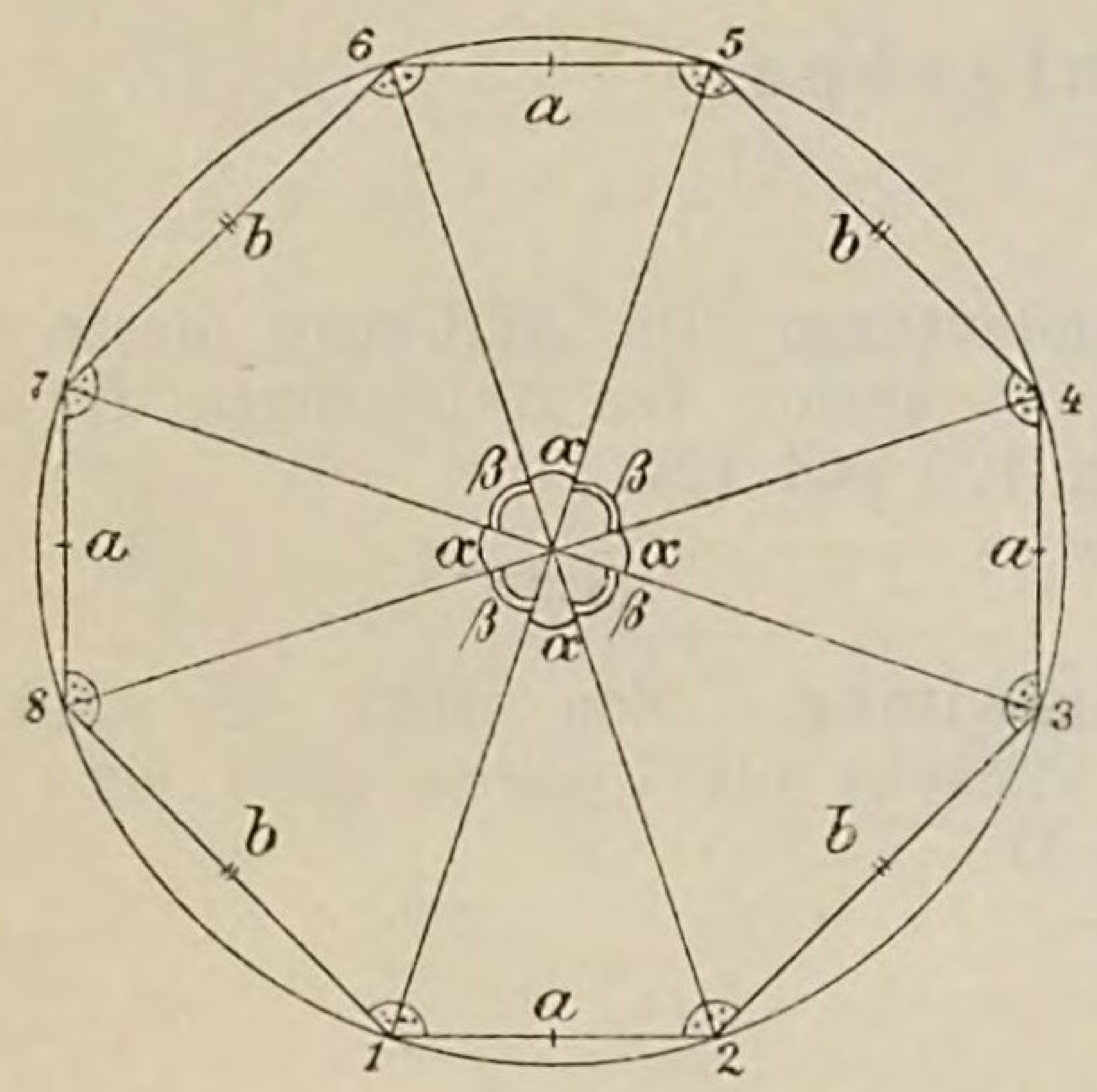
a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 139. Welche Eigenschaften erhält ein Sehnenvieleck, wenn seine Winkel gleich werden?

Auflösung. Geht man von einer einzelnen Seite aus, so liegen an derselben beiderseits

Erkl. 485. Die Gleichheit je zweier an dieselbe Seite beiderseits anstossenden Seiten kann verschieden bewiesen werden: Entweder berücksichtigt man die Symmetrie der ganzen Figur in Bezug auf den zur mittleren Seite senkrechten Durchmesser des Kreises, oder man benützt den Satz über die Gleichheit der zu gleichen Peripheriewinkeln gehörigen Bogen und Sehnen.

Figur 210.



Erkl. 486. In Figur 210 ist ein gleichwinkliges Sehnenvieleck von gerader Seitenzahl dargestellt: Dabei liegt immer zwischen zwei langen Seiten (b) eine kurze (a) und umgekehrt. Ebenso beim eingeschriebenen Rechteck. Wird dann aber die Seitenzahl ungerade, z. B. 7, so müsste gleich werden die erste Seite der dritten, fünften, siebten, neunten. Die achte ist aber wieder die die erste, die neunte die zweite; also müsste auch die erste der zweiten gleich werden.

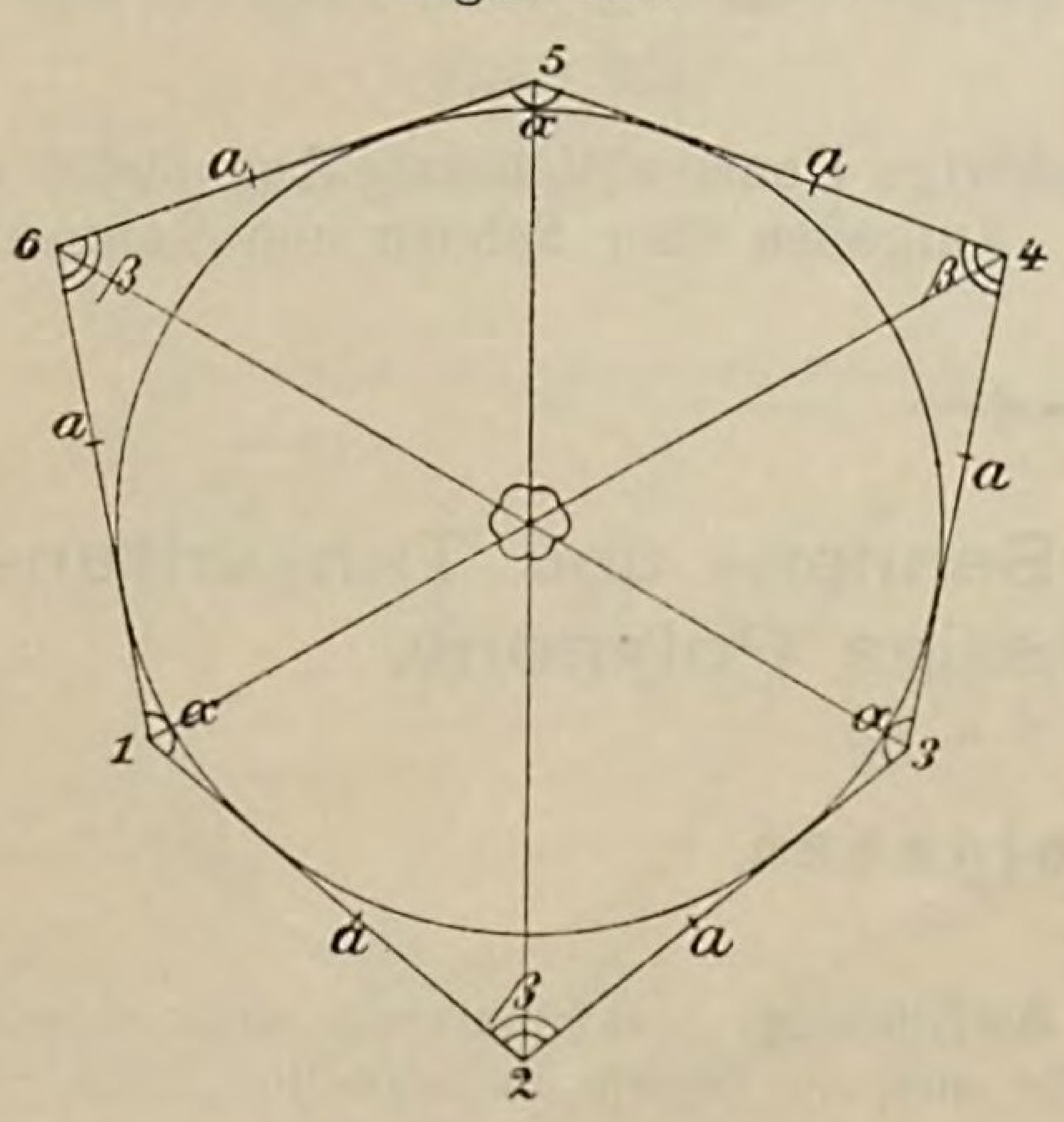
gleiche Winkel, also als deren Schenkel auch gleichlange Sehnen. An jeder dieser beiden müssen wieder beiderseits gleiche Sehnen liegen. Demnach ist unter den Seiten dieses Sehnenvielecks jede erste gleich der zweitfolgenden und zweitvorhergehenden. Ist daher die Gesamtzahl der Seiten gerade, so erhält man für die eine Hälfte der Seiten die eine, für die andere Hälfte die andere Grösse; sind aber die Seiten in ungerader Anzahl, so kommt man beim Weiterzählen von einer Seite aus auch einmal auf die benachbarten derselben, so dass dann alle Seiten gleich sind.

Man kann also den Satz aussprechen:

Satz. Ein Sehnenvieleck mit lauter gleichgrossen Winkeln hat bei ungerader Seitenzahl auch lauter gleichgrosse Seiten, oder ist ein regelmässiges Vieleck; bei gerader Seitenzahl hat dasselbe nur zweierlei je aufeinanderfolgende Seitengrössen.

Aufgabe 140. Man untersuche die Eigenschaften eines gleichseitigen Tangentenvielecks?

Figur 211.



Auflösung. Geht man von einem einzelnen Winkel aus, so liegen an demselben beiderseits gleiche Seiten an, also an deren Endpunkten auch gleiche Tangentenwinkel. Auf jeden dieser beiden Winkel müssen beiderseits wieder gleiche Winkel folgen. Demnach ist unter den Winkeln des Tangentenvielecks jeder erste gleich dem zweitfolgenden und vorhergehenden. Ist daher die Gesamtzahl der Winkel gerade, so erhält man für die eine Hälfte der Winkel die eine, für die andere Hälfte die andere Grösse; sind aber die Winkel in ungerader Anzahl vorhanden, so kommt man beim Weiterzählen von einem Winkel aus auch einmal auf den benachbarten desselben, so dass alle Winkel gleich werden. Man erhält also die Aussage:

Satz. Ein Tangentenvieleck mit lauter gleichgrossen Seiten hat bei

Erkl. 487. Die Gleichheit je zweier denselben Winkel beiderseits benachbarten Winkel kann erschlossen werden aus der Symmetrie in Bezug auf die Winkelhalbierende des ersteren; oder auch aus der Gleichheit der Tangentenwinkel, welche zu gleichgrossen Tangentenabschnitten gehören (vergleiche die Antwort der Frage 32).

Erkl. 488. In Figur 211 ist ein gleichseitiges Tangentenvieleck von gerader Seitenzahl dargestellt. Dabei liegt zwischen je zwei grossen Winkeln α ein kleiner Winkel β und umgekehrt. Ebenso bei jedem umgeschriebenen Rhombus je ein stumpfer zwischen zwei spitzen. Wird dann aber die Seitenzahl ungerade, z. B. 5 oder 7, so müssen gleich werden der erste Winkel dem dritten, fünften, siebten u. s. w. Ist also beim Fünfeck der sechste wieder der erste, so ist der siebte der zweite; also müsste auch der erste und zweite Winkel gleich werden, und damit sämtliche: das Vieleck würde regelmässig.

ungerader Seitenzahl auch lauter gleichgrosse Winkel, oder ist ein regelmässiges Vieleck; bei gerader Seitenzahl hat dasselbe nur zweierlei je aufeinanderfolgende Winkelgrössen.

Aufgabe 141. Was wird aus einem Sehnenvieleck mit gleichen Seiten oder einem Tangentenvieleck mit gleichen Winkeln?

Erkl. 489. Die nebenstehenden Beweise können auch in mehrfach verschiedener Weise geführt werden: Beim gleichseitigen Sehnenvieleck beträgt jedes Kreisbogenstück $\frac{360}{n}$ Grad, und ein jeder Peripheriewinkel hat einen aus $n-2$ solchen Stücken gebildeten Standbogen, also je dieselbe Grösse von:

$$\frac{n-2}{2}\cdot\frac{360}{n}=\left(1-\frac{2}{n}\right)180^0.$$

Beim gleichwinkligen Tangentenvieleck bilden die durch den Mittelpunkt gehenden Winkelhalbierenden lauter kongruente gleichschenklige Dreiecke wegen der gleichen Winkelhälften an den Tangenten als Grundseiten, und da je zwei eine gemeinsame Seite haben. Folglich werden wieder sämtliche Grundseiten gleichlang. — Man kann auch die Berührungssehnen der Tangentenwinkel zu Hilfe nehmen und wegen deren Gleichheit die Gleichheit der Tangentenabschnitte erschliessen.

Auflösung. Wenn ein Sehnenvieleck gleiche Seiten hat, so bilden seine Seiten mit den zugehörigen Radien lauter kongruente gleichschenklige Dreiecke, also wird der Vollwinkel am Mittelpunkt in n gleiche Teile geteilt, und das Vieleck wird nach Antwort der Frage 101 ein regelmässiges.

Wenn ein Tangentenvieleck gleiche Winkel hat, so bilden die Radien nach den Berührungspunkten lauter kongruente Deltoide, also wird der Vollwinkel am Mittelpunkt in n gleiche Teile geteilt, und das Vieleck nach Antwort der Frage 101 ein regelmässiges.

Man erhält also die Aussage:

Satz. Ein Sehnenvieleck mit gleichen Seiten — oder ein Tangentenvieleck mit gleichen Winkeln — ist ein regelmässiges Vieleck.

Aufgabe 142. Wie gross sind die Aussenwinkel eines regelmässigen n-Ecks und $2n$-Ecks?

Erkl. 490. Die Ausführungen der nebenstehenden Auflösung dienen häufig zur Konstruktion eines Vielecks mit doppelter, vierfacher u. s. w., Seitenzahl eines gegebenen. Dazu

Auflösung. Da sämtliche Aussenwinkel zusammen 360^0 betragen und einzeln einander gleich sind, so beträgt beim regelmässigen n-Eck jeder $\frac{360^0}{n}$, also ebensoviel als der zu einer Seite gehörige Mittelpunktswinkel.

hat man die beiden Aussenwinkel an einer Seite des gegebenen zu halbieren, vierteilen u. s. w., auf den Schenkeln die Seitenstrecken abzutragen, um so die nächsten Eckpunkte zu erhalten.

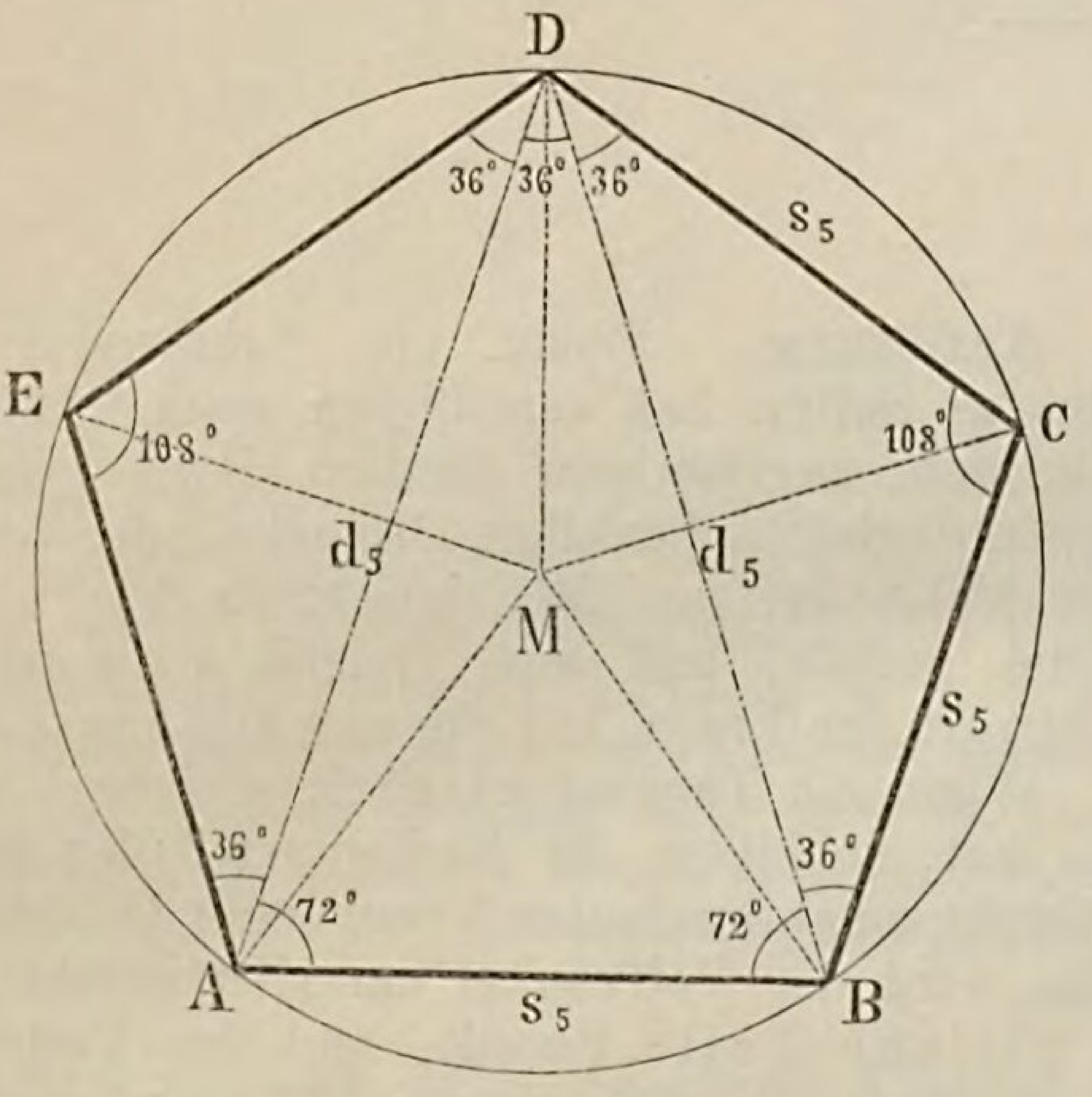
Erkl. 491. Auch das Wachstum der Vieleckswinkel ist aus vorstehendem zu erkennen. Ist α der Winkel eines n-Ecks, so ist $180 - \alpha$ sein Aussenwinkel, $\frac{180 - \alpha}{m}$ die Zunahme des Innenwinkels vom n-Eck aufs $m \cdot n$-Eck, nämlich von α zu $\alpha + \frac{180 - \alpha}{m} = \frac{1}{m}[180 + (m - 1)\alpha]$, also für $m = 2$: $\frac{180 + \alpha}{2}$.

Ebenso sind die Aussenwinkel eines regelmässigen $2n$-Ecks je gleich $\frac{360}{2n}$, also halb so gross als diejenigen des regelmässigen n-Ecks.

Analog findet man, dass die Aussenwinkel eines regelmässigen Vielecks von m-facher Seitenzahl eines gegebenen, auch den mten Teil der Aussenwinkel des gegebenen Vielecks betragen.

Aufgabe 143. Wie vielerlei Diagonalen haben die regelmässigen Vielecke?

Figur 212.



Auflösung. Ein Dreieck hat 0 Diagonalen, Viereck 2 gleiche, Fünfeck 5 gleiche, Sechseck 9 von zweierlei Grösse, nämlich 3 Durchmesser und 6 kleinere; Siebeneck 14 von zweierlei Grössen, je 7 grössere und 7 kleinere u. s. w.

Ein regelmässiges $2n$-Eck hat $n\,(2n - 3)$ Diagonalen von $n - 1$ Grössen, nämlich n Durchmesser und je $2n - 4$ andere: jede umfassend $\frac{2}{2n}, \frac{3}{2n}, \frac{4}{2n} \cdots \frac{n-1}{2n}$ Teile des Umkreises.

Ein regelmässiges $(2n+1)$Eck hat $(2n+1)\cdot(n - 1)$ Diagonalen von $n - 1$ Grössen, nämlich je $2n + 1$ von gleicher Grösse: jede umfassend $\frac{2}{2n+1}, \frac{3}{2n+1}, \cdots \frac{n}{2n+1}$ Teile des Umkreises.

Der Beweis wird erbracht, indem man von jeder Ecke aus abzählt, wieviele Teile des in m gleiche Teile geteilten Kreisumfanges beim m-Eck zu einer Diagonale als Sehne gehören können. Man gelangt dabei jeweils von 2 bis zu $\frac{m}{2}$.

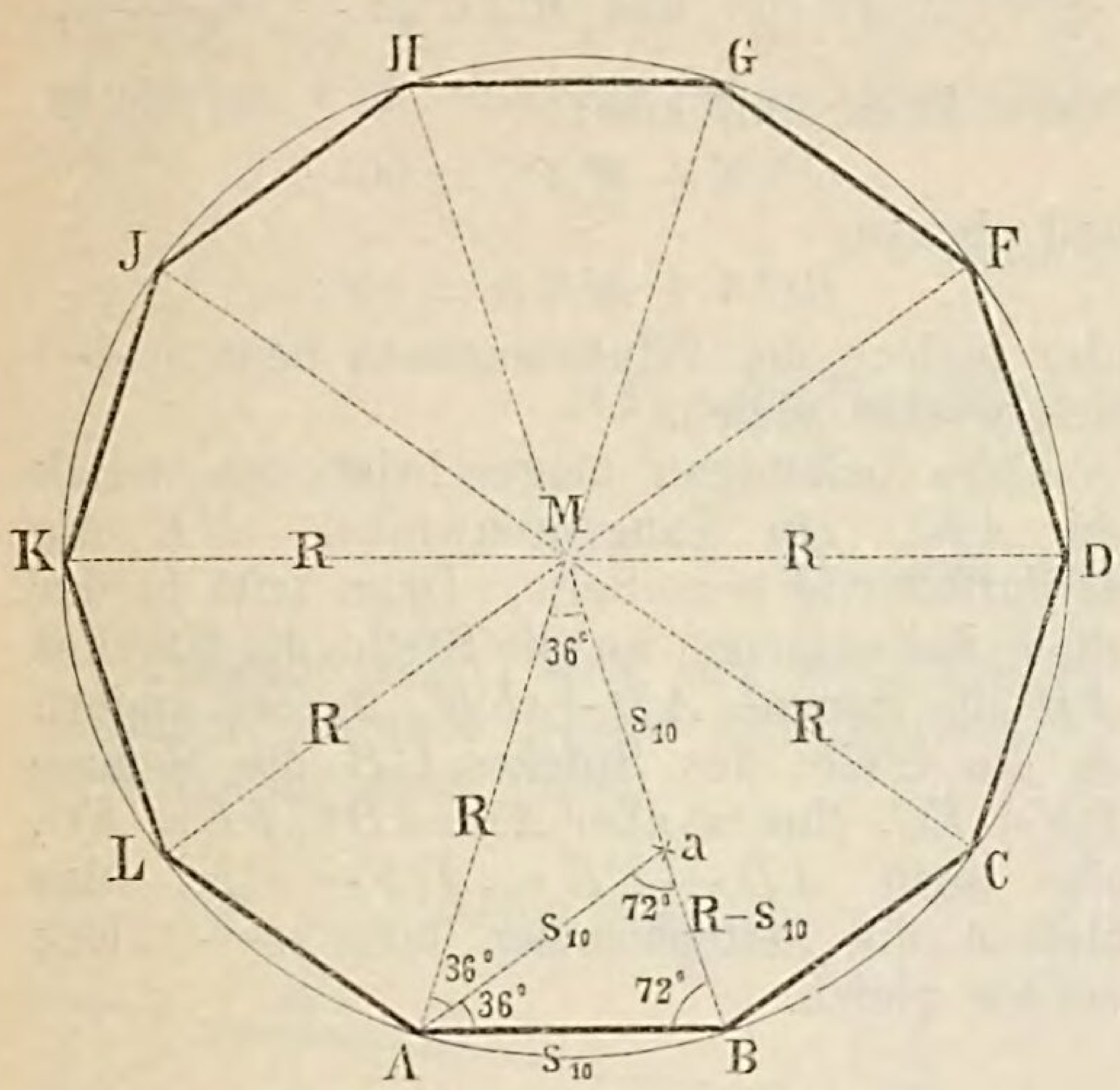
Erkl. 492. Bei jeder Diagonale können dann wieder die Winkel untersucht werden, welche sie mit den Seiten und mit anderen Diagonalen bildet. So ist in Figur 212 erkennbar, dass jede Diagonale des regelmässigen Fünfecks ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkeln 36°, 36°, 108° bildet. Da die Schenkel dieser Dreiecke sämtlich gleich sind, so sind dieselben kongruent und man erhält als Einzelfall der nebenstehenden Antwort:

> **Satz.** Die sämtlichen Diagonalen eines regelmässigen Fünfecks sind einander gleich, nämlich jede gleich der zu einem Kreisbogen von $\frac{2}{5}$ des Kreisumfangs gehörigen Sehne.

Aufgabe 144. Man halbiere beim regelmässigen Zehneck einen Winkel zwischen Seite und Radius und untersuche die entstehenden Figurenteile.

Auflösung. Da der Winkel zwischen Seite und Radius 72° beträgt, so entsteht zu dem

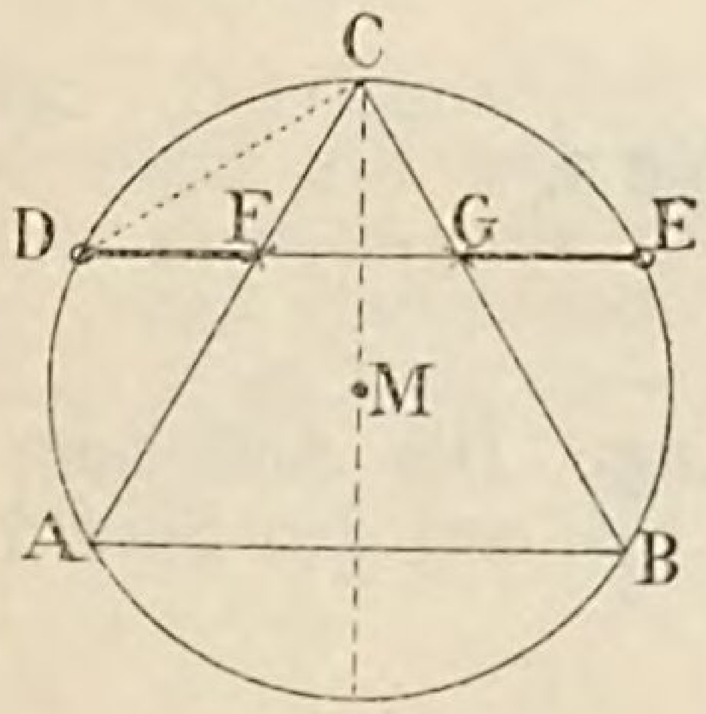
Figur 213.



Dreieck ABM mit Winkeln 72⁰, 72⁰, 36⁰ noch ein kleines mit gleichen Winkeln 72⁰, 72⁰, 36⁰ und AB als Schenkel, und ein grösseres ebenfalls gleichschenkliges mit Winkeln 36⁰, 36⁰, 108⁰. Man erhält also die in Aufgabe 127 des III. Teiles betrachtete Figur des gleichschenkligen Dreiecks, auf dessen Schenkel die Strecke R, s_{10}, $R - s_{10}$ ausgeschnitten werden.

Aufgabe 145. Wie teilen die Seiten eines regelmässigen Dreiecks die Sehne, welche zwei Bogenmittelpunkte des umgeschriebenen Kreises verbindet?

Figur 214.



Erkl. 493. Dass die Sehne DE in drei gleiche Teile geteilt wird, kann auch erkannt werden durch Drehung um M um den Betrag des Winkels $EGB = 60^0$. Dann fällt DE auf CB, DF und EG sind wegen Symmetrie gleich, und ausserdem fällt DF auf CG. — DE und die Seiten des Dreiecks ABC sind Diagonalen eines regelmässigen Sechsecks, FG selbst bildet mit FA und GC ebenfalls die Seiten eines Sechsecks nach Figur 99.

Auflösung. Ist DE in Figur 214 die zu untersuchende Sehne, so ziehe man CD und betrachte die Dreiecke CDF und CFG. Im ersteren ist $\sphericalangle C = \sphericalangle D$, da jeder ein Peripheriewinkel über einem gleichgrossen Bogen von 60⁰ ist. Im letzteren ist $\sphericalangle C = F = G$, weil C an sich 60⁰ ist, und sowohl der Winkel F als G Sehnenwinkel sind mit den gleichen Bogen $DA = CE = 60^0$ oder $CD = EB = 60^0$. Folglich ist:

1) $FD = FC$ und $CG = GE$ und

2) $CF = FG = CG$, also:

$$DF = FG = GE.$$

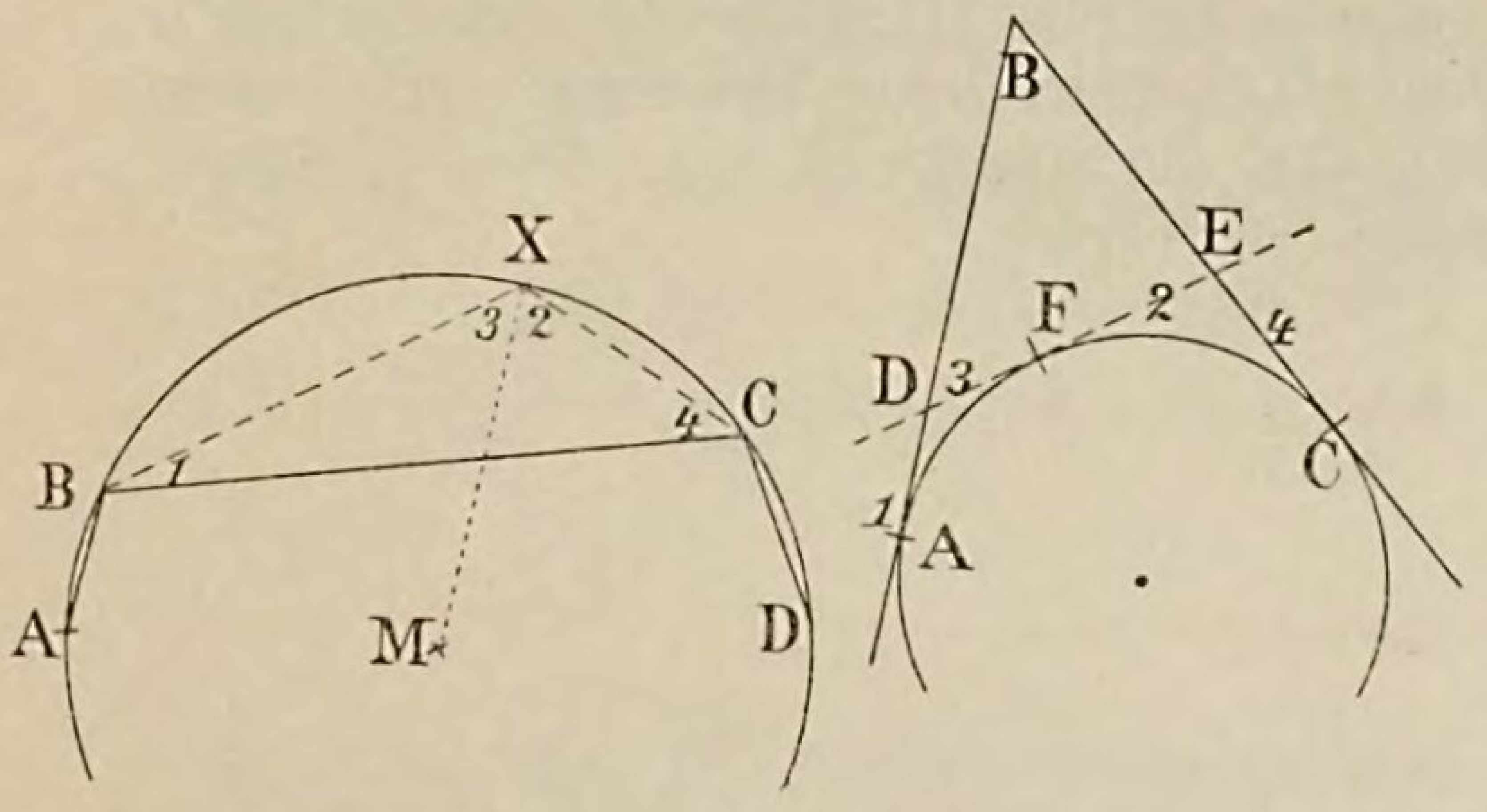
Aufgabe 146. Man beweise die Sätze 29 und 30 durch den Schluss von n auf $n+1$.

Erkl. 494. Der „Schluss von n auf $n+1$“ ist eine Ueberlegungsart, welche in vielen Zweigen der Mathematik vorkommt. Er beruht darin, dass man für einige einzelne Anfangsfälle einen Satz einzeln durchführt und dann beweist, dass er notwendig auch für jeden folgenden Fall gelten muss, wenn er für den vorhergehenden gilt. Ist also der Nachweis für

Auflösung. Beim beliebigen eingeschriebenen n-Eck (siehe Figur 215) sei $ABCD$ eine Sehnenfolge, X ein Punkt auf dem zu BC gehörigen Bogen, dann gehört zur einen Winkelsumme der Winkel ABC, zur andern DCB. Durch Zufügung der Ecke X kommt zur ersten Winkelsumme hinzu $CBX + MXC$, zur andern $BCX + MXB$. Nun ist:

das n-Eck erbracht, und bewiesen, dass der Satz für das Vieleck von $n+1$ Ecken gilt, so ist der Satz allgemein bewiesen.

Figur 215.



Erkl. 495. Der Winkel MXC ist Peripheriewinkel; sein Standbogen wäre der vom Durchmesser XM ausgeschnittene Halbkreis nach Abzug des Stückes XC, also $180 - \widehat{XC}$. Folglich ist die Grösse von $MXC = \frac{180 - \widehat{XC}}{2}$.

Ebenso wäre auch:

$$BXM = \frac{180 - \widehat{BX}}{2}, \quad BCX = \frac{\widehat{BX}}{2},$$

also $BXM + BCX = 90^0$.

$$\sphericalangle CBX = \frac{\widehat{CX}}{2} \text{ und } MXC = \frac{180 - \widehat{XC}}{2},$$

(siehe Erkl. 495) also:

$$CBX + MXC = 90^0$$

und ebenso:

$$BCX + MXB = 90^0;$$

also bleiben die Winkelsummen beim $n+1$ Eck wieder gleich.

Beim beliebigen umgeschriebenen n-Eck sei ABC ein Tangentenwinkel, DE die darauffallende neue Seite. Dann tritt in der einen Seitensumme an die Stelle des Stückes AB die Summe $AD + FE$, in der andern an die Stelle des Stückes CB die Summe $DF + EC$. Nun ist aber $AD = DF$, $FE = EC$, also auch $AD + FE = DF + CE$, also bleiben die Seitensummen beim $n+1$ Eck wieder gleich.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 147. Man beweise, dass ein Sehnenviereck ein Antiparallelogramm ist, wenn ein Paar Gegenseiten entweder parallel oder gleich ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf den Satz 7.

Aufgabe 148. Man beweise, dass ein Tangentenviereck ein Deltoid ist, wenn entweder ein Paar Gegenwinkel gleich ist, oder zwei Gegenecken auf demselben Durchmesser liegen.

Andeutung. Man suche einen Durchmesser, der Symmetrieachse ist.

Aufgabe 149. Man konstruiere ein regelmässiges $2n$-Eck über der Seite eines gegebenen regelmässigen n-Ecks.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 142 und Erkl. 491.

Aufgabe 150. Man untersuche die Winkel zwischen den Diagonalen unter sich und den Seiten im regelmässigen n-Eck.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 143.

Aufgabe 151. Man wiederhole die Auf gabe 145 für das Quadrat.

Andeutung. Man vergleiche die Figur 102.

Aufgabe 152. Man soll ein regelmässiges Vieleck von 4, 6, 8 u. s. w. Seiten konstruieren, wenn eine der Diagonalen gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 143 und 150.

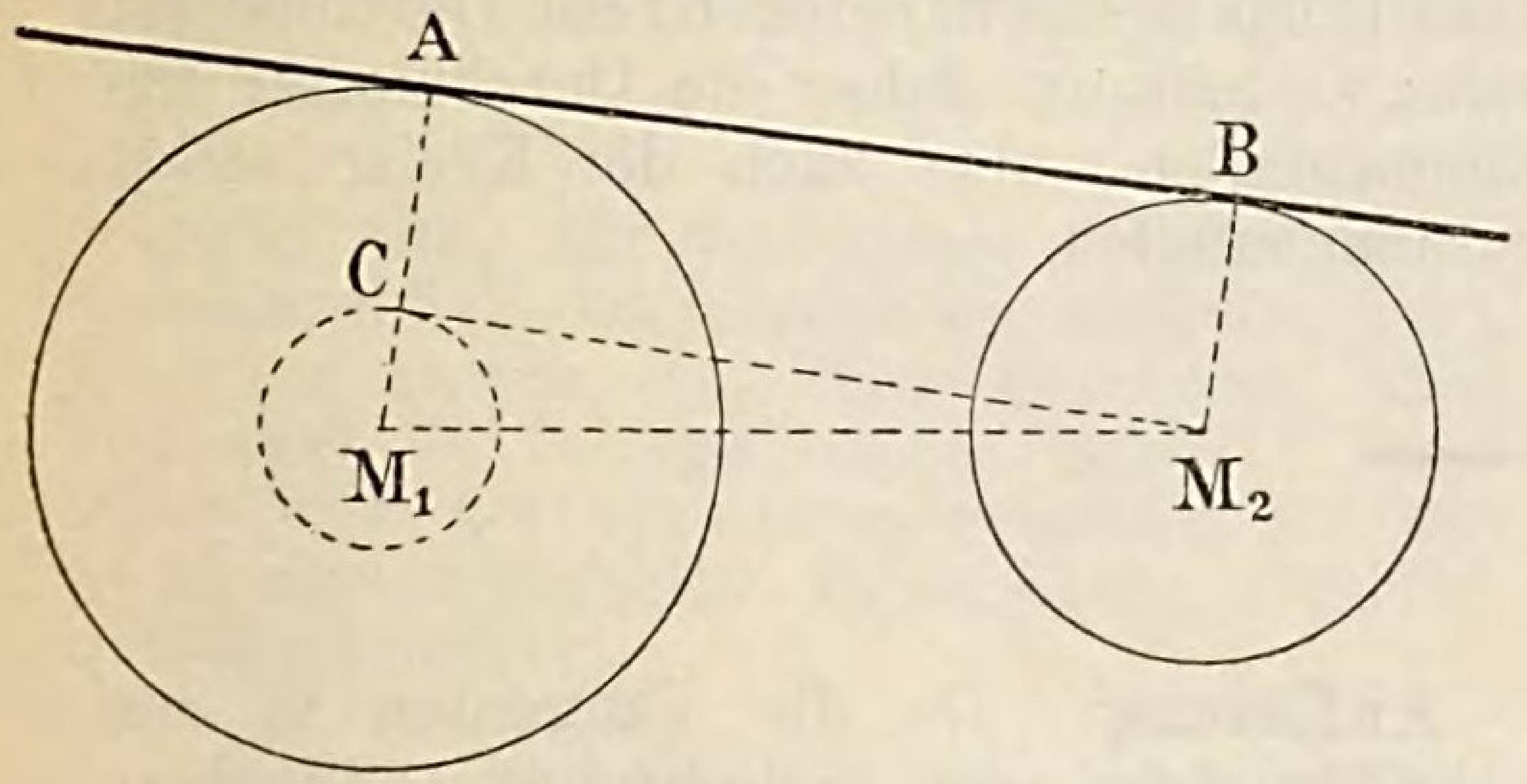
10) Aufgaben über zwei Kreise.

(Zu Abschnitt 7 a und b.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 153. Man soll an zwei auseinander liegende Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten ziehen.

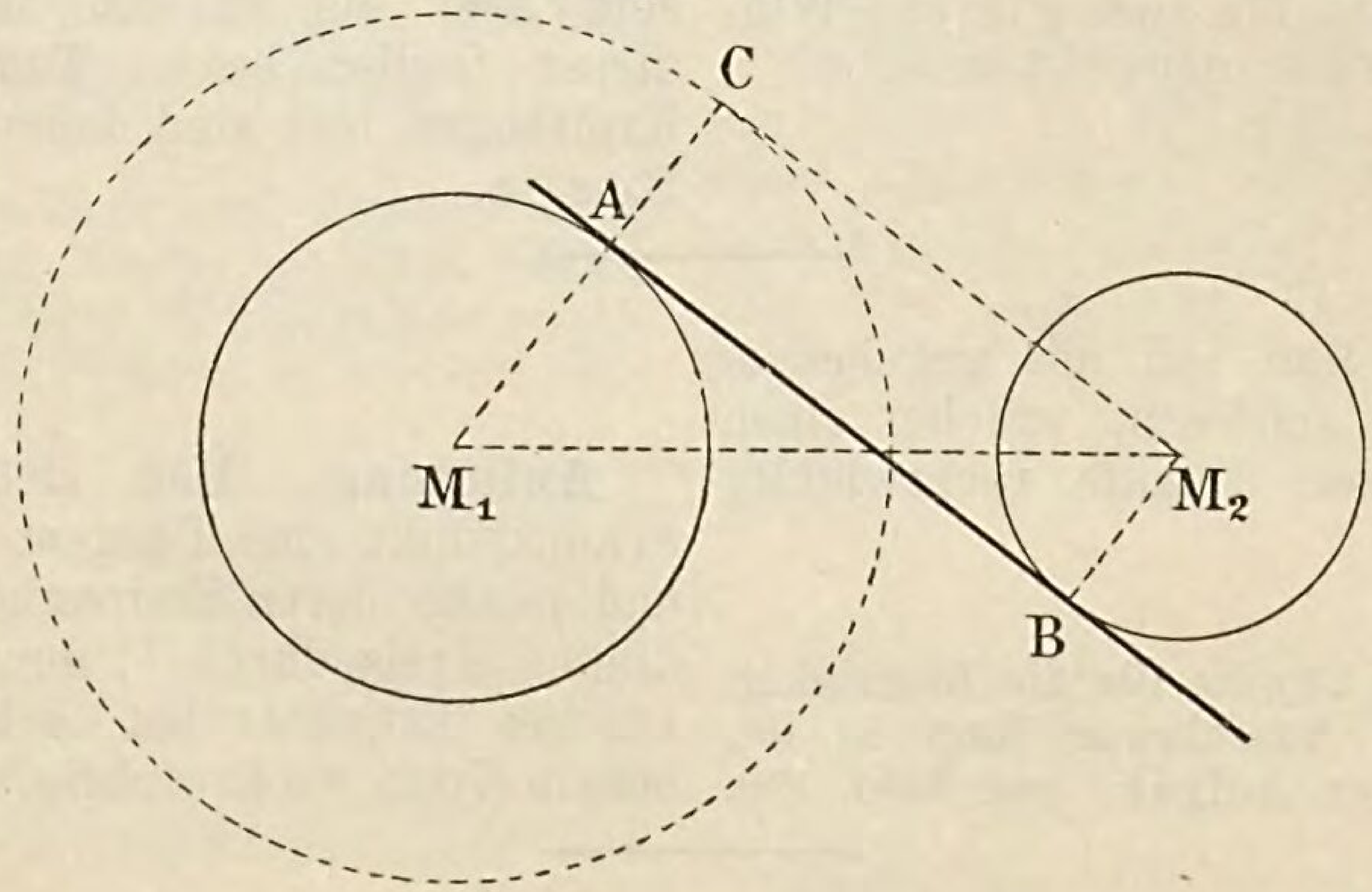
Figur 216.



Erkl. 496. Der Einfachheit der Figuren halber ist in Figur 216 und 217 nur je die *eine* Tangente gezogen. Die zweite liegt mit dieser ersten genau symmetrisch in Bezug auf die Zentrallinie $M_1 M_2$ als Achse.

Auflösung. Nach den Ergebnissen der Antwort der Frage 116 hat man um den einen oder um den andern der beiden Kreismittelpunkte, z. B. um M_1 einen Hilfskreis zu zeichnen, dessen Radius in Figur 216 für die äussere Tangente $M_1 C = r_1 - r_2$ in Figur 217 für die innere Tangente $M_1 C = r_1 + r_2$ ist. Zieht man dann an diesen Hilfskreis von M_2 aus eine Tangente, so erhält man den Punkt C, und der Radius $M_1 C$ trifft den Kreis um M_1 in dem Berührungspunkte A der gesuchten Tangente. Man kann dann also in A entweder auf $M_1 A$ eine Senkrechte errichten, oder von A aus an den zweiten Kreis eine Tangente zeichnen, oder $AB \parallel CM_2$ oder $M_2 B \parallel M_1 A$ ziehen und B mit A verbinden, oder die Strecke $M_2 C$ von A aus als AB zwischen beiden Kreisen eintragen, u. s. w.

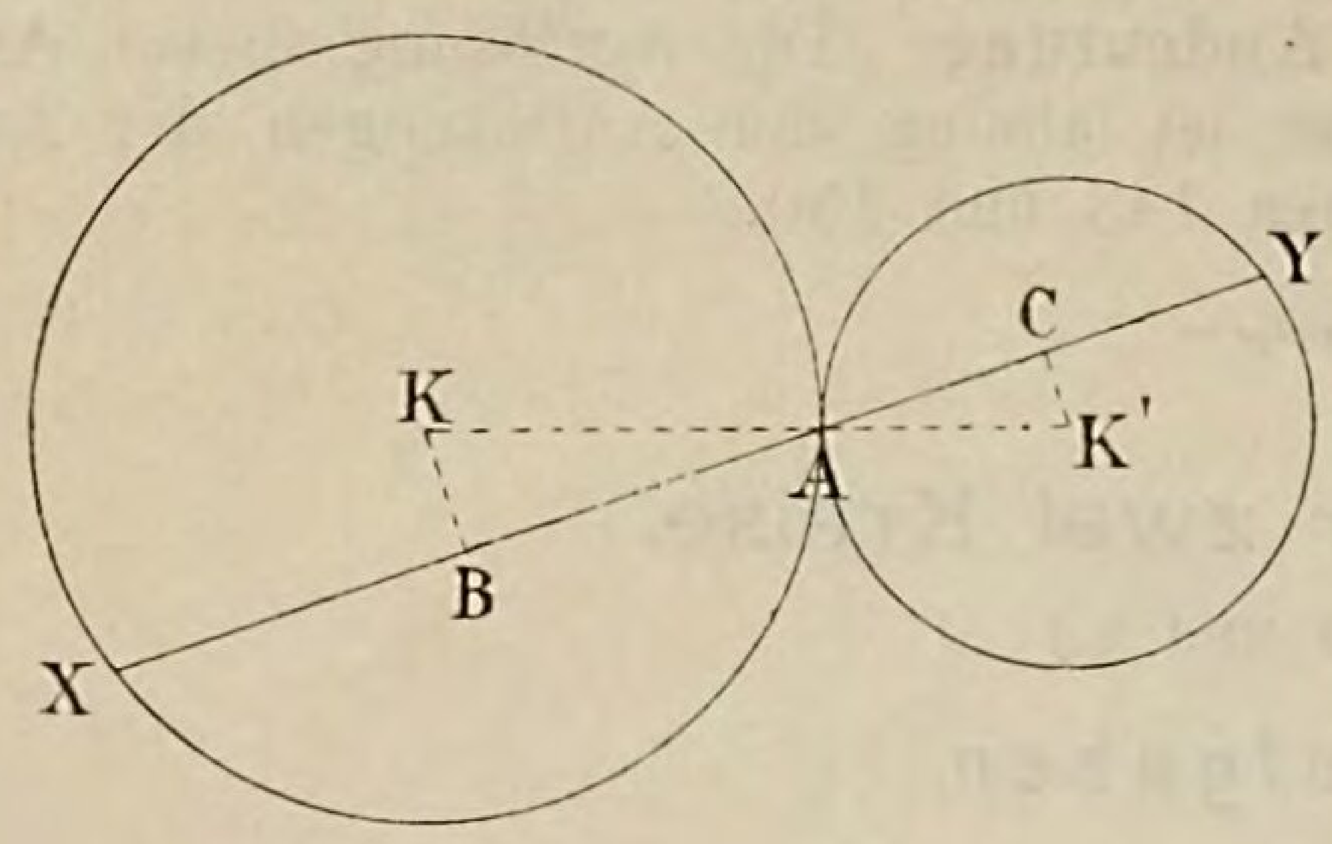
Figur 217.



Aufgabe 154. Man ziehe durch den Berührungspunkt zweier Kreise eine Gerade und untersuche die Strecke derselben zwischen den Fusspunkten der Senkrechten von den Kreismittelpunkten.

Auflösung. Ist XY in Figur 218 die Gerade durch den Berührungspunkt A, so ist durch die Fusspunkte B und C je die

Figur 218.



Strecke XA und YA halbiert, also ist $AB = \frac{1}{2} AX$, $AC = \frac{1}{2} AY$, folglich:

$$BC = AB + AC = \frac{1}{2}(AX + AY) = \frac{1}{2} \cdot XY.$$

Also ist die Strecke zwischen den Fusspunkten gleich der Hälfte der Strecke zwischen den Schnittpunkten der beiden Kreise. (Man vergleiche Figur 16 und 152, sowie Frage 152.)

Aufgabe 155. Können zwei Kreise einander so schneiden, dass die Peripherie eines jeden halbiert wird?

Erkl. 497. Kreise dieser Art würden einander „unter einem Durchmesser" schneiden oder „unter einer Sehne" gleich dem Durchmesser. Und dies ist nach Nebenstehendem unmöglich, wenn nicht beide Kreise identisch sind.

Auflösung. Wenn jede Peripherie halbiert werden sollte, so müsste die gemeinschaftliche Sehne in jedem Kreise Durchmesser sein; es müssten daher die Durchmesser zusammenfallen, also auch die Kreise selbst zusammenfallen.

Aufgabe 156. Was für Bogenstücke schneiden zwei Kreise auseinander aus, die sich rechtwinklig schneiden?

Erkl. 498. Umgekehrt kann man auch aussagen, dass zwei Kreise einander rechtwinklig schneiden, wenn die gegenseitig im Innern der Peripherie liegenden Bogenstücke beider Kreise zu einander supplementär sind. Denn da die Schnittwinkel gleichgross sind, so bleibt im Viereck der Tangenten für zwei gleiche Winkel 180°, also für jeden einzelnen 90°.

Auflösung. Da die Tangenten in den Schnittpunkten den Schnittwinkel angeben, so müssen die Tangenten der rechtwinklig schneidenden Kreise in beiden Punkten senkrecht stehen je auf der Tangente des andern Kreises. Dieselben müssen also je durch den Mittelpunkt des andern Kreises gehen, und dessen Radien bilden. Die Bogenstücke sind also die zu den Mittelpunktswinkeln dieser Radien bezw. Tangenten gehörigen Kreisbogen und sind daher supplementäre Bogen.

Aufgabe 157. Man soll mit gegebenem Radius einen Kreis zeichnen, welcher einen andern in gegebenem Punkte rechtwinklig schneidet.

Erkl. 499. Der Beweis für die Richtigkeit der nebenstehenden Ausführung liegt in der Auflösung der vorigen Aufgabe und Erkl. 498.

Auflösung. Man ziehe im gegebenen Schnittpunkt eine Tangente von der Länge r und mache deren Endpunkt zum Mittelpunkt. (Jeder Kreis durch P, der einen Mittelpunkt auf der Tangente hat, schneidet den gegebenen Kreis rechtwinklig.)

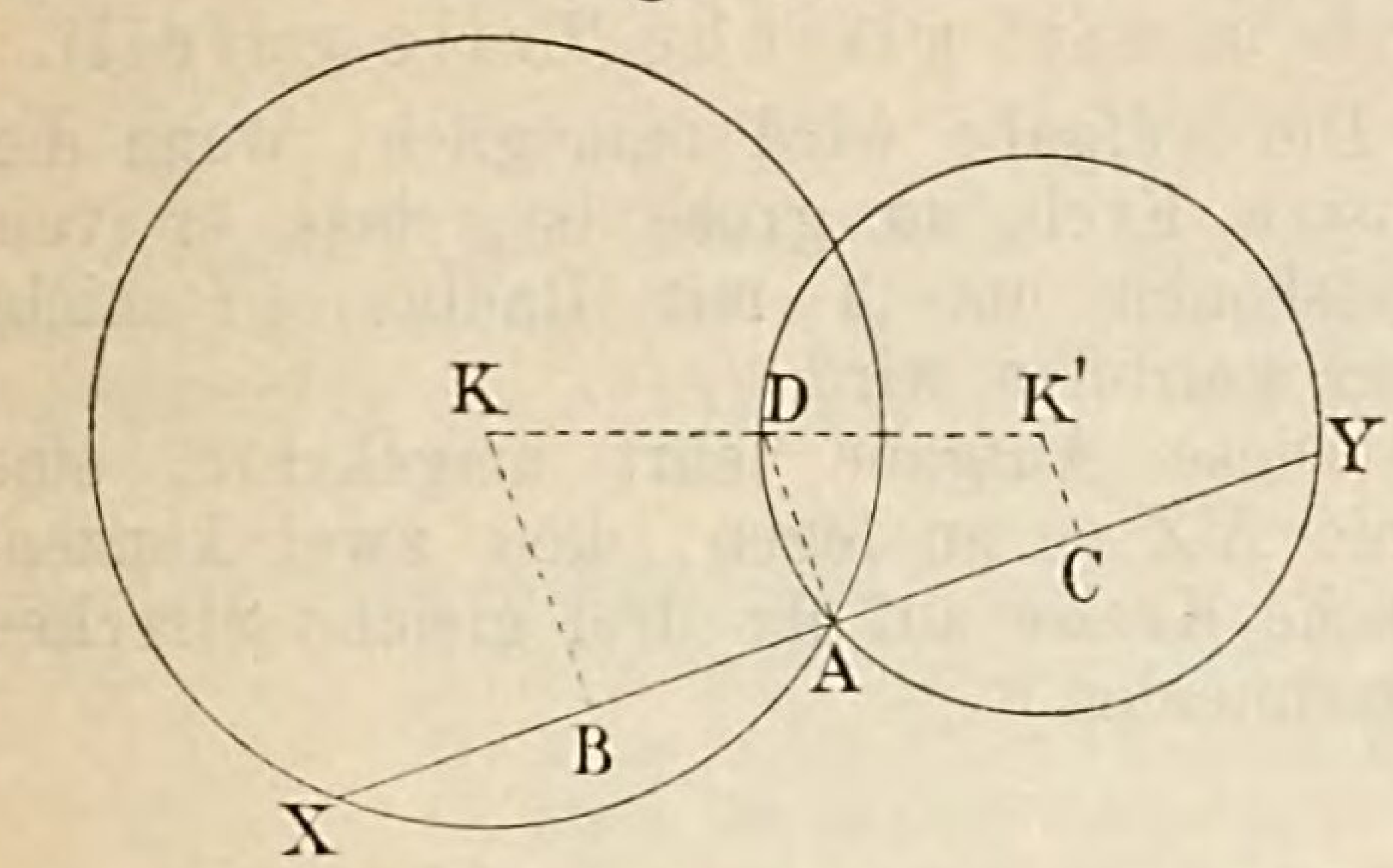
Aufgabe 158. Man zeichne zwei einander schneidende Kreise um die Punkte K und K', deren einer die halbe Zentralstrecke:

$$K'D = \frac{1}{2} KK'$$

zum Radius hat, und untersuche die Sekante XY, welche senkrecht steht auf DA in Figur 219.

Auflösung. Analog den Ueberlegungen der Aufgabe 154 findet man $AB = \frac{1}{2} AX$,

Figur 219.



$AC = \frac{1}{2} AY$. Nun ist $KBCK'$ ein Paralleltrapez, und darin D Seitenmitte von KK', DA als Senkrechte zu XY auch Parallele zu den Seiten KB und $K'C$. Folglich muss auch D Seitenmitte von BC sein, also $AB = AC$ und foglich $AX = AY$.

Aufgabe 159. Man soll die Kreise konstruieren, welche einen gegebenen Kreis und die Schenkel eines gegebenen Mittelpunktswinkels oder Tangentenwinkels desselben berühren.

Erkl. 500. Die vorliegende Aufgabe ist ein besonderer Fall der allgemeinen Aufgabe, einen Kreis zu suchen, der einen gegebenen Kreis und zwei beliebige Gerade berührt. Diese bildet eine der zehn Grundaufgaben des sog. Apollonischen Problems. Siehe „Cranz, das Apollonische Problem".

Erkl. 501. Man erhält im nebenstehenden Falle stets zwei Paar Lösungen, da die Zentrallinie den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet.

Auflösung. Da die Halbierungslinie des Mittelpunktswinkels oder Tangentenwinkels Symmetrieachse sein muss, so berührt der gesuchte Kreis den gegebenen in einem Punkte der Achse, also im einen der beiden Schnittpunkte, er hat also in einem solchen mit dem gegebenen Kreise eine gemeinsame Tangente. Dadurch erhält man ein Tangentendreiseit aus den beiden gegebenen Winkelschenkeln und dieser gefundenen Tangente, und der gesuchte Kreis ist der Inkreis oder Ankreis dieses Dreiecks.

Aufgabe 160. In einen gegebenen Kreissektor sollen zwei Kreise eingezeichnet werden, die den gegebenen Kreisbogen, einander, und je einen der Radien berühren.

Erkl. 502. Man kann auf dieselbe Weise auch drei und mehr Kreise in einen Sektor einzeichnen, sowie dessen Winkelgrösse so gewählt ist, dass seine Teilung in die drei oder mehr Teile möglich ist.

Auflösung. Da die Winkelhalbierende des Sektors für die ganze Figur Symmetrieachse bleiben muss, so ist die Aufgabe auf eine doppelte Anwendung der vorigen Aufgabe 159 mit dem Zentriwinkel zurückgeführt.

Aufgabe 161. Man ziehe in zwei konzentrischen Kreisen mit Mittelpunkt K eine beliebige Zentralstrecke $KA = 2 \cdot KP$, mache (durch den Kreisbogen um A) $AX = AP$ und untersuche die Strecken der Linie XP (siehe Figur 220).

Erkl. 503. Rückt eine Linie XZ weiter vom Mittelpunkte K weg, so wird das mittlere Stück kleiner als die anderen und zuletzt Null, rückt XZ näher an K hinan, so wird dasselbe grösser als die äusseren Stücke bis zur Grösse des inneren Durchmessers. Ist also der Radienunterschied grösser als dieser Durchmesser, so gibt es keine Gerade von der Art XZ mehr.

Auflösung. Verbindet man KY, so ist in den Dreiecken APX und KPY:

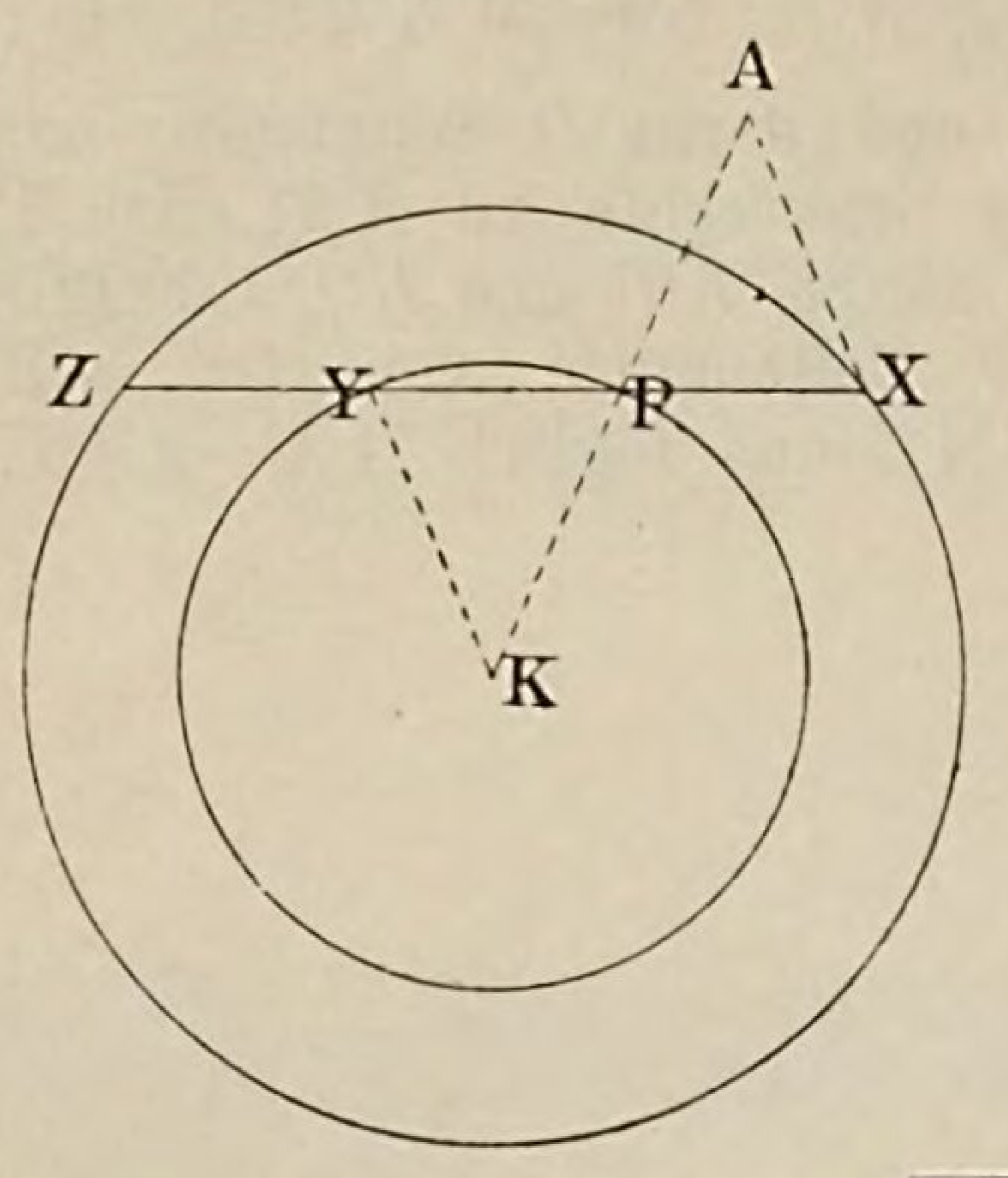
1) $\sphericalangle APX = \sphericalangle KPY$ als Scheitelwinkel,

2) $AP = KP$,

3) $AX = AP = KP = KY$,

also ist $\triangle APX \cong KPY$, und auch $PY = PX$. Da ferner nach Antwort der Frage 133 die Strecke $YZ = PX$ sein muss, so werden nach vorigem die drei Strecken $PX = PY = XY$,

Figur 220.



also wird die Strecke XZ durch den inneren Kreis in drei gleiche Teile geteilt.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der äussere Kreis so gross ist, dass er vom Kreisbogen um A mit Radius AP nicht mehr getroffen wird.

(Diese Aufgabe lehrt umgekehrt, eine Linie XZ so zu legen, dass zwei konzentrische Kreise auf ihr drei gleiche Strecken ausschneiden.)

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 162. Man wiederhole die Aufgabe 154 für innerlich berührende Kreise.

Andeutung. Man erhält XY als Differenz zweier Sehnenstücke.

Aufgabe 163. Man konstruiere die gemeinschaftlichen Tangenten an zwei berührende oder zwei schneidende Kreise, oder an zwei gleichgrosse Kreise.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 153.

Aufgabe 164. Wie können zwei gleichgrosse Kreise einander rechtwinklig schneiden?

Andeutung. Man vergleiche das Deltoid in Aufgabe 156.

Aufgabe 165. Man zeichne einen Kreis durch zwei gegebene Punkte eines andern, so dass er diesen rechtwinklig schneidet.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 156 und 157.

Aufgabe 166. Man zeichne drei gleiche Kreise um die Ecken eines Dreiecks und zeichne einen vierten Kreis, der alle drei berührt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Eigenschaft des Zentrums der Ecken.

Aufgabe 167. Man zeichne um einen gegebenen Mittelpunkt P einen Kreis, welcher einen andern gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Andeutung. Man vergleiche die Konstruktion der Tangenten von P an den gegebenen Kreis.

Anmerkung 9. Weitere zu diesem Abschnitte gehörige Konstruktionsaufgaben findet man in:

Müller, Konstruktionsaufgaben I, Q, „Aufgaben über den Kreis“: Aufgaben 1738 bis 1944 und in:

Cranz, Das Apollonische Berührungsproblem: Aufgaben 3, 5 bis 76.

11) Aufgaben über drei Kreise.

(Zu Abschnitt A, 8.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 168. Man soll die Lagen dreier Kreise gegeneinander ordnen nach dem Gesichtspunkte der Anzahl gemeinsamer Punkte.

Auflösung. Drei Kreise können gemeinsam haben: I) gar keine Punkte, II) Berührungspunkte, III) Schnittpunkte, IV) Berührungspunkte und Schnittpunkte; und zwar:

I) Gar keine gemeinsamen Punkte:
- A) alle drei Kreise ineinander,
- B) zwei nebeneinander in dem dritten,
- C) zwei ineinander ausserhalb des dritten,
- D) alle drei auseinander.

II) Berührungspunkte:
- A) ein einzelner Berührungspunkt:
 - a) alle drei Kreise berühren einander, und
 - α) alle liegen ineinander,
 - β) zwei ineinander,
 - b) nur zwei Kreise berühren einander, und
 - α) die berührenden liegen in einander, und der dritte
 - 1) im innern,
 - 2) zwischen beiden,
 - 3) schliesst beide ein,
 - 4) liegt ausserhalb beider,
 - β) die berührenden liegen nebeneinander, und der dritte
 - 1) liegt in einem von ihnen,
 - 2) schliesst beide ein,
 - 3) liegt ausserhalb beider;
- B) zwei Berührungspunkte:
 - a) zwei Kreise ineinander, der dritte
 - α) berührt den innern
 - 1) von innen,
 - 2) von aussen,
 - β) berührt den äussern
 - 1) von innen,
 - 2) von aussen,
 - b) alle drei Kreise liegen nebeneinander;
- C) drei Berührungspunkte:
 - a) zwei Kreise liegen nebeneinander im dritten,
 - b) alle drei Kreise liegen auseinander.

III. Schnittpunkte:
- A) zwei Schnittpunkte:
 - a) alle drei Kreise gehen durch dieselben zwei Punkte,
 - b) zwei Kreise schneiden einander, der dritte
 - α) liegt im gemeinschaftlichen Flächenraum,
 - β) liegt in einem der beiden einzelnen Flächenräume,
 - γ) schliesst beide Kreise ein,
 - δ) liegt ausserhalb beider;
- B) vier Schnittpunkte: Zwei Kreise schneiden einander, der dritte
 - a) geht durch einen der Schnittpunkte und schliesst
 - α) den zweiten Schnittpunkt ein,
 - β) den zweiten Schnittpunkt nicht ein, sondern liegt
 - 1) auf dessen gleicher Seite,
 - 2) auf der ungleichen Seite,
 - b) geht durch keinen von beiden Schnittpunkten und
 - α) schliesst einen der beiden Kreise ein,
 - β) schliesst keinen der beiden Kreise ein;

C) sechs Schnittpunkte: Zwei Kreise schneiden einander, der dritte
- a) schliesst beide Schnittpunkte ein,
- b) schliesst einen Schnittpunkt ein,
- c) schliesst keinen Schnittpunkt ein.

IV) Schnittpunkte und Berührungspunkte:

A) ein Berührungspunkt und zwei Schnittpunkte:
- a) die berührenden Kreise ineinander, der dritte
 - α) schneidet den innern,
 - β) schneidet den äussern und
 - 1) schliesst den innern ein,
 - 2) schliesst den innern aus,
- b) die berührenden Kreise auseinander, der dritte
 - α) schliesst einen derselben ein,
 - β) schliesst keinen derselben ein;

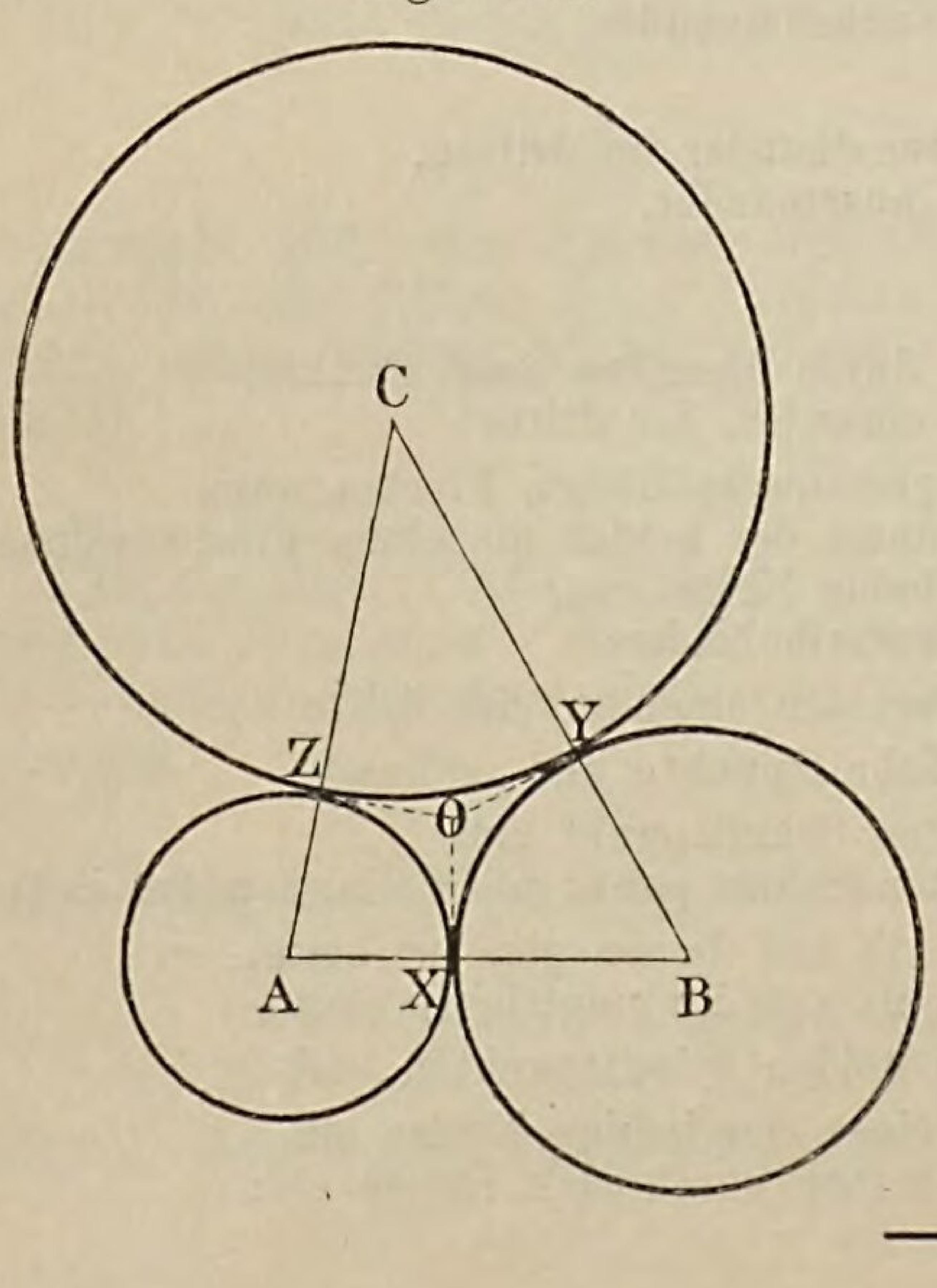
B) ein Berührungspunkt und drei Schnittpunkte: die berührenden Kreise werden im Berührungspunkt vom dritten geschnitten und liegen
- a) ineinander,
- b) auseinander;

C) ein Berührungspunkt und vier Schnittpunkte:
- a) die berührenden Kreise ineinander, der dritte
 - α) schliesst den Berührungspunkt ein,
 - β) schliesst den Berührungspunkt aus,
- b) die berührenden Kreise auseinander, der dritte
 - α) schliesst den Berührungspunkt ein,
 - β) schliesst den Berührungspunkt aus;

D) zwei Berührungspunkte und zwei Schnittpunkte. Der gemeinschaftlich berührende Kreis
- a) liegt im gemeinsamen Flächenraume der schneidenden Kreise,
- b) liegt in einem der einzelnen Flächenräume der schneidenden Kreise,
- c) umschliesst beide schneidenden Kreise,
- d) liegt ausserhalb der schneidenden Kreise.

Aufgabe 169. Man untersuche das Dreieck der Mittelpunkte dreier ausschliessend berührenden Kreise.

Figur 221.

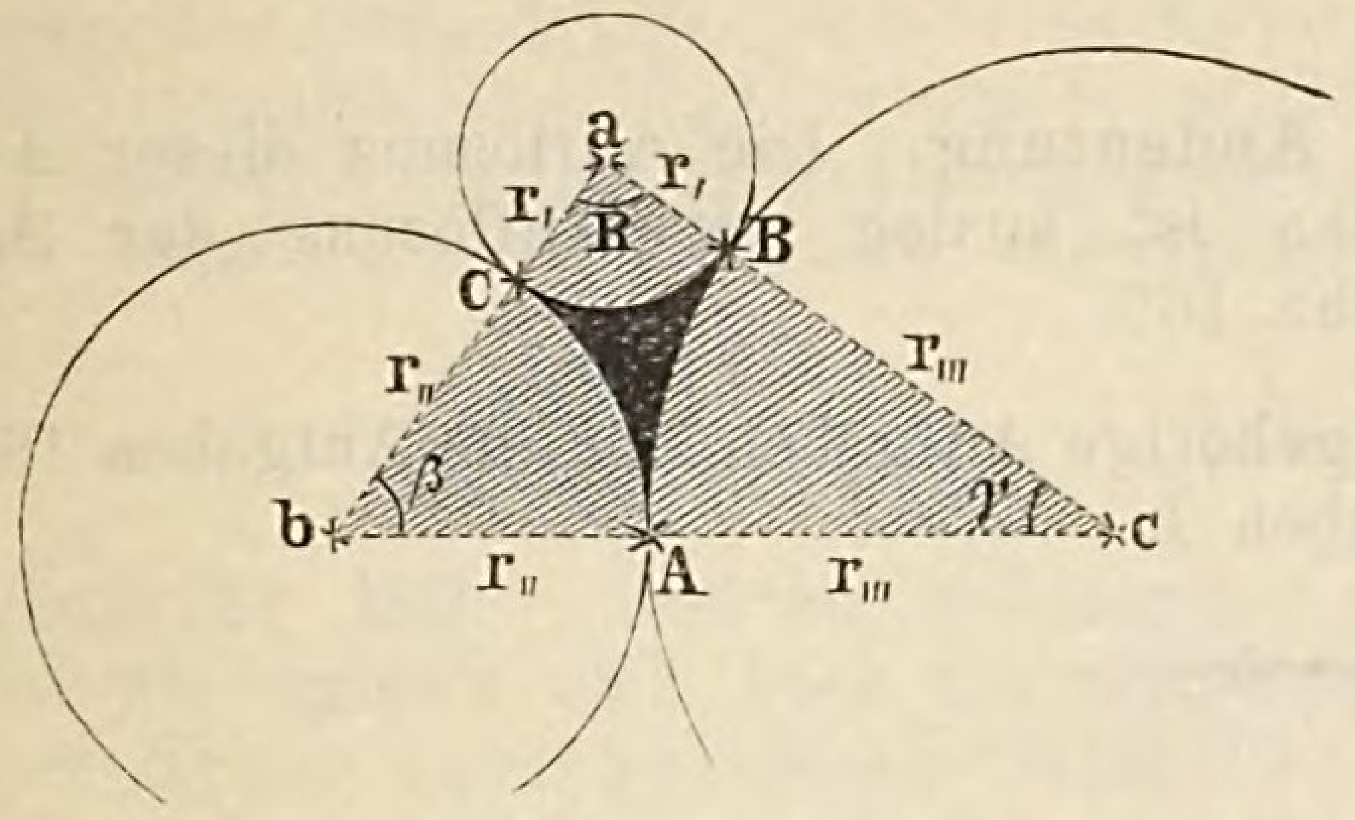


Auflösung. Sind ABC die drei Mittelpunkte, so müssen die Berührungspunkte XYZ auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen, und die drei gemeinsamen Tangenten müssen durch einen Punkt O gehen und gleichlang sein. Demnach ist O ein Punkt, der von den drei Seiten des Dreiecks ABC gleichen senkrechten Abstand hat, oder O ist der Mittelpunkt des Inkreises, und XYZ sind die drei Berührungspunkte des Inkreises im Dreieck ABC, daher ist O auch Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC.

(Umgekehrt sind die Strecken von den Eckpunkten eines Dreiecks ABC nach den Berührungspunkten XYZ seines Inkreises die Radien dreier einander berührenden Kreise um die Dreieckspunkte ABC).

Aufgabe 170. Man untersuche das krummlinige Bogendreieck ABC dreier ausschliessend berührenden Kreise.

Figur 222.



Erkl. 504. Ist insbesondere einer der Winkel $\alpha\beta\gamma$ gleich 90°, wie α in Figur 222, dann hat auch Bogen $\widehat{BC}$ 90°, also sind dann auch die Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ komplementär — entsprechend der Thatsache, dass eben diese Bogen die zur Messung der Winkel A, B, C am Winkelmesser überhaupt benützten Teile darstellen.

Auflösung. Ein Bogendreieck hat drei Eckenwinkel und drei Seitenwinkel. Die Eckenwinkel als Winkel der Tangenten beider Kreisbogen sind bei berührenden Kreisen jeweils von der Grösse Null. Die Anzahl der Bogengrade der krummlinigen Seiten haben zu Mittelpunktswinkeln die Winkel des Dreiecks ABC, sind also gleichgross mit diesen. Daher ist $\widehat{AB} = \gamma$, $\widehat{BC} = \alpha$, $\widehat{CA} = \beta$. Da aber $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ sind, so müssen auch die drei Bogen eines Bogendreiecks mit Eckenwinkeln von 0^0 zusammen 180 Bogengrade betragen.

Aufgabe 171. Wie viele Tangenten sind zwischen drei gleichgrossen Kreisen vorhanden in jeder ihrer Lagebeziehungen?

Erkl. 505. Zwei gleichgrosse Kreise haben bei innerer Berührung oder beim Ineinanderliegen alle ihre Punkte gemeinsam, daher auch alle ihre Tangenten. Demnach könnte man für zwei zusammenfallende Kreise eigentlich unendlich viele gemeinsame Tangenten in Anrechnung bringen, und entsprechend bei drei zusammenfallenden Kreisen oder ähnlich in den Fällen, wo von den drei Kreisen zwei zusammenfallen.

Auflösung. Drei gleichgrosse Kreise können nicht alle die in Antwort 134 der Aufgabe 168 aufgezählten Beziehungen aufweisen, denn eine innere Berührung oder Ineinanderliegen wird gleichbedeutend mit zusammenfallen. Man hat daher nur zu unterscheiden beim Auseinanderliegen alle 12 Tangenten, bei äusserlicher Berührung aber eine, bei jeglichem Schnittpunkt zwei abzurechnen, bei inneren Berührungen aber schon vier Tangenten abzuziehen.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 172. Man beweise, dass wenn drei konzentrische Kreise auf einer Sekante gleiche Stücke ausschneiden, dies auf jeder Sekante zutrifft.

Andeutung. Man benütze die zentrische und achsige Symmetrie.

Aufgabe 173. Man zeichne um einen gegebenen Punkt drei konzentrische Kreise, die auf einer gegebenen Linie fünf gleichgrosse Stücke ausschneiden.

Andeutung. Man wähle den innersten Kreis beliebig.

Aufgabe 174. Man zeichne über den drei Seiten eines Dreiecks Kreise mit Peripheriewinkel 120° und beweise, dass alle drei durch einen Punkt gehen.

Andeutung. Die Verbindungslinien des Punktes mit den Ecken bilden drei gleichgrosse Winkel von je 120°.

Aufgabe 175. Um zwei gegebene Mittelpunkte A und B beschreibe man zwei Kreise, welche einander berühren, und deren einer einen gegebenen Kreis (oder Gerade oder Punkt) berührt.

Andeutung. Man beachte, welcher Kreis zuerst zu zeichnen ist.

Aufgabe 176. Man zeichne drei berührende Kreise mit gegebenen Radien r_1, r_2, r_3.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 169.

Anmerkung 10. Weitere zu diesem Abschnitt gehörige Aufgaben sind die Aufgaben 1945 bis 1952 in Müller, Konstruktionsaufgaben I.

12) Aufgaben über die geometrischen Oerter.

(Zu Abschnitt B, a, b, c.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 177. Was für Aufgabengruppen ergeben sich aus den Ortssätzen über den Abstand eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Kreisen?

Erkl. 506. Zusammenstellungen der Elemente Punkt, Gerade, Kreis, zu je zweien gibt es folgende sechs:
1) P_1P_2, 2) PG, 3) PK, 4) G_1G_2, 5) GK, 6) K_1K_2.

Zusammenstellungen der Elemente Punkt, Gerade, Kreis zu dreien gibt es folgende zehn:
1) $P_1P_2P_3$, 2) P_1P_2G, 3) P_1P_2K, 4) PG_1G_2
5) PGK, 6) PK_1K_2, 7) $G_1G_2G_3$, 8) G_1G_2K
9) GK_1K_2, 10) $K_1K_2K_3$.

Die Zusammenfassung der letzteren zehn Aufgaben heisst allgemein das „Apollonische Berührungsproblem".

Auflösung. Man kann verlangen die Konstruktion eines Punktes, der gegebene Abstände haben soll von irgend zweien der Elemente Punkt, Gerade, Kreis; oder die Konstruktion eines Punktes der gleichgrossen Abstand hat von dreien dieser Elemente, also die Auffindung eines Kreises, welcher drei dieser Elemente berührt.

Aufgabe 178. Wie werden Aufgaben der vorgenannten Art allgemein aufgelöst?

Erkl. 507. Für die ersten sechs Aufgaben der Erkl. 506 besteht ein geometrischer Ort für jedes einzelne der gegebenen Elemente; für die zweite Gruppe von zehn Aufgaben besteht für jedes Paar der gegebenen Elemente ein geometrischer Ort. Solche Paare gibt es zwar jeweils drei, aber wenn für zwei derselben die Oerter konstruiert sind, so erfüllen die gemeinsamen Punkte die Bedingungen für das dritte Paar von selbst.

Auflösung. Zur Auflösung einer Aufgabe der vorgenannten Art werden die beiden geometrischen Oerter für den gesuchten Punkt vollständig gesondert behandelt und einzeln konstruiert. Haben dann die so gefundenen geometrischen Oerter keinen, einen, zwei oder mehr gemeinsame Punkte, so hat die gestellte Aufgabe auch 0, 1, 2 oder mehr Lösungen.

Aufgabe 179. Wieviele Lösungen hat im allgemeinen eine aus den in Aufgabe 177 aufgestellten Gruppen von Aufgaben?

Auflösung. Da zwei Gerade einen Schnittpunkt haben, eine Gerade und ein Kreis oder zwei Kreise aber zwei Schnittpunkte,

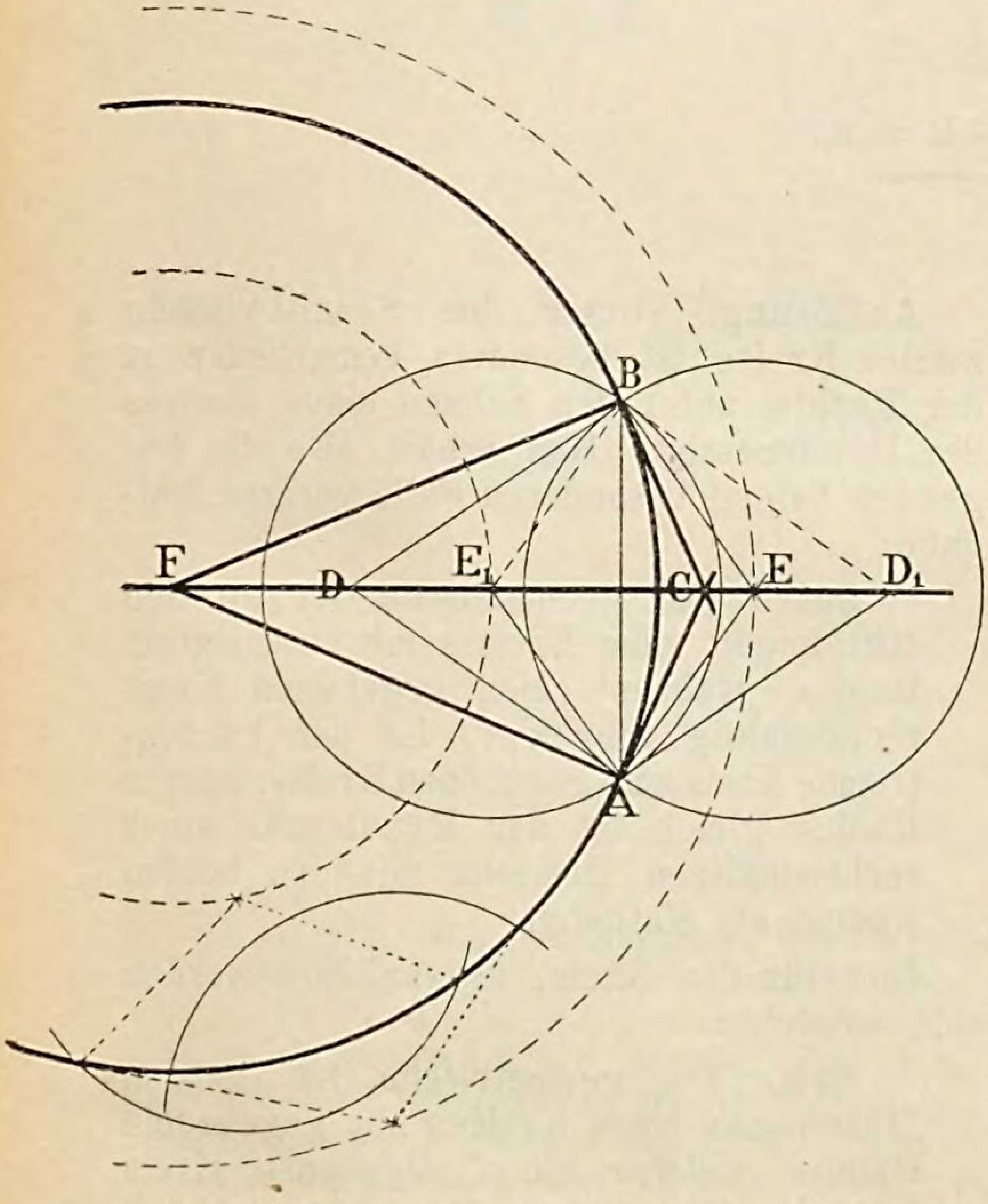
Erkl. 508. Sind die geometrischen Oerter gerade Linien, so bleibt stets die eine Lösung erhalten, da zwei Gerade einander stets schneiden. Mit Kreisen aber können bei Berührung durch eine Gerade oder durch einen Kreis die zwei Lösungen in eine einzige zusammenfallen, und wenn Gerade und Kreis vom ersten Kreis allzugrossen Abstand haben, oder wenn die zwei Kreise ineinander zu liegen kommen, so fällt die Möglichkeit der Lösung ganz weg, und man erhält keine (d. h. nur imaginäre) Lösungen.

so wird im allgemeinen Falle eine einzige Lösung entstehen, wenn zwei gerade Linien die beiden geometrischen Oerter bilden, zwei Lösungen aber, wenn eine Gerade und ein Kreis oder zwei Kreise die geometrischen Oerter bilden.

Bei mehreren der genannten Aufgaben werden die geometrischen Oerter durch andere Linien, als Gerade und Kreis dargestellt, und liefern daher auch mehr (bis zu acht) Lösungen.

Aufgabe 180. Welche geometrischen Ortssätze ergeben sich über das Schneiden zweier Kreise unter gegebenem Winkel?

Figur 223.



Erkl. 509. Die Elemente der Figur 223, nämlich:

1) Sehne AB,
2) Winkel $CAD = EBD$,
3) die Radien AF und AE,
4) Zentralstrecke EF

sind so miteinander verknüpft, dass wenn drei derselben gegeben sind, dann alle anderen bestimmt sind. Denn um das Dreieck ABE zu konstruieren, müssen zwei Elemente desselben gegeben sein, z. B. Grundseite AB und Schenkel AE. Um sodann auch das Dreieck ABF zu konstruieren, braucht man nur noch das einzige

Auflösung. Wenn zwei Kreise um die Mittelpunkte E, F in Figur 223 einander unter bestimmtem Winkel schneiden, so entsteht an deren Schnittpunkt beiderseits der gemeinschaftlichen Sehne ein gleichschenkliges Dreieck der Tangenten und ein ebensolches der auf den Tangenten senkrechten Radien. Bleiben also von den Radien oder den Tangentenwinkeln oder den Sehnenstrecken irgend zwei gleichgross, so bleiben alle Elemente der Figur gleich, also auch der Abstand der Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke oder die Zentralstrecke beider Kreise. Man erhält also:

Satz. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises von bestimmtem Radius r, welcher einen gegebenen Kreis unter einem gegebenen Winkel schneidet, ist das Paar der konzentrischen Kreise zum gegebenen Kreise, deren Radien gleich sind der dritten Seite eines Dreiecks mit den Radien als Seiten und dem gegebenen Winkel oder dessen Supplementwinkel als eingeschlossenem Winkel.

Oder in Benutzung der gegebenen Sehnenstrecke:

Satz. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises von bestimmtem Radius, welcher einen gegebenen Kreis unter einer Sehne von gegebener Länge schneidet, ist das Paar der konzentrischen Kreise zum gegebenen Kreise, deren Radien gleich sind der dritten Seite eines Dreiecks mit den Radien als Seiten und der Hälfte der gegebenen Sehnenstrecke als zugehöriger Höhe.

Element AF oder EF oder den Winkel an der Grundseite zu kennen. Mit einem der Dreiecke ABE oder ABF aber kennt man auch die auf diesen Schenkeln senkrechten Tangenten, also Punkte D oder C, also kann auch der gegebene Schnittwinkel angetragen werden und dann mittels des zweiten dieser Punkte das zweite Dreieck konstruiert werden.

Erkl. 510. Aus zwei Seiten und zugehöriger Höhe lassen sich zweierlei Dreiecke konstruieren. Das eine von beiden liefert den Kreismittelpunkt ausserhalb des gegebenen, das andere innerhalb: je nachdem an eine beliebige Tangente des gegebenen Kreises der verlangte Schnittwinkel nach aussen oder nach innen angetragen wird. Es ist also in Figur 223:

$$\sphericalangle CBD = \alpha,\ CBF = DBE = 90^0,$$

also:

$$FBE = CBF + DBE - CBD = 2\text{R} - \alpha = 180^0 - \alpha;$$

und

$$\sphericalangle CBD_1 = \alpha_1,\ CBF = D_1BE_1 = 90^0,$$

also:

$$FBE_1 = CBF + CBD_1 - D_1BE_1 = \text{R} + \alpha_1 - \text{R} = \alpha_1.$$

Aufgabe 181. Welche besonderen Fälle des Schneidens zweier Kreise sind in der vorigen Aufgabe enthalten?

Auflösung. Unter den Schnittwinkeln zweier Kreise ist besonders bemerkenswert der Rechte, unter den Sehnen eines Kreises der Durchmesser. Man erhält also die folgenden beiden besonderen Fälle voriger Aufgabe:

Satz. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit bestimmtem Radius, welcher einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, ist der konzentrische Kreis zum gegebenen Kreise, dessen Radius gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den beiden Radien als Katheten.

Und für den Kreis, der halbiert werden soll, entsteht:

Satz. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit gegebenem Radius, welcher einen gegebenen Kreis halbiert oder unter einer Sehne gleich seinem Durchmesser schneidet, ist der konzentrische Kreis, dessen Radius gleich ist der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Radius des verlangten Kreises als Hypotenuse und dem des gegebenen Kreises als zweiter Kathete.

Erkl. 511. Die beiden Kreise in Figur 223 schneiden den gegebenen Kreis um F unter gleicher Sehne, aber nicht unter gleichen Winkeln, denn $\alpha = CBD$ ist grösser als $\alpha_1 = CBD_1$. Wird also die Zeichnung für diesen beliebigen Schnittwinkel ausgeführt, so erhält man immer zwei Lösungen, da zwei Schnittpunkte E, E_1 entstehen. Nur wenn der Winkel:

$$CBD_1 = CBD = 90^0$$

wird, fällt CE mit CE_1 zusammen und auch mit CD und CD_1, und man erhält nur einen einzigen Kreis mit gegebenem Radius, der den gegebenen rechtwinklig schneidet.

Erkl. 512. Da bei Halbierung des Kreises um F der Winkel BFC zu einem rechten wird, so gibt es hier ebenfalls nur eine einzige Lösung, und man erkennt zugleich, dass ein Kreis nur durch einen solchen Kreis halbiert werden kann, dessen Radius grösser ist, als der des gegebenen Kreises. Denn die Hypotenuse ist stets grösser als jede Kathete.

Aufgabe 182. Man suche den geometrischen Ort für den Endpunkt einer Strecke von bestimmter Länge l, welche parallel einer gegebenen Richtung von den Peripheriepunkten eines gegebenen Kreises ausgeht.

Auflösung. Zieht man den Radius des gegebenen Kreises und dazu die parallele

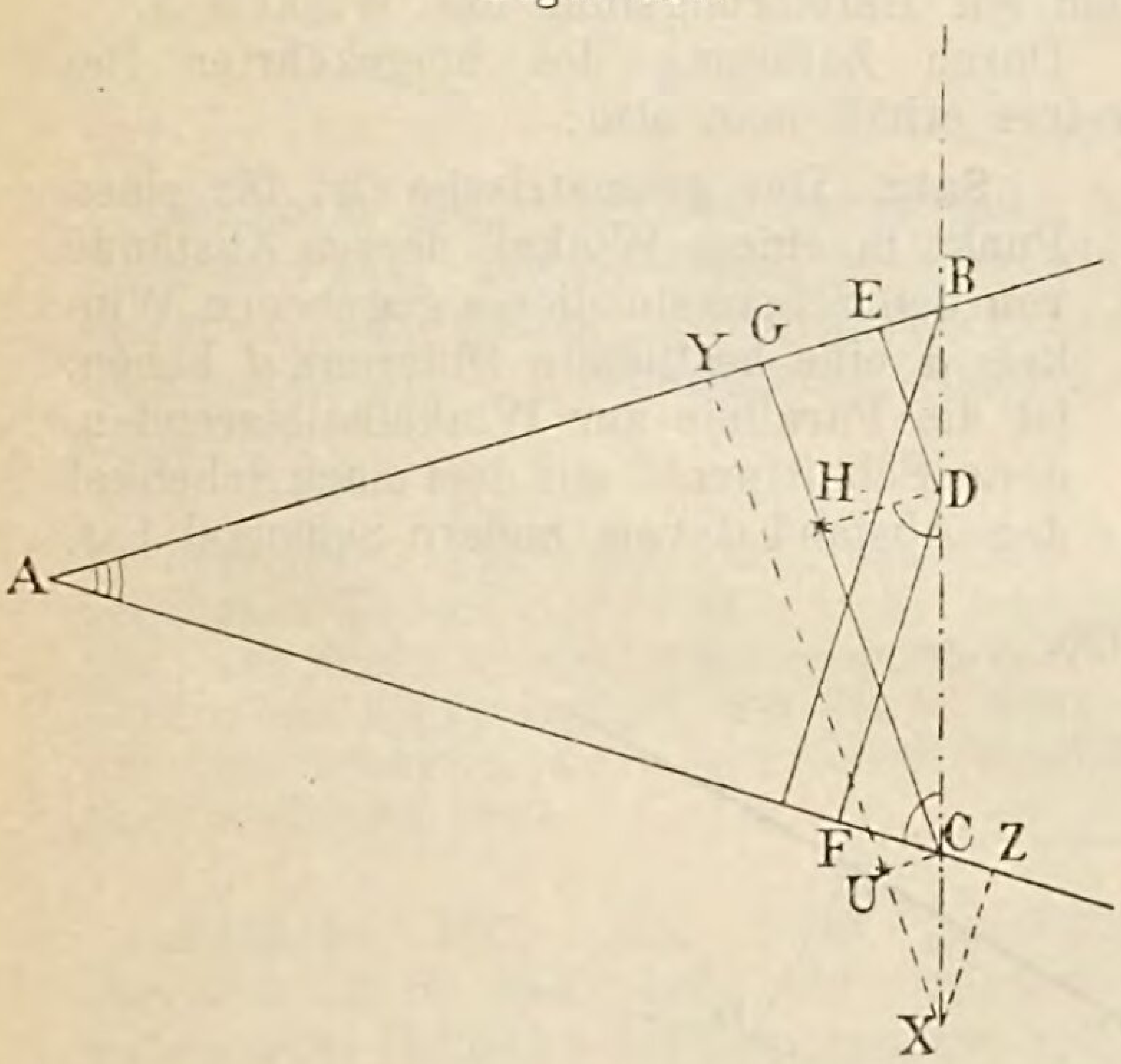
Erkl. 513. Die nebenstehende Auflösung muss immer da in Betracht kommen, wo etwa an einem Rad eine Kurbelstange in bestimmter Richtung angebracht ist. Dreht sich dann das Rad, und behält die Stange dieselbe Richtung bei, so beschreibt ihr anderer Endpunkt ebenfalls einen Kreis von gleicher Grösse, wie der gegebene. Daher können umgekehrt zwei entsprechende Punkte zweier gleichgrossen Kreise durch eine Strecke von der Länge der Zentralstrecke verbunden werden und während der Drehungsbewegung beider Kreise verbunden bleiben.

und gleiche Strecke durch den zweiten Endpunkt von l, so zeigt sich, dass die vierte Seite des Parallelogramms stets gleiche Länge hat wie l. Also:

Satz. Der geometrische Ort für den Endpunkt einer Strecke l, welche parallel einer gegebenen Richtung, von den Punkten einer Kreislinie ausgeht, ist der Kreis mit gleichem Radius r, dessen Mittelpunkt vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises um die Strecke l parallel der gegebenen Richtung entfernt ist.

Aufgabe 183. Man suche den geometrischen Ort für den Punkt P, dessen Abstände von den Schenkeln eines gegebenen Winkels α eine gegebene Summe haben.

Figur 224.



Auflösung. Zwei Punkte, deren Abstandssumme die gegebene Länge s hat, sind sofort anzugeben, nämlich diejenigen Punkte der Schenkel AB und AC, die vom entgegengesetzten Schenkel die Strecke s selbst als Abstand haben. Für diese ist der Abstand vom eigenen Schenkel $= 0$, vom andern $= s$, also $0 + s = s$. Soll ein weiterer Punkt D ebenfalls die Abstandssumme s haben, so muss $DE + DF = s = CG$ sein. Zieht man nun $DH \parallel BA$, so wird $DE = HG$, also muss der Rest $CH = DF$ sein, also die Dreiecke $CDH \cong DCF$, folglich:

$$\sphericalangle FCD = HDC$$

sein; demnach bildet CD gleiche Winkel mit CF und DH, also auch mit CF und BA, oder CD ist Verbindungslinie der Punkte C und B. Mit Zufügung des umgekehrten Beweises erhält man also:

Satz. Der geometrische Ort für einen Punkt P, dessen Abstände von den Schenkeln eines Winkels α die bestimmte Summe s haben, ist die Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks mit α als Scheitelwinkel und s als Höhen auf die Schenkel.

Erkl. 514. Der nebenstehende Beweis zeigt, dass die Eigenschaft der Abstandssumme s die Lage des Punktes P auf der Linie BC bedingt. Der umgekehrte Beweis, dass Lage auf BC die Eigenschaft der Abstandssumme s bedingt, wäre folgender: Ist D ein Punkt der Strecke BC, und man zieht $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $DH \parallel AB$, so wird $DE = HG$ und im $\triangle DCH$ und CDF ist $CD = CD$, $\sphericalangle F = \sphericalangle H = 90^0$,

$$\sphericalangle HDC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA.$$

Folglich $\triangle DCH \cong CDF$, also auch $DF = HC$,

$$DF + DE = HC + HG = CG = s.$$

Erkl. 515. Auch die Verlängerung der Strecke BC über beide Winkelschenkel hinaus besitzt die Eigenschaften der Aufgabe, wenn man einen vom Winkelschenkel nach dem Aussenraume der Winkel gerichteten senkrechten Abstand als negative Grösse in Rechnung setzt. So ist $XY - XZ = XY - XU = UY = CG$.

Aufgabe 184. Man suche den geometrischen Ort eines Punktes in einem gegebenen Winkel α, dessen Abstände von den Schenkeln eine gegebene Differenz d haben.

Erkl. 516. Der nebenstehende Beweis zeigt, dass die Eigenschaft der Abstandsdifferenz d die Lage auf der Linie PD bedingt. Der umgekehrte Beweis hat auszuführen, dass die Lage auf PD auch die Eigenschaft der Abstandsdifferenz d bedingt, und wäre zu führen wie folgt:

Ist PD Winkelhalbierende des Winkels CPE, wobei $PE \parallel QB$ und $PQ = d$ ist, so wird $DC = DE$, also $DB - DC = DB - DE = d$.

Erkl. 517. Auch die Verlängerung der Strecke PD nach aussen besitzt die Eigenschaften der Aufgabe, wenn man wieder die nach aussen gerichteten senkrechten Abstände als negative Grössen in Rechnung bringt. Dann wird:

$$XY - (-XZ) = XY + XZ = XY + XK$$
$$= KY = d.$$

Hierbei gehen also die Aufgaben über Abstandssumme und Abstandsdifferenz ineinander über.

Auflösung Ein einzelner Punkt, dessen Abstände die Differenz d haben, ist leicht anzugeben, nämlich derjenige auf dem einen Schenkel liegende Punkt P, dessen Abstand vom andern Schenkel gleich d ist. Für diesen ist der Abstand vom Schenkel $AB = d$, vom Schenkel $AC = 0$, also:

$$PQ - PP = d - 0 = d.$$

Soll dann für einen andern Punkt D ebenfalls $DB - DC = d$ sein, so trage man $DC = DE$ auf DB ab, dann muss:

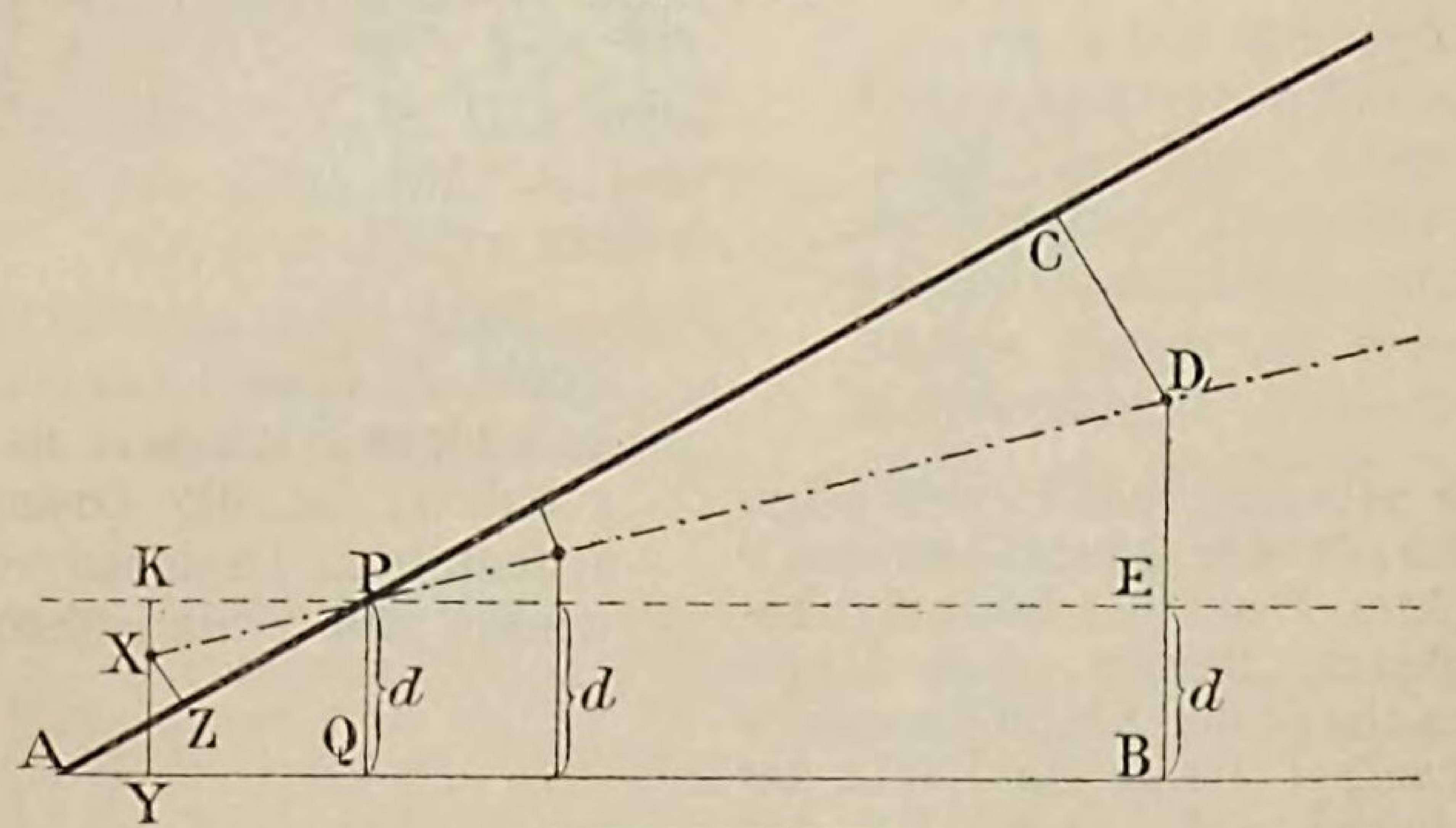
$$DB - DC = DB - DE = BE = d$$

sein, also liegt E auf der Parallelen zu AB durch P, und D hat von PE und PC gleichen Abstand, liegt also auf der Winkelhalbierenden von CPE, und diese muss parallel sein zur Halbierungslinie des Winkels α.

Durch Zufügung des umgekehrten Beweises erhält man also:

Satz. Der geometrische Ort für einen Punkt in einem Winkel, dessen Abstände von den Schenkeln dieses gegebenen Winkels α eine bestimmte Differenz d haben, ist die Parallele zur Winkelhalbierenden, deren Schnittpunkt mit dem einen Schenkel den Abstand d vom andern Schenkel hat.

Figur 225.



Aufgabe 185. Wie können die Ergebnisse der beiden vorigen Aufgaben zusammengefasst werden, ohne Rücksicht auf die Richtung einer Abstandsstrecke?

Erkl. 518. In Figur 226 hat jeder Punkt der Rechtecksseiten von den beiden Digonalen als Abstände zwei Strecken, deren Fusspunkte bald im einen, bald im anderen der vier Winkel der Diagonalen liegen. Ihre Summe bezw. Differenz als ganze aber ist stets gleich der Höhe von einer Ecke auf die andere Diagonale.

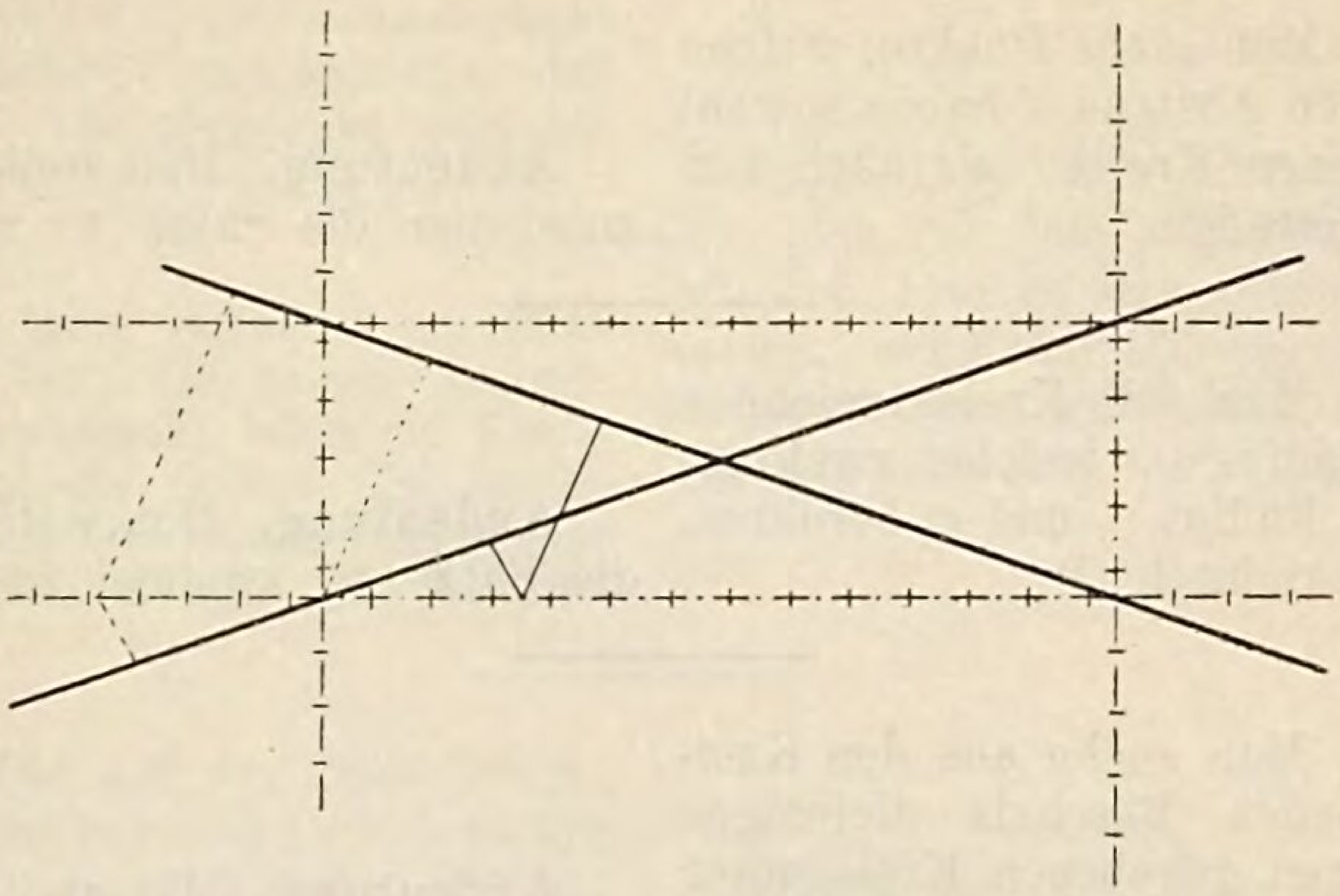
Auflösung. Als Zusammenfassung voriger beiden Sätze kann man aussprechen:

Satz. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen senkrechte Abstände von zwei beliebigen Geraden eine bestimmte Summe oder Differenz haben, sind die Seiten oder die Seitenverlängerungen des Rechtecks, welches die gegebenen Geraden zu Diagonalen hat und die

Der geometrische Ort besteht also je aus vier getrennten Linienstücken, auf deren einen, mit + bezeichneten die Summe, auf deren andern, mit — bezeichneten, die Differenz stets den gleichen Wert d hat.

als Summe oder Differenz bestimmte Strecke zum Abstand jeder Ecke von der anderen Diagonale.

Figur 226.



Aufgabe 186. Man soll durch einen beliebigen Punkt der Zeichenebene eine Linie zeichnen, aus welcher ein gegebener Kreis eine Sehne von vorgeschriebener Länge ausschneidet.

Erkl. 519. Für einen Punkt ausserhalb des gegebenen Kreises gibt es stets zwei Lösungen, für einen innern ebenso, wenn er ausserhalb des Ortskreises liegt; dagegen nur eine, wenn er auf dem Ortskreis, keine, wenn er innerhalb des Ortskreises liegt.

Auflösung. Da nach Satz 47 die Linie einen bestimmten Abstand vom Kreismittelpunkt haben muss, ist sie Tangente an den Ortskreis der Mittelpunkte aller gleichlangen Sehnen. Man konstruiere also diesen Kreis, und vom gegebenen Punkte eine Tangente an denselben.

Aufgabe 187. Mit zwei gegebenen Strecken A_1B_1 und A_2B_2 als Grundseiten sollen zwei Dreiecke mit gemeinsamer Spitze C konstruiert werden, von welchen die Winkel γ_1 und γ_2 gegeben sind.

Erkl. 520. Wenn die beiden Kreisbogen über A_1B_1 jene über A_2B_2 gar nicht treffen, ist die Aufgabe unmöglich; berührt ein Bogen einen der andern, so erhält man eine Lösung; bei zwei Schnittpunkten oder zwei Berührungspunkten entstehen zwei Lösungen; zwei Schnittpunkte und ein Berührungspunkt liefern drei, u. s. w. Wenn der eine Kreisbogen über A_1B_1 beide Kreisbogen über A_2B_2 schneidet, und auch der zweite über A_1B_1 den einen über A_2B_2, dann entstehen sechs Lösungen.

Auflösung. Nach Satz 49b liegen die Spitzen auf je einem der beiden Kreisbogen, welche die Strecken AB als Sehnen und die Winkel γ als Peripheriewinkel haben. Man konstruiere also diese Kreise und benütze einen ihrer Schnittpunkte als Spitze C.

Man kann je nach den Bedingungen der Aufgabe erhalten: keine, eine, bis sechs Lösungen.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 188. Man suche Punkte, welche je gleichgrosse Entfernung haben von zwei Punkten A und B und von zwei Geraden a und b.

Andeutung. Man stelle nach Aufgabe 178 zusammen die Sätze 39 und 42.

Aufgabe 189. Man suche Punkte, welche je gleichgrosse Entfernung haben von zwei Geraden a und b und von zwei konzentrischen Kreisen.

Andeutung. Man stelle nach Aufgabe 178 zusammen die Sätze 42 und 46.

Aufgabe 190. Man suche Punkte, welche denselben gegebenen Abstand d haben sowohl von einem gegebenen Kreise, als auch von einer gegebenen Geraden.

Andeutung. Man stelle nach Aufgabe 178 zusammen die Sätze 40 und 45.

Aufgabe 191. Man soll Kreise zeichnen mit gegebenem Radius r, welche zwei gegebene Kreise mit Radius r_1 und r_2 berühren. (Ausführliche Determination!)

Andeutung. Man stelle nach Aufgabe 178 die Sätze 45 zweimal zusammen.

Aufgabe 192. Man suche aus den Kreisen eines gegebenen Büschels diejenigen heraus, welche einen gegebenen Kreis unter gegebener Sehne schneiden.

Andeutung. Man stelle nach Aufgabe 178 zusammen die Sätze 39 und jenen in Aufgabe 180.

Aufgabe 193. Man suche den geometrischen Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der zwei gegebene gleichgrosse Kreise gleichartig berührt.

Andeutung. Man führe die Aufgabe auf Satz 39 zurück.

Aufgabe 194. Man bestimme den geometrischen Ort für den vierten Eckpunkt eines Vierecks, von dem drei Eckpunkte und der Winkel am vierten gegeben sind.

Andeutung. Man führe die Aufgabe auf Satz 49 zurück.

Aufgabe 195. Aus den Kreisen einer Kreisschar sollen diejenigen herausgesucht werden, welche einen gegebenen Kreis dieser Schar berühren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 159.

Aufgabe 196. Aus den Kreisen einer Kreisschar sollen diejenigen herausgesucht werden, welche eine beliebig gegebene Gerade berühren.

Andeutung. Man beachte die entstehenden Tangentendreiseite.

Aufgabe 197. Man wiederhole die Aufgabe 187 für den Fall, dass die Strecke A_1B_1 und A_2B_2 in einem Eckpunkte aneinanderstossen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 58 und 187.

Anmerkung 11. Weitere zu diesem Abschnitt gehörige Aufgaben sind die Aufgaben 50 bis 74 in Müller, Konstruktionsaufgaben I, sowie die Fragen 6 bis 18 und die Aufgaben 1 bis 76 in Cranz, das Apollonische Berührungsproblem.

13) Aufgaben über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

(Zu Abschnitt C, a, b, c, d.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 198. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben ist das Zentrum der Ecken, ein Eckpunkt und die Winkel.

Erkl. 521. Man kann entweder im Eckpunkte die Komplemente der beiden anderen Winkel am Radius antragen, oder am Kreismittelpunkte die doppelte Grösse der beiden anderen Dreieckswinkel, und erhält so entweder die Seiten oder die Radien nach den anderen Eckpunkten.

Auflösung. Die Verbindungsstrecke des Zentrums mit dem gegebenen Eckpunkte liefert den Radius des Umkreises, und nach Antwort der Frage 155 sind an diesem Radius die an jedem der beiden Endpunkte anzutragenden Winkel leicht zu finden.

Aufgabe 199. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben ist das innere Zentrum der Seiten, ein Eckpunkt und die Winkel.

Erkl. 522. Statt am gegebenen Eckpunkte die Winkelhälften anzutragen, könnte man auch nach Antwort 156 diejenigen Winkel konstruieren, welche von den Zentralen der Eckpunkte mit den Radien des Kreises gebildet werden. Werden sodann auf diese Radien vom Eckpunkte aus die Senkrechten gefällt, so erhält man wieder die Seiten des Dreiecks.

Auflösung. An der Verbindungsstrecke des Zentrums mit der gegebenen Ecke ist beiderseits die Hälfte des zugehörigen Dreieckswinkels anzutragen. Dadurch erhält man die beiden Tangenten des Inkreises, kann also dessen Radius und ihn selbst konstruieren. Sodann sind nach Antwort der Frage 156 die Winkel zu konstruieren, welche an der ersten Verbindungsstrecke beiderseits anzutragen sind, um die Linien nach den anderen Eckpunkten zu erhalten.

Aufgabe 200. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man den Scheitel, das zur Grundseite gehörige äussere Zentrum der Seiten und den Umfang. Man soll das Dreieck konstruieren.

Erkl. 523. Der Berührungspunkt des Schenkels mit dem Ankreise liegt:

1) auf einem Kreise um den Scheitel mit Radius gleich dem halben Umfange,

2) auf einem Halbkreise über der Verbindungsstrecke des Scheitels mit dem Kreismittelpunkt.

Auf derselben Linie muss auch die Grundseite des Dreiecks senkrecht stehen.

Auflösung. Da die Schenkel des Dreiecks Tangenten sind und als Länge der Tangentenabschnitte die Hälfte des Umfangs haben, so kann man das rechtwinklige Dreieck konstruieren, dessen Hypotenuse die Verbindungsstrecke des Scheitels mit dem Kreismittelpunkt ist, und dessen Schenkel der Berührungspunkt ist. Dadurch erhält man den Kreis und die Schenkel, also auch die Grundseite des Dreiecks.

Aufgabe 201. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem drei von den vier Zentren der Seiten gegeben sind.

Auflösung. Die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks sind die Höhenfusspunkte des gegebenen Dreiecks.

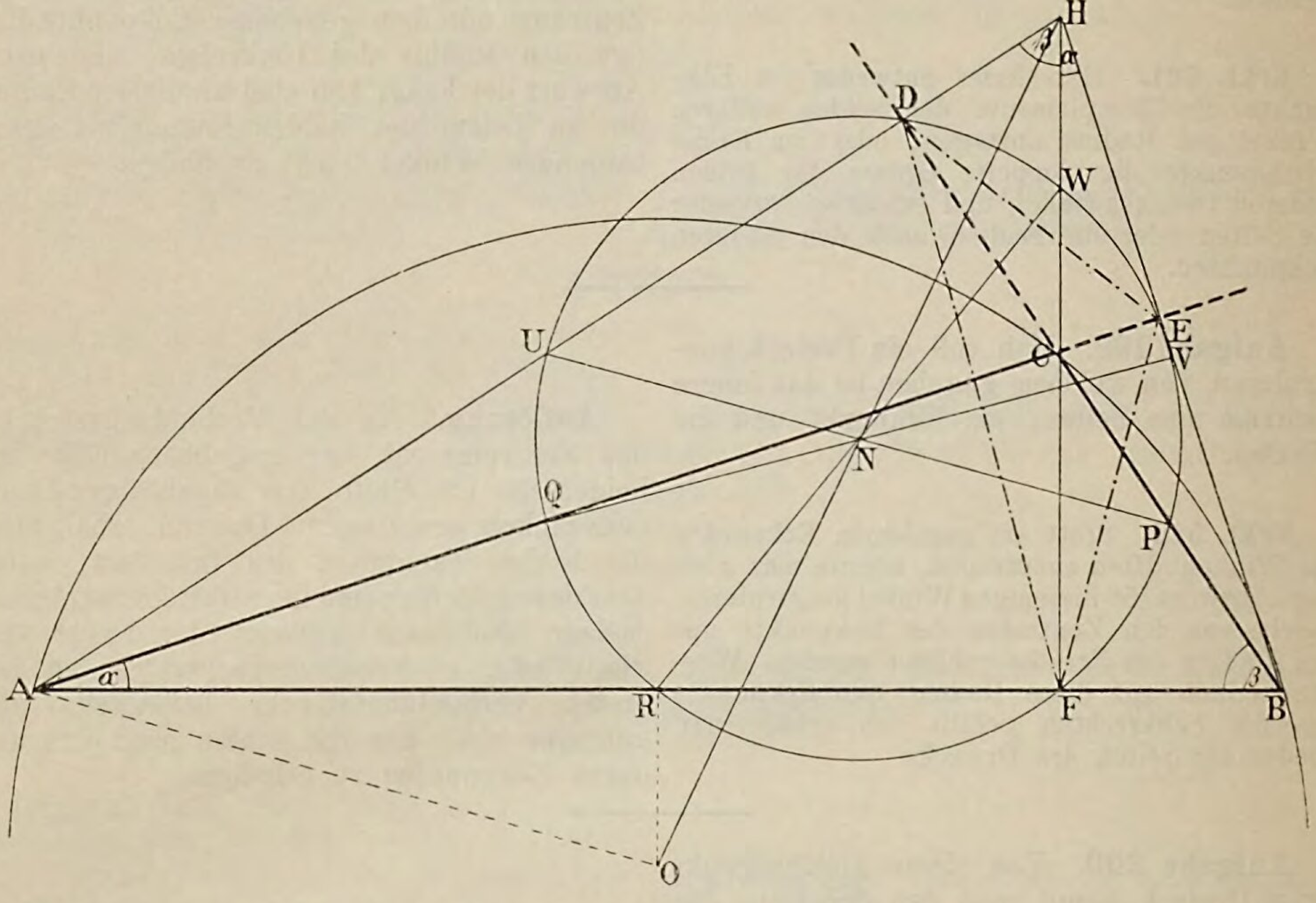
Aufgabe 202. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem die drei Höhenfusspunkte gegeben sind.

Auflösung. Man konstruiere die Zentra der Seiten des Dreiecks der Höhenfusspunkte.

Aufgabe 203. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben ist der Höhenpunkt, die Lage einer Ecke und die Winkel.

Auflösung. An der Verbindungsstrecke des Höhenpunktes mit der gegebenen Ecke sind beiderseits bekannte Winkel anzutragen nach Antwort der Frage 159.

Figur 227.



Aufgabe 204. Man soll die Konstruktion des Kreises der neun Punkte in einem stumpfwinkligen Dreieck ausführen.

Erkl. 524. Das Dreieck ABC ist für das Fusspunktendreieck DEF das Dreieck aus den innern und zwei äusseren Zentren der Seiten. — Die Schenkel des stumpfen Dreieckswinkels werden Halbierende zweier Innenwinkel des Fusspunktendreiecks. — Ferner ist im Fusspunktendreieck DEF:

$$\sphericalangle DFE = 2\cdot(\gamma - 90^0) = 2\gamma - 180,$$
$$\sphericalangle CFD = CFE = \gamma - 90;$$
$$\sphericalangle FED = 2\cdot\beta, \quad \sphericalangle CEF = CED = \beta,$$
$$\sphericalangle EDF = 2\cdot\alpha, \quad \sphericalangle CDE = CDF = \alpha.$$

Erkl. 525. Es sind in Figur 227:

Höhen:	AD, BE, CF.
Obere Höhenabschnitte:	HA, halbiert in U,
	HB, halbiert in V,
	HC, halbiert in W.
Untere Höhenabschnitte:	HD, HE, HF.

Auflösung. Beim stumpfwinkligen Dreieck fällt der Höhenpunkt H (s. Figur 227) und zwei Höhenfusspunkte D und E ausserhalb des Dreiecks, so dass auch die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte UVW ausserhalb zu liegen kommen. Von den Höhen des Dreiecks ABC ist nur die zum stumpfen Winkel gehörige auch Halbierungslinie des Innenwinkels im Fusspunktendreieck, die beiden anderen halbieren die Aussenwinkel.

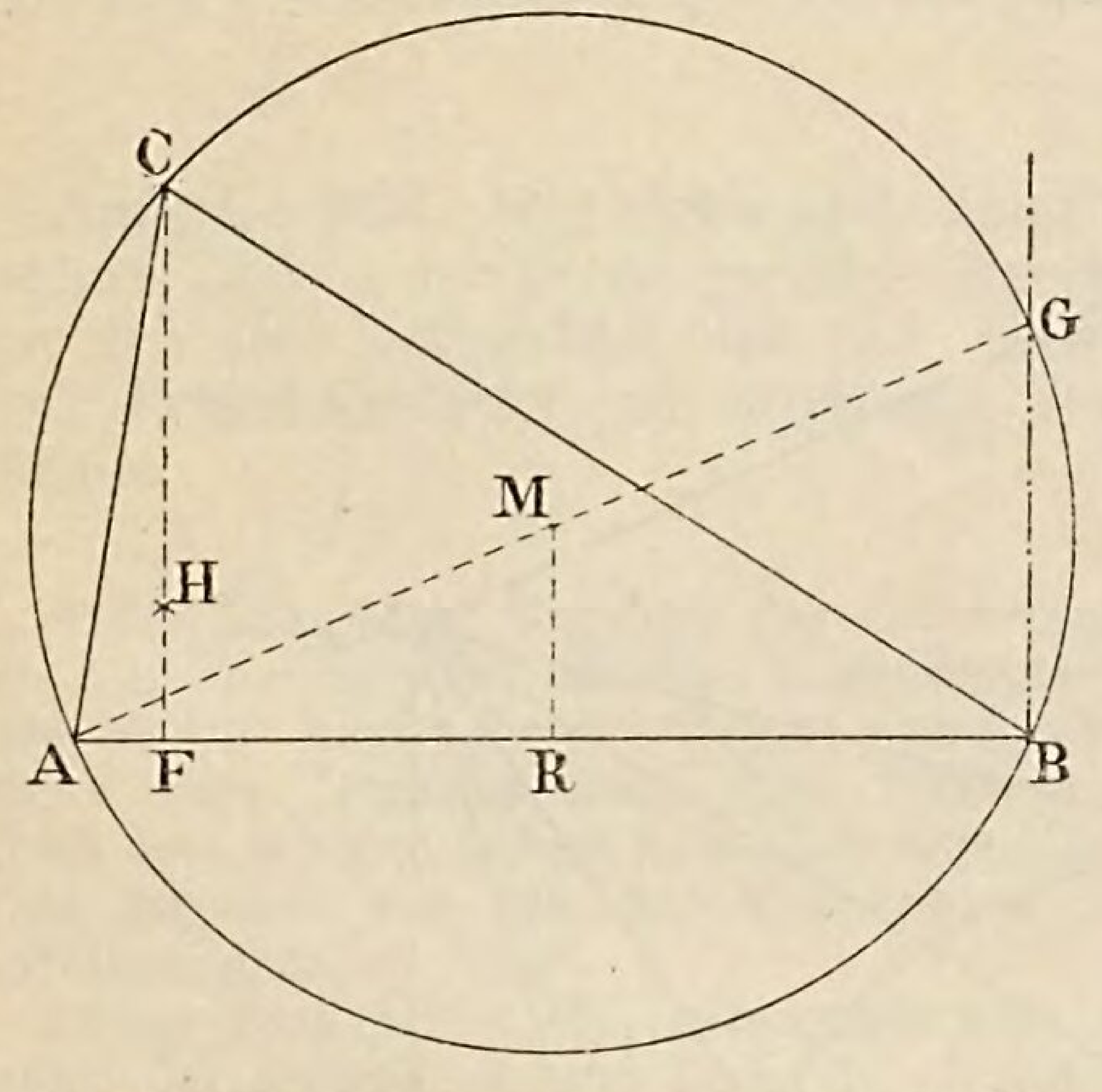
Die Winkel des Fusspunktendreiecks erfahren gegenüber der Aussage 4 der Antwort 159 ebenfalls eine Änderung, indem das Komplement des stumpfen Dreieckswinkels γ nicht $90 - \gamma$, sondern $\gamma - 90$ ist, und an den ausserhalb des Dreiecks liegenden Fusspunkten die doppelten Dreieckswinkel selber entstehen.

Wieder ist Punkt N gemeinsamer Halbierungspunkt der Strecke OH und der gleichlangen Durchmesser $PU = QV = RW$; auch

$OR = HW$, $OP = HU$, $OQ = HV$ (davon in Figur 227 der Einfachheit wegen nur die erste Strecke eingezeichnet).

Aufgabe 205. Man errichte im Endpunkt einer Dreiecksseite eine Senkrechte bis zum Schnittpunkt mit dem Umkreis und untersuche die Länge dieser Strecke.

Figur 228.



Erkl. 526. Der von A ausgehende Durchmesser AM muss die Senkrechte BG auf dem Kreise treffen, da die zum rechten Winkel ABG gehörige Sehne Durchmesser sein muss.

Die im Punkte A auf AB errichtete Senkrechte behält dieselbe Länge gleich:

$$BG = CH = 2 \cdot MR,$$

da zwei Senkrechte in den Endpunkten einer Sehne stets zur Mittelsenkrechten MR symmetrisch sein müssen.

Auflösung. Ist $GB \perp BA$ in Figur 228, so wird BG parallel zur Mittelsenkrechten RM, also wird im Dreieck ABG die Strecke RM Verbindungslinie zweier Seitenmitten, folglich $BG = 2 \cdot RM$. Nun ist aber auf der Höhe CF der obere Abschnitt CH ebenfalls gleich $2\,MR$, also erhält man die Aussage:

Satz. Der Umkreis eines Dreiecks schneidet von einer Senkrechten im Endpunkte einer Seite eine Strecke ab, welche gleich ist dem oberen Abschnitt der zu dieser Seite gehörigen Höhe und gleich der doppelten Mittelsenkrechten dieser Seite.

Aufgabe 206. Man errichte von den Mittelpunkten der Zentralstrecken der Berührungskreise Senkrechte auf die Dreiecksseiten und untersuche die entstehenden Abschnitte.

Erkl. 527. Da nach den Ausführungen in Antwort 156 die Strecke $EH_3 = H_1H_2 = b$ und $H_1H_3 = EH_2 = c$ ist, so erhält man für nebenstehende Ergebnisse ferner:

$$UH_1 = UH_3 = \frac{1}{2} H_1H_3 = \frac{1}{2} EH_2 = \frac{1}{2} \cdot c$$

und

$$TH_2 = TE = \frac{1}{2} EH_2 = \frac{1}{2} H_1H_3 = \frac{1}{2} \cdot c;$$

also:

$$UH_1 = UH_3 - TH_2 = TE.$$

Auflösung. Errichtet man in Figur 229 von den Mittelpunkten P und N die Senkrechten $PU \perp AC$ und $NT \perp AC$, so wird im überschlagenen Trapez $M_aH_3M_bH_1$, die Strecke PU Mittelparallele, und ebenso im Trapez $M_cH_2M'E$ die Strecke NT Mittelparallele. Folglich wird als Mittelparallele:

$$PU = \frac{1}{2}(M_aH_3 - M_bH_1) = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho_b),$$

und

$$NT = \frac{1}{2}(M_cH_2 + M'E) = \frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho)$$

und es werden als Seitenhälften:

$$UH_1 = UH_3 \text{ und } TH_2 = TE.$$

Ferner wird:

$$CU = CH_3 - UH_3 = \frac{a+c-b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-b}{2}$$

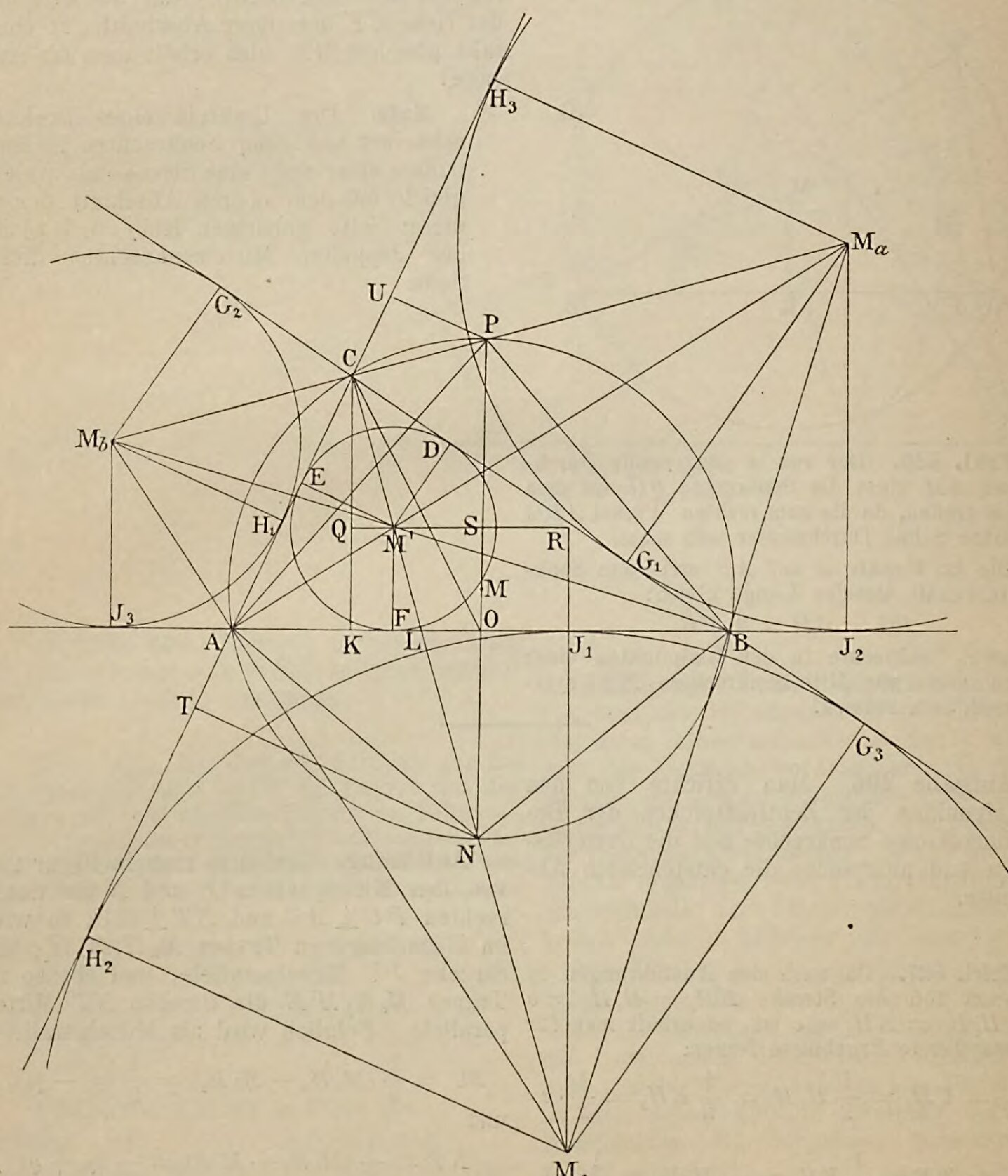
und

$$AT = AH_2 - TH_2 = \frac{a+c-b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-b}{2},$$

also $CU = AT$.

Aehnliches erhält man, wenn die Senkrechten von den Mittelpunkten $M_a M_c$ und $M_b M_c$, $M' M_a$ und $M' M_b$ gefällt werden auf je eine der Dreiecksseiten.

Figur 229.



Aufgabe 207. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben ist der Schwerpunkt S, eine Ecke und die Richtung der durch diese gehenden Seiten.

Erkl. 528. Der Endpunkt der Schwerlinie ist Mittelpunkt der dritten Seite. Und Aufgabe 212 des III. Teils lehrt durch einen Punkt P eine Linie zu ziehen, welche durch die Schenkel eines gegebenen Winkels halbiert wird: Man zieht eine Parallele durch P zum einen Schenkel, verdoppelt den Abschnitt des geschnittenen Schenkels und verbindet P mit dem Endpunkte.

Auflösung. Die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit der Ecke ist Schwerlinie; deren unterer Abschnitt wird erhalten durch Verlängerung um die Hälfte, und durch den entstehenden Punkt ist die dritte Seite zu legen nach Aufgabe 212 des III. Teiles als diejenige Strecke, welche im Endpunkte der Schwerlinie halbiert wird.

Aufgabe 208. Man ziehe nach einer beliebigen Linie g der Ebene parallele Strecken von den drei Eckpunkten und dem Schwerpunkte eines Dreiecks und untersuche deren Längen.

Erkl. 529. Das Ergebnis der nebenstehenden Aufgabe lässt sich als Satz folgendermassen aussprechen: Eine beliebige Strecke vom Schwerpunkt eines Dreiecks nach einer Linie g ist gleich dem arithmetischen Mittel der dazu parallelen Strecken von den drei Eckpunkten nach derselben geraden Linie.

Dieser Satz bildet ein Seitenstück zum Ergebnis der Aufgabe 3, und findet Wiederholung bei jeglicher Figur, wo vom Mittelpunkt einer zentrischen Figur als Schwerpunkt nach einer geraden Linie parallele Strecken gezogen werden.

Auflösung. Zum Beweise ziehe man auch noch von den beiden Punkten D und E einer Schwerlinie die Parallelen nach g, so entstehen die Paralleltrapeze $ASA'S'$, $EDE'D'$, $CBC'B'$ mit den Mittelparallelen EE', SS', DD', und man erhält:

1) $AA' + SS' = 2 \cdot EE'$,

2) $BB' + CC' = 2 \cdot DD'$, also durch Addition:

$$AA' + BB' + CC' + SS' = 2(EE' + DD').$$

Nun ist aber auch:

3) $EE' + DD' = 2 \cdot SS'$, also die rechte Seite der vorigen Gleichung:

$$2(EE' + DD') = 2 \cdot 2SS' = 4 \cdot SS',$$

folglich:

$$AA' + BB' + CC' + SS' = 4 \cdot SS'.$$

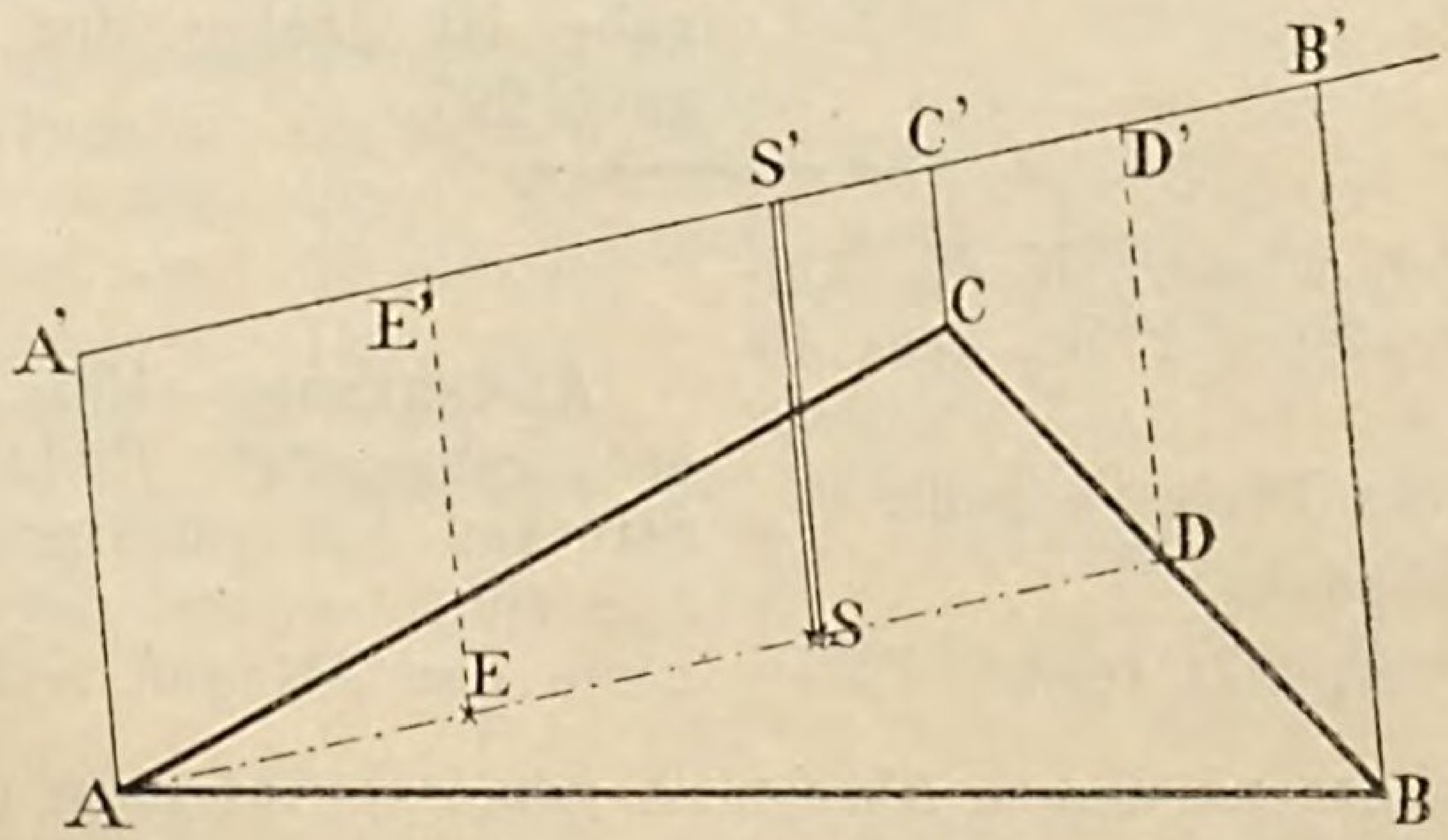
oder:

$$AA' + BB' + CC' = 3 \cdot SS',$$

und

$$SS' = \frac{1}{3}(AA' + BB' + CC').$$

Figur 230.



b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 209. Man konstruiere ein Dreieck, von welchem gegeben ist das Zentrum der Ecken, die Winkel und die Lage einer Seitenlinie.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 198.

Aufgabe 210. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem gegeben ist ein Zentrum der Seiten, die Winkel und die Lage einer Seite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 199.

Aufgabe 211. Man soll ein Dreieck konstruieren, von welchem die Lage einer Seite und zwei Zentren der Seiten gegeben sind.

Andeutung. Wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 212. Von einem rechtwinkligen Dreieck seien gegeben der Scheitel und das zugehörige innere und äussere Seitenzentrum. Man konstruiere das Dreieck.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 200.

Aufgabe 213. Von einem Dreieck sei gegeben der Höhenpunkt, die Winkel und die Lage einer Seite. Dasselbe zu konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 203.

Aufgabe 214. Man beweise in Figur 219, dass:

$$CT = AU = \frac{1}{2}(a+b),$$

$$NS = \frac{1}{2}(\varrho_c + \varrho) = \frac{1}{2} M_c R.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 206.

Aufgabe 215. Man soll ein Dreieck konstruieren aus einer Seite und den beiden von ihren Endpunkten ausgehenden Schwerlinien.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 207.

Aufgabe 216. Man wiederhole die Aufgabe 208 für die besonderen Fälle, dass die Linie g:

1) durchs Innere des Dreiecks geht,
2) durch einen Eckpunkt,
3) durch den Schwerpunkt selbst.

Andeutung. Man berücksichtige, dass entgegengesetzte Richtungen der parallelen Strecken mit entgegengesetzten Vorzeichen ($\pm$) eintreten, und dass ein Punkt auf einer Linie den Abstand Null von derselben hat.

Anmerkung 12. Weitere zu diesem Abschnitte gehörige Aufgaben findet man in Müller, Konstruktionsaufgaben I, Aufgaben 653 bis 1362 in den Abschnitten K, L, M: „Dreiecksaufgaben über Ecktransversalen, über die Berührungskreise und über gegebene Punkte“.

Anhang.

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 5. Die Bogenstücke zwischen den Schenkeln eines Mittelpunktswinkels von 180^0 oder 45^0 bezw. 30^0 haben 180^0 und 180^0 oder 45^0 und $360^0 - 45^0 = 315^0 = 7 \cdot 45^0$, bezw. 30^0 und $360^0 - 30^0 = 330^0 = 11 \cdot 30$ Bogengrade.

Aufgabe 6. Die Bogenstücke zwischen den Schenkeln eines Mittelpunktswinkels von 135^0 bezw. von 150^0 haben $135^0 = \mathbf{3} \cdot 45^0$ und $360^0 - 135^0 = 225^0 = \mathbf{5} \cdot 45^0$, bezw. $150^0 = \mathbf{5} \cdot 30^0$ und $360^0 - 150^0 = 210^0 = \mathbf{7} \cdot 30^0$ Bogengrade.

Aufgabe 7. Die Abstände von einer Tangente sind im Berührungspunkt Null, sonst wie in Aufgabe 3 die halbe Summe stets gleich dem Radius. Von einer Sehne haben die Senkrechten entgegengesetzte Richtungen, auf dem zur Sehne senkrechten Durchmesser sind jeweils die im Vergleich zu benachbarten Abständen längsten Strecken; auf dem zur Sehne parallelen wieder die Mittel; die auf den senkrechten Tangenten gelegenen Strecken sind gleich der halben Differenz je zweier, — in den Schnittpunkten der Sehne Abstände Null.

Aufgabe 8. Von den berührenden Strecken ist die eine gleich der längeren, die andere gleich der kürzeren der beiden durch den Mittelpunkt gehenden Strecken, ihr Unterschied gleich dem Durchmesser. Der senkrechte Abstand eines Kreispunktes von g ist stets gleich dem Abstand des Fusspunktes vom Schnittpunkt der Schiefen auf g.

Aufgabe 20. Man setze in zwei beliebigen Peripheriepunkten mit der festgehaltenen Zirkelöffnung ein und beschreibe mit derselben Kreisbögchen: so schneiden sich diese im Kreismittelpunkte.

Aufgabe 21. Durch Benützung der Mittelsenkrechten der Sehne als Mittelparallelen findet man, dass die Strecken zwischen den Kreispunkten des Durchmessers und den Schnittpunkten der Senkrechten gleich lang sind.

Aufgabe 22. Die Ergebnisse der Aufgaben 10, 12, 13, 21 bleiben unverändert bestehen.

Aufgabe 23. Wegen gleicher Mittelpunktswinkel ist je das eine Paar gleichlang, und infolge dessen nach Satz 70 das andere Paar parallel, also beide Paare parallel und gleich.

Aufgabe 24. Es wiederholt sich in anderer Ausdrucksweise die Auflösung der Aufgabe 13.

Aufgabe 25. Man ziehe den Durchmesser durch den gegebenen Punkt.

Aufgabe 26. Man trage den gegebenen Abstand von M aus als Sehne ein in den Halbkreis über MP in Figur 16.

Aufgabe 27. Kreisbogen um A und B mit Radius r schneiden einander im Mittelpunkt. Zwei Lösungen, wenn $AB < 2r$, eine Lösung, wenn $AB = 2r$, keine Lösung, wenn $AB > 2r$.

Aufgabe 42. Der Endpunkt einer jeden der beiden Senkrechten auf g in B von der Länge r ist Kreismittelpunkt.

Aufgabe 42a. Der Fusspunkt einer Senkrechten von M auf g ist Berührungspunkt.

Aufgabe 43. Man wähle auf g je einen beliebigen Punkt als Punkt P der Figur 173 und 174 und konstruiere jeweils:

$$\sphericalangle B'PM = \sphericalangle BPM.$$

Aufgabe 44 und 45. Der vom Fass gebildete Kreis muss die Schenkel der Winkel berühren.

Aufgabe 46. Man drehe die Figur um 180^0 um den Mittelpunkt.

Aufgabe 47. Man klappe die Figur um den zu den Tangenten parallelen Durchmesser um.

Aufgabe 48. Man ziehe durch den Schnittpunkt zweier der Tangenten eine parallele Gerade zur dritten, und wähle hierauf zwei Punkte mit beiderseits gleichem Abstande.

Aufgabe 49. Man verbinde A und B mit E und führe den Beweis indirekt.

Aufgabe 50. Die dritte Ecke durchläuft ebenfalls eine gerade Linie, und zwar eine Tangente an denselben Kreis, welcher von allen Grundseiten des Dreiecks berührt wird.

Aufgabe 51. Mit den Höhen h_a oder h_b sind Kreise zu zeichnen um A und B, und Tangenten an dieselben von B und A zu konstruieren; mit der Höhe h_c als Abstand wäre eine Parallele zu c zu zeichnen: auf dieser liegt der Punkt C.

Aufgabe 62. $\frac{2}{3}\cdot 180 = 120^0$,

$\frac{3}{4}\cdot 180^0 = 135^0$, $\frac{2}{5}\cdot 180^0 = 72^0$,

$\frac{3}{5}\cdot 180^0 = 108^0$, $\frac{m}{2n}\cdot 360 = \frac{m\cdot 180^0}{n}$.

Aufgabe 63. $\frac{90^0}{5} = 18$ Bogengrade,

$\frac{360}{7}$, $\frac{720}{11}$, $\frac{4}{3}\cdot 90 = 120$ Bogengrade $\cdots$

Aufgabe 64. Man zeichne zwei senkrechte Radien und einen Peripheriewinkel über deren Standbogen.

Aufgabe 65. Man zeichne den zugehörigen Mittelpunktswinkel bezw. Peripheriewinkel.

Aufgabe 66. Man suche die Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit dem Halbkreise über der gegebenen Strecke als Durchmesser.

Aufgabe 67. Man wähle als Scheitel diejenigen Punkte des Kreises mit Sehne a und Peripheriewinkel α, durch welche der auf der gegebenen Geraden g senkrechte Durchmesser geht.

Aufgabe 68. Der Mittelpunkt ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Senkrechten auf g in B.

Aufgabe 69. Zu gleichen Winkelhälften gehören gleiche Bogen und umgekehrt.

Aufgabe 70. Auf dem Kreise, welchem der halbierte Bogen angehört.

Aufgabe 71 bis 73. Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt der Kreise, welche die gegebene Strecke als Sehne und den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel haben.

Aufgabe 74. Man trägt in denjenigen Kreis, welcher die Seite als Sehne und den Winkel als Peripheriewinkel hat, das dritte gegebene Stück an seinem Orte ein.

Aufgabe 82. Man ziehe die Sehne AB und $CD \perp AB$.

Aufgabe 83. Man zeichnet in Figur 181 erst das gleichschenklige Dreieck MBC, dann die übrigen Stücke, um $\sphericalangle AME$ zu erhalten.

Aufgabe 84. Man zeichnet die Tangenten in den Endpunkten zweier senkrechten Radien.

Aufgabe 85. Man erhält den Ausgangspunkt auf der gegebenen Tangente als Schnittpunkt eines Kreises um den Mittelpunkt mit Radius $2r$.

Aufgabe 86 und 87. Man wählt als Scheitelpunkte die Punkte innerhalb bezw. ausserhalb eines Kreises mit Sehne AB und Peripheriewinkel φ.

Aufgabe 101. Man trage an einer Seite deren Gegenwinkel beiderseits als Sehnentangentenwinkel an.

Aufgabe 102 und 103. Auf der Seite der grösseren anliegenden Seite.

Aufgabe 104. Man wähle den Gegenpunkt zur Sehne AC in Figur 187 einmal zwischen E und B, dann zwischen E und A.

Aufgabe 105. Man wende den Satz der Aufgabe 91 auf die einzelnen Dreiecke an.

Aufgabe 106. Man wiederhole die Schlussreihe der Aufgabe 94 in umgekehrter Reihenfolge.

Aufgabe 107. 1) 3 Eckpunkte innen, 2) 2 innen, 1 auf dem Kreis, 3) 2 innen, 1 ausserhalb, 4) 1 innen, 2 auf dem Kreis, 5) 1 innen, 1 auf, 1 aussen, 6) 1 innen, 2 aussen, 7) 3 auf dem Kreis, 8) 2 auf, 1 aussen, 9) 1 auf, 2 aussen, 10) 3 aussen. — Innerer Punkt liefert Sehnenwinkel, äusserer Sekantenwinkel, Kreispunkt Peripheriewinkel. (Ausnahme 10.)

Aufgabe 115. Man konstruiere nach Satz 23 die Berührungspunkte der Kreise und errichte die Radien.

Aufgabe 116. Gegen die grössere anliegende Seite hin.

Aufgabe 117. $r = \infty$, $\varrho_0 = \frac{h}{2} = \varrho_3$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \infty$.

Aufgabe 118. Man verfahre nach einer der drei in Erkl. 472 gegebenen Vorschriften.

Aufgabe 119. Durch den Winkel ist der supplementäre zugehörige Kreisbogen bestimmt, durch die Seitenlänge der zweite Eckpunkt auf dem Schenkel.

Aufgabe 132. Durch die Winkel als Peripheriewinkel ist die Grösse der zugehörigen Sehne, nämlich der Diagonale bestimmt. Es ist also eine beliebig, und die andere unter gegebenem Winkel einzutragen.

Aufgabe 133. Man erhält ein Teildreieck aus zwei Seiten und einem Winkel, dazu den Umkreis und die vierte Ecke.

Aufgabe 134. Der Umkreis des Dreiecks ABC ist Umkreis des Vierecks.

Aufgabe 135. Der Inkreis des Dreiecks aus AB, BC und der dritten Seite ist Inkreis des Vierecks.

Aufgabe 136. Man konstruiert in Fig. 207 den Umkreis und mittels Aufgabe 128 das Dreieck AEF.

Aufgabe 137. Dreifach unendlich viele Sehnen- und Tangentenvielecke, zweifach unendlich viele Kreisvierecke.

Aufgabe 138. Zweifach unendlich viele Antiparallelogramme oder Deltoide, einfach unendlich viele Rechtecke oder Rhomben, je ein einziges Quadrat.

Aufgabe 147. Ist e i n Gegenseitenpaar parallel oder g l e i c h, so muss das a n d e r e gleich oder parallel sein.

Aufgabe 148. Der Durchmesser durch die Scheitel der ungleichen Winkel ist Symmetrieachse.

Aufgabe 149. Man halbiere den Aussenwinkel und trage die Seitenstrecke auf der Halbierungslinie ab.

Aufgabe 150. Die Winkel der Diagonalen und Seiten sind Peripheriewinkel von $\frac{180}{n}$, $\frac{2 \cdot 180}{n}$, $\frac{3 \cdot 180}{n} \cdots$ bis $\frac{n \cdot 180}{n}$; die Winkel der Diagonalen unter sich sind Sehnenwinkel und ergeben sich als die halben Summen der zugehörigen Standbogen.

Aufgabe 151. Die den Stücken $DG = FE$ in Figur 214 entsprechenden Abschnitte sind gleich dem Radins.

Aufgabe 152. Man trage an der Diagonale die nach Aufgabe 150 gefundenen Winkel an.

Aufgabe 162. $XY = (AX - AY)$ gibt $BC = \frac{1}{2} XY$.

Aufgabe 163. Man erhält nur eine oder keine äussere Tangente; für die äusseren benützt man wieder den Hilfskreis mit Differenz der Radien.

Aufgabe 164. Jeder Kreis schneidet den andern unter einem K r e i s b o g e n von 90^0 oder Quadrant.

Aufgabe 165. Man errichte die rechten Winkel der Tangenten in den gegebenen Punkten.

Aufgabe 166. Der gesuchte Kreis ist konzentrisch mit dem Umkreis.

Aufgabe 167. Die Länge der Tangentenabschnitte wird Radius.

Aufgabe 172. Man drehe eine beliebige Sekante erst in parallele Lage zur vorhandenen.

Aufgabe 173. Man trage die Sehnenstrecke des innersten Kreises beiderseits je zweimal ab und ziehe die Kreise durch die entstehenden Punkte.

Aufgabe 174. Der Schnittpunkt zweier Kreise hat die Eigenschaft, dass seine Verbindungslinie Winkel von 120^0 und 120^0 bilden, also m u s s der dritte Winkel auch 120^0 sein.

Aufgabe 175. Der Berührungskreis des gegebenen ist zuerst zu zeichnen, dann der zweite mit Radius gleich dem Reststück der Zentralstrecke.

Aufgabe 176. Man zeichne erst das Dreieck ABC in Figur 221 mit Seiten $r_1 + r_2$, $r_2 + r_3$, $r_3 + r_1$.

Aufgabe 188. Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AB mit den Winkelhalbierenden von a, b.

Aufgabe 189. Schnittpunkt der zwei Winkelhalbierenden von ab und des mittelparallen Kreises.

Aufgabe 190. Schnittpunkte der zwei Parallelgeraden zu g und der zwei konzentrischen Parallelkreise mit Abständen d.

Aufgabe 191. Schnittpunkte der konzentrischen Kreise mit Radien $r_1 \pm r$, $r_2 \pm r$: 0 bis 8 Lösungen: letztere oder erstere, wenn die Zentralstrecke kleiner ist als $2r - r_1 - r_2$ oder grösser ist als $2r + r_1 + r_2$. Die 6 Zwischenglieder $2r \pm r_1 \pm r_2$ liefern 1 bis 7 Lösungen.

Aufgabe 192. Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AB mit den beiden konzentrischen Kreisen der Aufgabe 180.

Aufgabe 193. Mittelsenkrechte der Zentralstrecke für beide Berührungsarten.

Aufgabe 194. Kreisbogen mit Peripheriewinkel δ über der Diagonale AC.

Aufgabe 195. Man zeichnet die dritte Tangente senkrecht zur Winkelhalbierenden.

Aufgabe 196. In- und Ankreise der entstehenden Dreiecke aus den drei gegebenen Geraden (4 Lösungen).

Aufgabe 197. Die beiden Kreisbogenpaare stossen im gleichen Eckpunkt zusammen.

Aufgabe 209. Man errichte die Mittelsenkrechte und trage an derselben die Winkel an.

Aufgabe 210. Man errichte den Radius und seinen Kreis und trage daran die Winkel an.

Aufgabe 211. Man konstruiere die vier gemeinsamen Tangenten.

Aufgabe 212. Man zeichne erst die beiden Winkelhälften von 45^0 beiderseits der Winkelhalbierenden

Aufgabe 213. Man zeichne den einen Fusspunkt und trage an der Höhe die Winkel an.

Aufgabe 214. Man benutze die Mittelparallele des Dreiecks $M'RM_c$ bezw. Aufgabe 206.

Aufgabe 215. Man konstruiert das Dreieck ABM aus c und je zwei Dritteln der Schwerlinien.

Aufgabe 216. Der Satz in Erkl. 529 bleibt unverändert bestehen.

Druckfehler-Berichtigung.

Seite 3 rechts, Zeile 19 von unten, statt hin- lies hinzu.
Seite 55 rechts, Zeile 7 von oben, statt andern lies anstossenden.
Seite 57, Zeile 13 von oben, statt um- lies ein-.
Seite 59 links, Frage 60, Zeile 2, statt ein- lies um-.
Seite 88 rechts, Zeile 4 von unten, statt -linie lies -linien.
Seite 131 rechts, Zeile 12 von unten, statt beidemale lies beiderseits.
Seite 156 rechts, Zeile 4 und 13 von unten, die Ziffern 141 und 142 zu vertauschen.
Seite 158 rechts, Zeile 12 von oben, statt Geraden lies Gerade.

Verlag von L. v. Vangerow, Bremerhaven und Leipzig.

Verzeichnis
der bisher erschienenen Bände
von

Kleyers Encyklopädie

der gesamten

mathematischen technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herausgegeben unter Mitwirkung bewährter Fachmänner.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M., St. Louis, Athen.

Wer niedere und höhere Mathematik, z. B.: **bürgerliches und kaufmännisches Rechnen, Buchstabenrechnung, Gleichungen 1. 2. 3. und 4. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Differential- und Integralrechnung etc., Planimetrie, Stereometrie, analytische Geometrie, Projektionszeichnen (darstellende Geometrie). ebene uud sphärische Trigonometrie, Goniometrie (Winkelmessungslehre), Vermessungskunde (Geodäsie), Astronomie, Physik, Mechanik, Geostatik, Geodynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik, Elektrizität, Chemie und deren Hilfswissenschaften** studieren, oder wer, in der Praxis stehend, in diesen Fächern sich weiterbilden oder seine Kenntnisse auffrischen will, erhält durch

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften : : :

mit ca. 10,000 in den Text gedruckten Figuren,
herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner,

eine auch auf die praktischen Bedürfnisse des Technikers Rücksicht nehmende Auswahl von leichtverständlichen Lehrbüchern, die sowohl **dem Studierenden, dem Fachlehrer, als dem ausübenden Techniker** ein wohlvorbereitetes Material zum Studium und zum Nachschlagen darbieten; besonders wertvoll erscheinen dieselben dadurch, dass durch sie die Befähigung zur Lösung mathematischer und technischer Probleme ausserordentlich gefördert wird.

Jeder Band ist einzeln käuflich, und zu beziehen durch jede Buchhandlung des In- und Auslandes.

P. P.

Hiermit beehre ich mich, Ihnen das neueste Verzeichnis von:

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften

zu überreichen.

Aus der überaus großen Zahl der anerkennendsten Besprechungen, welche in Schul-, technischen und Tagesblättern erschienen und von welchen eine kleine Anzahl dem Kataloge beigegeben sind, bringe ich besonders den folgenden Ausspruch des „Pf. Courier“ zum Abdruck:

„In einzig dastehender Weise werden hier die mathematischen und die damit verwandten technischen und exakten Natur-Wissenschaften in ihrem ganzen Umfang von den elementarsten Regeln der Arithmetik bis zu dem stolzen Gebäude der höheren Mathematik behandelt. Das Werk dient gleichmässig den Zwecken des Schulunterrichts, wie denjenigen des Selbststudiums. Es enthält nicht nur die sonst in jedem Lehrbuch vorkommenden Definitionen, Lehrsätze, Formeln usw., sondern auch ausser vielen ungelösten Aufgaben eine Reihe Aufgabenlösungen, die in Bezug auf die Exaktheit und Sauberkeit der Darstellung unübertroffen dastehen, daneben häufig historische Exkursionen. Wer an der Hand dieser Lehrmittel von Stufe zu Stufe fortschreitend die mathematischen Disziplinen durcharbeitet, wird unstreitig schöne Erfolge erzielen, und die oft verhängnisvolle Ansicht, dass es zum Betrieb der trockenen Mathematik besonderer Talente bedürfe, wird dann von manchem als unzutreffend aufgegeben werden müssen.“

Die Lehrbücher der Kleyerschen Encyklopädie eignen sich ganz besonders zur Unterstützung des Unterrichts und Vortrags an den verschiedensten Lehranstalten, zum Selbststudium, zur Forthilfe bei Schularbeiten, zur Repetition, zur Vorbereitung für Examina und zum Nachschlagen für Fachleute, da bei den ausführlichen Lösungen gut gewählter Aufgaben, welche alle Teile dieser Encyklopädie enthalten, überall die Anwendungen der Gesetze, der Sätze, Regeln, Formeln etc. gezeigt werden.

Jährlich erscheinen von diesem Werke eine Anzahl neuer Bände, und sowohl die beteiligten Autoren, als auch die Verlagsbuchhandlung lassen es sich angelegen sein, den Ausbau des grossen Unternehmens nach Möglichkeit zu fördern.

Hochachtungsvoll

Bremerhaven. **L. v. Vangerow**, Verlagsbuchhandlung.

I. Mathematik.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik).

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.** Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **A. Frömter.** Preis: Mk. 3,—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch: **Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Frömter** und **Neubüser.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.)** Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. G. Maier.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen. Zweiter Teil: **Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen.** Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. **Hans Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: **Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen.** Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer **Münz-, Mass- und Gewichtstabelle.** Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Richard Olbricht.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Zweiter Teil: **Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente.** Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von **Dr. R. Olbricht.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Adolf Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Otto Prange.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades. (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des **Bachez de Méziriac,** im französischen Originale mit beigefügter deutscher Übersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von **W. Fr. Schüler.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten (Quadratische Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Dr. Aug. Blind.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten. (Quadratische Gleichungen.) Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Erstes Buch: Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 Figuren. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Zweites Buch: Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erklärungen und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen, nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen. (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: in einfachem Leineneinband Mk. 2.50.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: kartonniert 60 Pfg.

Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Integralrechnung. Zweiter Teil: Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik.** Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: **Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen.** Ohne Anwendung der Grenzen und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben und Formelverzeichnis. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—

Lehrbuch der Differentialrechnung. Zweiter Teil: **Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima.** Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren, 230 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Dritter Teil: **Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.** Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren, 138 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Krüger.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 Figuren. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 1.50. In einfachem Leinenband Mk. 2.—.

Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. G. Weichold.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: **Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 1.80. Geb. nur mit Teil II zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Zweiter Teil: **Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 2.20. Geb. nur mit Teil I zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Dritter Teil: **Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie)). Vierter Teil: **Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Örter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Fünfter Teil: **Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Sechster Teil: **Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Siebenter Teil: **Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Achter Teil: **Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. —.50.

Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil: **Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Seipp.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: **Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Zweiter Teil: **Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 Figuren. Bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Dritter Teil: **Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren.** Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Bearbeitet von **Prof. E. R. Müller.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Erster Teil: **Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden.** Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Zweiter Teil: **Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades.** Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie). Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Faches, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte usw. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach **System Kleyer** durchaus neu bearbeitet. Zweite Auflage. Von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert.** Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 18.—. Geb. Mk. 19.50.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erklärungen und 52 Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Erster Teil: **Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 361 Erklärungen und 97 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Zweiter Teil: **Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Dritter Teil: **Pol und Polare. Mittelpunktseigenschaften. Involution. Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 550 Erklärungen und 172 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen. Mit 259 Fragen und Antworten, 199 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. A. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Erster Teil: **Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Zweiter Teil: **Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Erste Hälfte: **Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie.** Mit 195 Erklärungen und 169 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Zweite Hälfte: **Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.** Mit 218 Erklärungen und 210 Figuren. Von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Erste Hälfte: **Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Zweite Hälfte: In Vorbereitung.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. Erster Teil: **Sphärische Astronomie.** Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten, bearbeitet von **Prof. Dr. W. Laska.** Preis Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Die Nautik in elementarer Behandlung. Einführung in die Schiffahrtkunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Fr. Bolte,** Direktor der Navigationsschule in Hamburg. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Kartographie. Die Kartographie nach Einführung der Terraindarstellung in Karten und Plänen. Erster Teil. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Victor Wessely.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

II. Physik, Elektrizität, Chemie, Akustik.

Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Mit 35 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckten Figuren und 10 Karten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik) mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis· Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.

Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Elastizität und Festigkeit mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.50. Geb. Mk. 6.50.

Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik) mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 13.50. Geb. 14.50.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Erster Band: **Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter, sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen.** Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Erste Hälfte: **Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand.** Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Zweite Hälfte: **Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger.** Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität), erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus) nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Ad. Krebs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Teil: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch des Elektromagnetismus. Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. O. May** und **Ad. Krebs.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band. **Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band. **Die Metalle.** Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.

Lehrbuch der Akustik. Erster Band: **Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen.** Mit 257 Erklärungen und 106 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 70 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 4,50. Geb. Mk. 5,50.

Lehrbuch der Akustik. Zweiter Band: **Die verschiedenen Tonerreger.** Mit 465 Erklärungen und 315 in den Text eingedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 114 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Erste Hälfte: **Die Fortpflanzungserscheinungen des Schalles, nebst den Erscheinungen zusammengesetzter Schwingungsbewegungen.** Mit 393 Erklärungen und 235 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 66 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Zweite Hälfte: **Praktische Akustik d. i. die Akustik in großen begrenzten Räumen, in Konzert- und Hörsälen, in Kirchen und Theatern.** Mit 136 Erklärungen und 85 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 3,50. Geb. Mk. 4,50.

Entstehung und Entladung der Gewitter, sowie ihre Zerstreuung durch den „Blitzkamm" (Fulgura frango). Eine metereologische Betrachtung von **Richard Klimpert.** Preis gebunden Mk. 2.—.

Anerkennungen aus dem Publikum

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herr Pfarrer Kaspar-Altlussheim schreibt: „Ich werde dieses vorzügliche Werk Ihres Verlages empfehlen, wo ich kann. Ich habe es als das einzige kennen gelernt, das die für Manchen etwas trockene Wissenschaft der Algebra und Geometrie mit Geist und Leben füllt und imstande ist, auch ohne Lehrer die größten Schwierigkeiten überwinden zu helfen. Es ist ein gewaltiges Stück Arbeit, das in den verschiedenen, nach einheitlichem, erprobtem Plane verfaßten Bänden liegt und für das jeder Lernende den Bearbeitern und dem Verlag vielen Dank schuldet. Ich wünsche Ihrem Unternehmen im Interesse der Lernenden die weiteste Verbreitung."

Bonn. Mit vielem Interesse habe ich Ihre Unternehmung verfolgt, eine praktische math.-naturwissenschaftliche Bibliothek zu schaffen, und in der Erkenntnis, wie sehr eine solche billige Bibliothek dem allgemeinen Bedürfnis entspricht, werde ich nach Kräften für ihre weitere Verbreitung mich bemühen. Ich bin Ihnen dankbar für die Erleichterung, welche Sie auch mir durch Ihr Werk bei meinen Studien geschaffen haben. Namentlich freue ich mich, dass in der Differentialrechnung, bei welcher ja eine einfache, dem Wissen des Anfängers entsprechende Darstellung große Schwierigkeiten bietet, eine so praktische, mit Konsequenz durchgeführte Darstellungsweise von Ihnen gegeben worden ist u. s. f.

Fr. Blencke, stud. rer. nat.

Dahbruch b. Siegen. Im Uebrigen kann ich von Ihren Lehrbüchern nur lobenswertes erwähnen und wünsche nur, dass dieselben ein Jahrzehnt eher zur Welt gekommen wären. Es ist mir bis jetzt noch kein Werk in die Hände gekommen, das in so leicht faßlicher Weise dem Schüler die exakten Wissenschaften beizubringen imstand wäre, u. s. f.

W. Altpeter, Ing.

Budapest. Vor allem sei es mir gestattet, Ihnen für den Verlag der Kleyerschen Encyklopädie meine vollste Anerkennung auszusprechen. — Einem Bedürfnis in wirklich vorzüglicher Weise abhelfend, behandeln die Publikationen der erwähnten Sammlung, die mathematischen Disziplinen nach theoretisch und praktisch richtiger Lehrmethode, was ich aus eigener Erfahrung als Lehrer an einer Militärbildungsanstalt vollauf bestätigen kann: indem die handlichen Heftchen mit ihrem reichen Stoff ein wirkliches Lehrbuch für den Schüler und ein vorzügliches Hilfsbuch für den Lehrer bilden.

Ferd. von Jerzabek, k. k. Leutnant.

Engelberg, Benediktiner-Stift. Da Ihr Werk „math.-tech.-naturwissenschaftliche Encyklopädie", soweit es bis heute vollendet vorliegt, auch an unserem Gymnasium allseitig wohlverdiente Anerkennung gefunden hat, so möchte speziell ich, als Lehrer der Mathematik, Ihnen heute die Gefühle meines Dankes und meiner Hochachtung für das treffliche Werk bekunden. Die bis ins Detail gehende, dabei doch so übersichtlich geordnete, leicht faßliche, klare Entwicklung der Beweise ist es ganz besonders, die mir Ihr Werk lieb und teuer macht, deswegen meinen herzlichsten Dank für Ihre mühevolle, so meisterhaft ausgeführte Arbeit, u. s. f.

P. Basilius Fellmann, O. S. B.

Oberwinterthur. Vor allem empfangen Sie meinen wärmsten Dank für die Initiative und im allgemeinen glückliche Ausführung der Idee. Gewiß kann jeder mit fleißiger Benutzung Ihrer geschätzten Hefte durch Selbstunterricht schöne Erfolge in dieser Disziplin erzielen, u. s. f.

Jacob Flur, Lehrer.

Hartford (Connecticut). Ich wünsche Ihnen unaufgefordert meinen Gefallen über den Vorteil auszudrücken, welchen ich bei verschiedentlichem Gebrauch bei der Behandlung Ihrer wirklich ausgezeichneten Kleyerschen mathematisch-technischen-naturwissenschaftlichen Encyklopädie gehabt habe. Ich habe nicht allein eine große persönliche Begeisterung für sie, sondern ich habe dieselbe mit Nutzen auch in meiner Schule gebraucht. Ich bin Lehrer der Mathematik an der Public Highe School (gleichbedeutend mit Ihren Gymnasien und Realschulen), u. s. f. Homer W. Brainard.

Berlin. Seit zwei Jahren beziehe ich nun schon von meiner Buchhandlung Ihre Kleyer-Bandausgaben. Welche Dienste sie mir geleistet, vermag ich auf diesem kleinen Raume nicht auszusprechen. H. Schaepel jr., Gymnasiast.

Herr **Dr. Otto Willareth in Sand i. Elsass** schreibt an den Verleger: Vermutlich mache es Ihnen Freude und ist es in Ihrem Geschäfts-Interesse wichtig, meine Anzeige über Ihr Verlagsunternehmen **Kleyers Encyklopädie** zu erhalten, welche ich in der **„Straßburger Post"**, dem größten Blatt von Südwest-Deutschland, No. 809 vom 11. September 1901, habe erscheinen lassen. Deshalb gestatte ich mir, Ihnen diese Besprechung als Drucksache zu übersenden. Mit dieser Besprechung möchte ich Ihnen und den Verfassern dieser Encyklopädie eine Dankesschuld abtragen für eines der segensreichsten litterarischen Unternehmen der Gegenwart. Ich besitze einen bedeutenden Teil Ihrer Encyklopädie und stets ist es mir eine Freude, darin zu arbeiten. Jedenfalls liegt es im Interesse der Sache, dass sie möglichst bekannt und verbreitet wird, damit Ihnen und den Herren Verfassern die Lust nicht an dem mühevollen Unternehmen ausgeht etc.

Berlin. Durch einen glücklichen Zufall wurde ich vor Kurzem mit Kleyers Encyklopädie bekannt und ich bemerkte nach kurzem Studium derselben, dass ein vortreffliches Werk im Erscheinen begriffen sei, u. s. f. Edm. Koebke, stud. math.

Währing b. Wien. Da das unter Ihrer werten Leitung erscheinende voluminöse Werk leider erst einige Teile vollständig enthält, aber entschieden das Vortrefflichste in Bezug auf Selbststudium leistet, u. s. f. Joseph Hackenberg, Beamter.

Traunstein. Es würde mich herzlich freuen, wenn es mir in meiner Besprechung gelungen wäre, das Interesse eines weiteren Leserkreises für Ihr großartiges, wahrhaft zeitgemäßes und eminent praktisches Unternehmen nachhaltig anzuregen.
R. Knilling, Lehrer.

Braunschweig ich war überrascht und hocherfreut über ein Unternehmen (bezieht sich auf den chemischen Teil der Encyklopädie. Die Redakt.), welches mir so ganz aus der Seele herausgeschrieben war. . . . Wie Sie den Stoff behandeln, wird er noch von keiner Seite auch nur annähernd gehandhabt, abgesehen von Katechismen, u. s. f. Gestatten Sie mir als praktischem Lehrer der Chemie, der viele heterogene Elemente zu unterrichten hat, Ihnen zu diesem schönen Werke meinen verbindlichsten Glückwunsch auszusprechen. Möge es Ihnen vergönnt sein, das Werk in dem Sinne des Prospektus zu Ende zu führen, und glaube ich fest, dass die wirklichen Lehrer der Chemie Ihnen zu vollem Dank verpflichtet sein werden, u. s. f.
Dr. Ed. Freise, Direktor der Droguisten-Fachakademie.

Cambridge (England). Während meines Besuches in Kreuznach habe ich mich interessiert, einige deutsche Schulbücher mit unseren englischen zu vergleichen. Ich habe mehrere Hefte der Kleyerschen Encyklopädie durchgeblättert und finde, dass dieselben höchst praktisch und brauchbar sind, besonders für die zuwachsende Anzahl selbstunterrichtender Studenten. Ich bin ein Sachkenner in der reinen und angewandten Mathematik, Ehrengraduatus (etwa wie deutscher Ph.-Doktor) und Dozent in der Cambridge Universität und würde sehr gerne helfen, einige Hefte zu übersetzen. Ich werde auch Mitarbeiter finden können, dass es möglich wird, nach und nach vielleicht das ganze Werk in englisch herauszugeben. Wenn Ihnen dieser Vorschlag gefällt, können wir später Näheres darüber erörtern. Ich glaube, dass eine Uebersetzung einen sehr guten Verkauf haben würde, nicht nur in Großbritannien und Irland, sondern auch in Amerika und in den britischen Kolonien.
Theodore E. Worlledge.

Wien. Gestatten Sie uns, Ihnen unsern Dank für Ihre einzig dastehende Aufgabensammlung, die wir schon bei ihrem ersten Erscheinen mit Freuden begrüßten, u. s. f. . . . Genehmigen Sie deshalb den Dank für Ihre ausgezeichnete Encyklopädie.
Mehrere Studierende der Wiener Universität.

Sundswall (Schweden). Im Besitze einiger Hefte der ausgezeichneten Kleyerschen Encyklopädie bin ich so frei gewesen, in der beigefügten Zeitung die Aufmerksamkeit des schwedischen Publikums darauf zu richten und ist es meine Hoffnung, sowohl den Interessenten, als Ihnen einen Dienst erwiesen zu haben. Das Werk ist in Schweden leider zu wenig bekannt. D. F. Lundgren.

Brünn. Als erster Abnehmer Ihrer in der Tat sehr vortrefflichen Encyklopädie, u. s. f. Meine zahlreichen Schüler machen den besten Gebrauch von dieser einzig dastehenden Aufgabensammlung und bitten unaufhörlich, zu veranlassen, dass weitere Teile erscheinen. Franz Schwaben, Lehrer.

Bergedorf bei Hamburg. Bereits im Besitze mehrerer Bände der Kleyerschen Encyklopädie habe ich die vortrefflichen Werke schon vielen Interessenten mit Erfolg empfohlen. Albert Zander, Lehrer an der Hansaschule.

Gleiwitz.; deshalb habe ich mit Freuden Ihr Werk begrüßt, u. s. f.; ich aber mit förmlicher Begierde Ihre so klar gelösten Aufgaben, u. s. f. George Feumer.

Coburg. Bitte um sehr gefl. Mitteilung, bis wann die Lehrbücher über Bau- und Ingenieurwissenschaften nach System Kleyer erscheinen werden. Mit derartigen Büchern würden Sie die ganze Welt erfreuen. Ist Integralrechnung II. Teil erschienen? J. Eichhorn, Zivilingenieur und Patentanwalt.

Selmeczbanya (Ungarn). und ich muß offen gestehen, dass, wenn ich mich auch der deutschen Sprache noch nicht mächtig genug fühle, so werde ich doch am schnellsten aus diesem Werke zum Ziel gereichen, und eher lerne ich die Sprache, als dass ich das Werk nicht benutze, u. s. f. Ludwig Veress.

Linz. Anschließend spreche ich Euer Wohlgeboren meinen herzlichsten Dank aus für die Herausgabe Ihrer trefflichen Aufgabenhefte, die mir Gelegenheit verschaffen, mir privat und ohne große Auslagen Kenntnis von allen Partien der reinen und angewandten Mathematik zu verschaffen, u. s. f. Herrmann Bauernberger, stud. theol.

Bochum i. W. Ew. Hochwohlgeboren im Erscheinen begriffenes, so lehrreiches und auch von Laien leichtverständlich gehaltenes Werk: „Die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen" habe ich mit Freuden begrüßt, u. s. f. C. P. Kupfer.

Urteile der Presse

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Pädagogisches Jahrbuch von Emil Schneider. Dem Verlage von L. v. Vangerow, Bremerhaven, gebührt das Verdienst, durch Herausgabe der Kleyerschen Encyklopädie ein Werk geschaffen zu haben, das durch die Art seines Erscheinens und durch die Eigentümlichkeit in der Behandlung des Stoffes auch diejenigen, die keine gelehrte Schule besucht haben, in den Stand setzt, sich durch eigenen Fleiß ein reiches und gründliches Wissen zu erwerben. Der vorliegende Band ist in jeder Beziehung eine Musterleistung und wird hiermit wie das ganze Werk nachdrücklichst empfohlen. Man kann nur wünschen, dass uns der rühmlichst bekannte Verfasser bald mit einem nach demselben Plane bearbeiteten Lieferungswerke über die beschreibenden Naturwissenschaften beschenken möge.

Naturae Novitates. Die Kleyersche Encyklopädie ist dem Studierenden schon längst ein wohlbekanntes, unentbehrliches Hilfsmittel geworden, so dass man als die beste Empfehlung der neu vorliegenden Bände bezeichnen kann, dass diese sich in Inhalt und Form würdig ihren Vorgängern anschließen.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Literaturblatt für höhere Schulen. Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil. Wenn man nach der vorliegenden Schrift die ganze Kleyersche Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften beurteilen darf, so verdient dieses Unternehmen weit mehr Beachtung und Unterstützung, als es bislang in Kollegenkreisen gefunden hat. Offen gestanden bin ich mit dem Verdachte an die Lektüre dieses Buches herangetreten, dass es, als für den Selbstunterricht und die elementare Technik berechnet, in wissenschaftlicher Beziehung manches zu wünschen übrig lassen werde. Aber ich bin sehr angenehm enttäuscht worden; das Buch ist durchaus wissenschaftlich angelegt und weit gründlicher durchdacht, als die meisten Lehrbücher der Stereometrie; dass es dabei auch vielfach auf die Praxis des Lebens eingeht, kann ihm nur zur weiteren Empfehlung gereichen. Mir ist keine Schrift bekannt, welche die räumlichen Lageverhältnisse von Geraden und Ebenen mit der Allgemeinheit und Gründlichkeit untersucht, wie die vorliegende Stereometrie. Ganz besonderen Wert hat das Buch auch dadurch, dass eine große Menge konstruktiver Aufgaben erschöpfend oder wenigstens mit Andeutungen zur Lösung vorgeführt wird; besonders sorgfältig ist stets die Determination behandelt. Allen Kollegen, die bislang die konstruktive Seite der Stereometrie weniger beachtet haben, sei hiermit das Seippsche Buch nachdrücklichst empfohlen; ebenso seien die Studierenden zur Ausbildung ihrer Raumanschauung darauf hingewiesen, um so lieber, als die Zeichnungen durchweg mustergültig sind.

Pfälzische Lehrerzeitung. Von diesem großartigen, bis jetzt unerreicht dastehenden Unternehmen liegen uns weitere Bände vor. Für die Zwecke des Selbststudiums sind diese Werke das Beste, was es giebt. Auch in Schulen dürften sie mit großem Nutzen zu gebrauchen sein.

Literaturblatt für katholische Erzieher. Bezüglich dieser nach Kleyers System bearbeiteten Lehrbücher können wir uns kurz fassen. „Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen etc. Wissenschafen bietet, wie bereits allgemein anerkannt, die besten Unterrichtsmittel."

Pädagogisches Literaturblatt. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Anlage und Ausführung des Sachsschen Lehrbuchs sind vorzüglich. Der Verleger hat für eine gute Ausstattung Sorge getragen, die Figuren insbesondere zeichnen sich durch wohltuende Klarheit und Schärfe aus. Gesamturteil: das Buch ist für den Selbstunterricht, wie auch zum Gebrauch an entsprechenden Unterrichtsanstalten nach jeder Richtung hin aufs beste geeignet.

Der Techniker, New York. Die systematische Einteilung und Behandlung des umfangreichen Lehrmaterials mit zahlreichen erläuternden Aufgaben und Beispielen, wie in dem vorliegenden Werke, ist sehr fördernd und anregend für das Studium und ein allseitig anerkannter Vorzug der Kleyerschen Unterrichtsmethode; so verfaßte Lehrbücher sind nicht allein für Schulunterricht, sondern auch zum Selbststudium und als Nachschlagebücher für den praktischen Fachmann von hohem Nutzen.

Zeitschrift für Realschulwesen, Wien. Hovestadt, Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Größen. Das Buch, welches den Gegenstand mit der möglichsten Vollständigkeit behandelt, zeigt bei einer anfangs ausführlichen, später knappen Darstellung doch durchgehends jene Klarheit, die gerade für diesen Teil der Wissenschaft nötig ist. Es wird sich dasselbe daher überall als eine gute Einleitung in das wissenschaftliche Studium der Physik empfehlen.

Magazin für Pädagogik. Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster und Zweiter Teil. An solchen Werken haben wir freilich noch keinen Ueberfluß und wir möchten einem jeden raten, der sich ohne Hilfe eines Lehrers tiefer in dieses Gebiet einzuarbeiten wünschte, sei es zum Zwecke der Erstehung einer Prüfung, sei es aus besonderer Liebhaberei zu diesem schönen Zweig der Mathematik, zu diesem ausgezeichneten Werke zu greifen. Nur mit hoher Befriedigung und reichem Gewinn wird er dasselbe aus der Hand legen.

Prakt. Physik. Der Verfasser hält vollkommen, was er verspricht; er ist ein Meister in der Entwicklung und Klarstellung der Grundbegriffe und macht dadurch seine Arbeit vor allem für den angehenden Lehrer und für die Selbstausbildung geeignet, und mancher ältere Lernende wird sagen: Hätte man mir solches in meiner Jugend geboten!

Verlag von L. v. Vangerow in Bremerhaven und Leipzig.

Baukunde.

Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Ein Lehrbuch für den Unterricht an bautechnischen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und Nachschlagen mit 194 Uebungsaufgaben und 486 Figuren nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 3. Auflage. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 5,50.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Erster Teil: **Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.** Mit 345 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn.** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W.. 2. Auflage. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Zweiter Teil: **Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive.** Anhang: **Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Mit 354 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 2. Auflage. Preis: 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen. Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen usw. **12 Tafeln mit erläuterndem Texte.** Entworfen und gezeichnet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. In Mappe: Mk. 5,50.

Das Zeichnen der Stereometrie. Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von **Prof. A. Brude.** Preis: Mk. 6.—.

Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

/ Kleyer, Adolph / Sachs, Joseph

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie) für den Schulunterricht und das Selbststudium

Bd.: 4

1892

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.150-m(3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841070-3